

Analisi del moto pre e post urto del veicolo

3.1 Moto rettilineo p. xx – 3.1.1 Accelerazione uniforme p. xx – 3.1.2 Distanza per l'arresto del veicolo ed evitabilità p. xx – 3.1.3 Diagrammi velocità-tempo e distanza di sicurezza fra due veicoli p. xx – 3.1.4 Calcolo della velocità dalla tracce di frenata p. xx – 3.1.5 Distribuzione del carico sugli assi p. xx – 3.1.6 Frenatura ideale p. xx – 3.1.7 Frenatura reale p. xx – 3.1.8 Il sorpasso p. xx – 3.2 Moto in curva p. xx – 3.2.1 Sbandamento in curva: calcolo della velocità critica p. xx – 3.2.2 Calcolo della velocità critica nel caso di veicolo frenato p. xx – 3.2.3 Sbandamento e rotazione attorno all'asse verticale del veicolo: calcolo della velocità dalle tracce p. xx – 3.3 Moto roto traslatorio p. xx – 3.3.1 Simulazione del moto a ruote bloccate p. xx – 3.3.2 Simulazione del moto a ruote non bloccate p. xx – 3.3.3 Moto post urto: modello semplificato p. xx – 3.4 Ribaltamento del veicolo p. xx – 3.4.1 Ribaltamento in condizioni quasi statiche p. xx – 3.4.2 Ribaltamento in condizioni dinamiche p. xx – 3.4.3 Analisi dell'incidente con ribaltamento p. xx

3.1 Moto rettilineo

Per un veicolo in movimento lungo una direzione x , a velocità \dot{x} ed accelerazione \ddot{x} , in accordo con le leggi di Newton, si può scrivere la seguente equazione di moto:

$$(3.1) \quad m\ddot{x} = \sum F_x$$

dove m è la massa del veicolo, e $\sum F_x$ indica la sommatoria di tutte le forze agenti sul veicolo in direzione x . Tali forze sono principalmente originate dalle azioni aerodinamiche, dalla resistenza al rotolamento degli pneumatici, dalla gravità, dalle forze di trazione o di frenata, dalle forze di urto derivanti dall'impatto del veicolo contro un ostacolo o un altro veicolo. In generale tali forze sono variabili nel tempo e l'integrazione della (3.1) permette di ottenere la velocità e lo spazio percorso nel tempo, a partire da condizioni cinematiche note.

Nel seguito si considereranno forze costanti nel tempo; tale assunzione può essere fatta in diversi casi pratici che si incontrano nella ricostruzione di un incidente stradale; ad esempio, nei casi di accelerazione del veicolo o di frenata a ruote bloccate, le variazioni delle forze di contatto ruota – terreno possono essere in prima approssimazione trascurate e le forze agenti sul veicolo si possono considerare costanti.

3.1.1 Accelerazione uniforme

Nel caso di accelerazione uniforme si ha $\Sigma F_x/m=a$, e dalla (3.1), integrando, si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$(3.2) \quad \dot{x} = v_0 + at$$

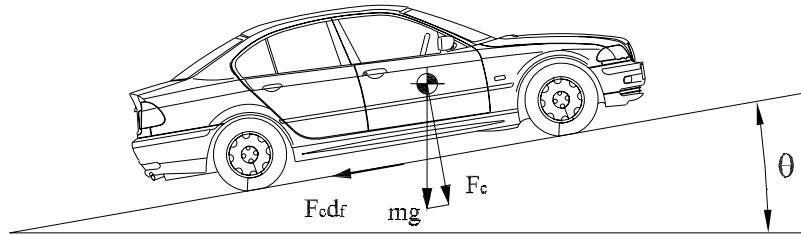
Integrando nuovamente la (3.2) si ottiene lo spazio percorso in funzione del tempo:

$$(3.3) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

dove v_0 e x_0 sono la velocità e lo spazio all'istante iniziale, rispettivamente. Nel caso di frenata, il valore di a è negativo.

Consideriamo ora la variazione di energia cinetica dovuta al lavoro delle forze agenti sul veicolo. Assumiamo che un veicolo frenando percorra una distanza x su un tratto di strada con una certa inclinazione θ rispetto all'orizzontale, come rappresentato in Figura 3.1.

Figura 3.1 – Forza frenante e forza di gravità agenti su un veicolo marciante in salita.



Il veicolo è soggetto alla sola forza di gravità e alle forze scambiate tra ruote e terreno. La risultante di queste ultime si può esprimere come $F_c d_f$, dove d_f rappresenta un coefficiente di attrito globale tra veicolo e terreno, indicato come coefficiente di decelerazione o *drag factor* (il cui valore è generalmente compreso tra i valori di aderenza utilizzata dalle singole ruote) ed F_c è la forza di contatto tra veicolo e terreno, pari a $F_c = mg \cos \theta$.

Dal bilancio dell'energia si ha che la variazione di energia cinetica del veicolo è pari al lavoro compiuto dalle forze di attrito più quello compiuto dalla forza di gravità. Uguagliando quest'ultimo lavoro alla variazione di energia potenziale, si può scrivere il seguente bilancio:

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_0^2) = -mgd_f x \cos \theta - mg \Delta h$$

Δh rappresenta il dislivello tra la posizione finale ed iniziale del veicolo ed è positivo o negativo, a seconda che il veicolo percorra il tratto x in salita o discesa, rispettivamente. La velocità iniziale risulta dunque:

$$(3.5) \quad v_0 = \sqrt{v_f^2 + 2g(xd_f \cos \theta \pm \Delta h)}$$

Dato il piccolo valore delle pendenze che possono incontrarsi in pratica, il termine $\cos \theta$ verrà nel seguito assunto pari ad 1 e considerando che $\Delta h = x \sin \theta$, la (3.5) si semplifica in:

$$(3.6) \quad v_0 = \sqrt{v_f^2 + 2gx(d_f \pm \tan \theta)}$$

Si osserva che il termine $\tan \theta$ rappresenta anche la pendenza del terreno, usualmente espressa in percentuale.

Nel caso in cui il terreno sia pianeggiante e il veicolo freni fino ad arrestarsi, la (3.6) si riduce alla:

$$(3.7) \quad v_0 = \sqrt{2gxd_f}$$

In generale può accadere che il terreno interessato dalla traslazione del veicolo non sia omogeneo e presenti differenti coefficienti di attrito. Un tipico esempio è quando il veicolo striscia dapprima sull'asfalto e poi, finendo fuori dalla carreggiata, striscia su una banchina ghiaiosa o erbosa. In tal caso è opportuno valutare la variazione di energia cinetica per ciascun tratto. La variazione totale di energia cinetica sarà pari alla somma delle variazioni su ciascun tratto. Per il tratto j -esimo, dalla (3.4) si ha:

$$(3.8) \quad \frac{1}{2}m(v_{j+1}^2 - v_j^2) = -mgd_{fj}x_j \cos \theta_j - mg\Delta h_j$$

Sommando tutti i contributi dei vari tratti, si ottiene la variazione di energia cinetica totale, e, con le semplificazioni già viste, la seguente espressione della velocità iniziale:

$$(3.9) \quad v_0 = \sqrt{v_f^2 + 2g \sum_{j=1}^n x_j (d_{fj} \pm \tan \theta_j)}$$

In alcuni casi può essere utile ricavare la distanza percorsa da un veicolo che frena fino a fermarsi, a partire da una velocità v_0 ; dalla (3.4), oppure dalle (3.2) e (3.3), ricavando x si ha:

$$(3.10) \quad x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(d_f \pm \tan \theta)}$$

Il tempo necessario per variare la velocità da v_0 a v_f , con una data accelerazione a , può essere ricavato dalla (3.2):

$$(3.11) \quad t = \frac{v_f - v_0}{a}$$

Dove a , nel caso di veicolo frenato su strada in pendenza risulta: $a = -g(d_f \pm \tan\theta)$.

Si nota, quindi, che nel moto uniformemente accelerato o decelerato, il tempo è proporzionale alla velocità mentre lo spazio percorso è proporzionale al quadrato della velocità iniziale.

Una altra espressione per il tempo, utile per valutare i parametri cinematici nelle fasi pre e post urto dei veicoli, può essere ottenuta dalla (3.3):

$$(3.12) \quad t = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2x}{a}}$$

Esempio 1

Un veicolo percorre una strada in salita con pendenza del 3% e improvvisamente frena con ruote bloccate percorrendo 10 m sull'asfalto e quindi finendo lateralmente fuori dalla carreggiata, percorrendo sulla banchina erbosa altri 5 m, in piano, fino all'arresto. Valutare la velocità iniziale del veicolo ed il tempo impiegato nella fase di frenata.

Per il calcolo della velocità iniziale si applica la (3.9), assumendo un coefficiente di decelerazione del veicolo sul tratto asfaltato pari a 0,8 e sul tratto erboso pari a 0,5; poiché il veicolo, alla fine della frenata si è fermato, si pone $v_f = 0$; la pendenza del 3% significa che $\tan\theta = \Delta h / x = 0,03$ positiva perché il tratto percorso è in salita. Si ha, quindi:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2g[x_1(d_{f1} + \tan\theta_1) + x_2d_{f2}]} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot [10(0,8 + 0,03) + 5 \cdot 0,5]} = 14,6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La velocità v_e , posseduta dal veicolo all'inizio del tratto erboso, è:

$$v_e = \sqrt{2gx_2d_{f2}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 0,5} = 7,0 \text{ m/s}$$

per il calcolo del tempo, nel tratto percorso sull'asfalto, si applica la (3.11), ponendo $a = -g(d_f \pm \tan\theta) = -9,81(0,8 + 0,03) = -8,14 \text{ m/s}^2$:

$$t = \frac{v_e - v_0}{a} = \frac{7 - 14,6}{-8,14} = 0,93 \text{ s}$$

In modo equivalente, il tempo nel tratto percorso sull'asfalto, avrebbe potuto essere calcolato con la (3.12):

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2x}{a}} = \frac{14,6}{8,14} - \sqrt{\left(\frac{14,6}{8,14}\right)^2 - \frac{2 \cdot 10}{8,14}} = 0,93 \text{ s}$$

Per il tratto percorso sull'erba, il tempo può essere calcolato ancora dalla (3.12) o dalla (3.11); applicando quest'ultima si ottiene:

$$t = \frac{-v_e}{a} = \frac{-7}{-9,81 \cdot 0,5} = 1,43 \text{ s}$$

Il tempo totale necessario al veicolo per arrestarsi è quindi: $0,93 + 1,43 = 2,36 \text{ s}$.

3.1.2 Distanza per l'arresto del veicolo ed evitabilità

Nel campo della ricostruzione degli incidenti, alla manovra di brusca frenata, o frenata di emergenza del veicolo, si accompagna sempre un tempo preliminare, indicato generalmente come tempo di reazione t_r . Tale tempo è il tempo necessario al guidatore per la percezione del pericolo, per prendere una decisione sul da farsi e per agire; il tempo così detto di reazione, quindi, comprende le fasi di percezione, decisione e reazione. Il tempo tipico di reazione può variare in funzione di molti parametri, tra cui, oltre alla differenza tra persona e persona, le condizioni atmosferiche, di traffico e della strada, l'aspettativa dell'evento, le condizioni notturne o diurne, il tipo di veicolo, l'esperienza di guida, l'età e genere del guidatore, la stanchezza, l'uso di farmaci, droghe o alcool, ecc.

Tipicamente, per il tempo di reazione relativo ad una frenata di emergenza si considerano valori compresi tra 0,5 e 2,5 s. Poiché è difficile valutare esattamente il tempo di reazione di un guidatore in un determinato incidente, a fini comparativi spesso si considera un tempo di 1,2 s.

Al tempo di reazione segue un intervallo di tempo in cui gli organi frenanti iniziano ad agire e a rallentare il veicolo. Il tempo di azionamento del freno, vedi tab. I, è generalmente inferiore a 0,1 s per gli impianti frenan-

Tabella I – Ritardo nell'entrata a regime dei dispositivi di frenatura.

Freni idraulici di tipo automobilistico (tamburo + disco)	$0,15 < t < 0,25$
Freni idraulici autocarri leggeri (tamburo + disco)	$0,2 < t < 0,30$
Freni idropneumatici	$0,40 < t < 0,65$
Freni pneumatici a seconda della posizione del servoautodistributore	$0,45 < t < 1$

ti ad azionamento idraulico, mentre nel caso di impianti ad azionamento pneumatico, utilizzati nei mezzi pesanti, data la comprimibilità dell'aria, si possono raggiungere tempi compresi tra 0,2 s e 1 s (i valori più alti si hanno in corrispondenza degli assi più distanti dalla pompa se il veicolo non è provvisto di serbatoi di aria sul rimorchio o dispositivi che azionano in modo programmato i vari assi).

Questo tempo di azionamento del freno viene solitamente accorpato al tempo di reazione del guidatore, indicando così il tempo ottenuto

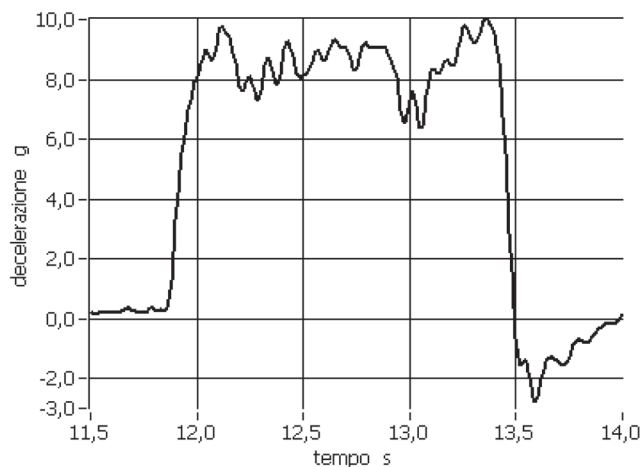
come tempo di reazione psicotecnico, ad indicare che oltre alla reazione dell'uomo vi è una componente di tempo 'tecnica' dovuta ai componenti meccanici. Considerando l'incertezza spesso esistente nella valutazione del coefficiente di decelerazione d_f e del tempo di reazione, il ritardo nell'azionamento dell'impianto frenante assume importanza solo per ritardi elevati, caratteristici dei veicoli pesanti.

Dal momento in cui si ha l'azionamento dei freni, il tempo per raggiungere la massima coppia frenante alla ruota dipende dalla repentinità con cui viene azionato il pedale del freno, dalla elasticità delle tubazioni e dal tipo di fluido impiegato nell'impianto frenante. Valori tipici per le autovetture (con impianti idraulici) in frenate di emergenza sono attorno ai 0,2 s.

In Figura 3.2 è mostrata, ad esempio, la curva accelerazione-tempo di un veicolo sottoposto a brusca frenata. Si osserva come il tratto iniziale della curva, in cui la decelerazione varia da zero al valore stabilizzato, è praticamente lineare e di durata pari a circa 0,2 s. Dopo questo tempo, in assenza di ABS, le ruote si bloccano e il veicolo inizia a strisciare sul terreno, mentre se vi è l'impianto ABS, si ha la modulazione della forza frenante attorno al valore massimo consentito dalle condizioni di aderenza.

Nella fase precedente la stabilizzazione della frenata, ai fini del calcolo della variazione di velocità subita dal veicolo, si può assumere un valore costante a_a della decelerazione, pari ad una frazione k della decelerazione a_s stabilizzata: $a_a = ka_s$ con k compreso tipicamente nell'intervallo $0,5 \div 0,7$. La durata di questa fase, come già evidenziato, si assume generalmente pari a $t_a = 0,2$ s.

Figura 3.2 – Curva accelerazione-tempo durante una frenata di emergenza di un autoveicolo dotato di ABS.



Nell'intera manovra di frenata di emergenza si possono distinguere, quindi, tre fasi, come esemplificato nello schema di Figura 3.3:

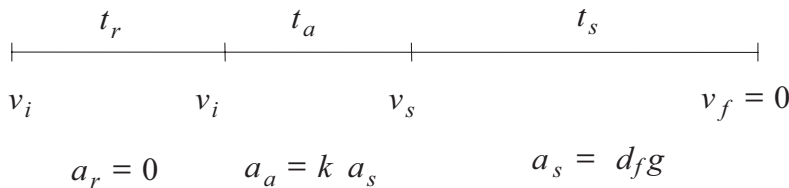
- a) fase di percezione, decisione e reazione, di durata t_r , in cui il veicolo mantiene inalterata la sua velocità iniziale v_i e percorre uno spazio pari a $v_i \cdot t_r$; in tale fase si considera anche il tempo di azionamento dell'impianto frenante;
- b) fase transitoria in cui la decelerazione cresce fino al raggiungimento della forza frenante stabilizzata, in cui si può considerare che il veicolo rallenti con una accelerazione pari a $a_a = k \cdot a_s$ (con a_s negativa, dato che si tratta di una frenata); il tempo di questa fase è t_a , e si raggiunge una velocità $v_s = v_i + a_a \cdot t_a$. Il veicolo in questa fase percorre uno spazio calcolabile dalla (3.3) pari a:

$$x_a = v_i \cdot t_a + \frac{1}{2} a_a \cdot t_a^2$$

- c) fase di frenata stabilizzata, in cui il veicolo, a partire dalla velocità v_s si arresta con accelerazione $a_s = -d_f g$. La distanza percorsa è, dalla (3.10), pari a:

$$x_s = \frac{v_s^2}{2d_f g}, \text{ e il tempo corrispondente è: } t_s = \frac{v_s}{d_f g}$$

Figura 3.3 – Schema delle tre fasi durante una frenata di emergenza.



La distanza totale percorsa durante la manovra di frenata di emergenza, a partire da una velocità di marcia iniziale v_i , sarà quindi:

$$(3.13) \quad x = v_i t_r + \left(v_i t_a - \frac{k d_f g t_a^2}{2} \right) + \frac{(v_i - k d_f g t_a)^2}{2 d_f g}$$

il tempo corrispondente per arrestarsi è:

$$(3.14) \quad t = t_r + t_a (1 - k) + \frac{v_i}{d_f g}$$

Viceversa, data la distanza tra un ostacolo o un pericolo (ad esempio la presenza di un pedone) ed il veicolo al momento della percezione dello stesso da parte del conducente, si può calcolare la velocità limite al di sotto

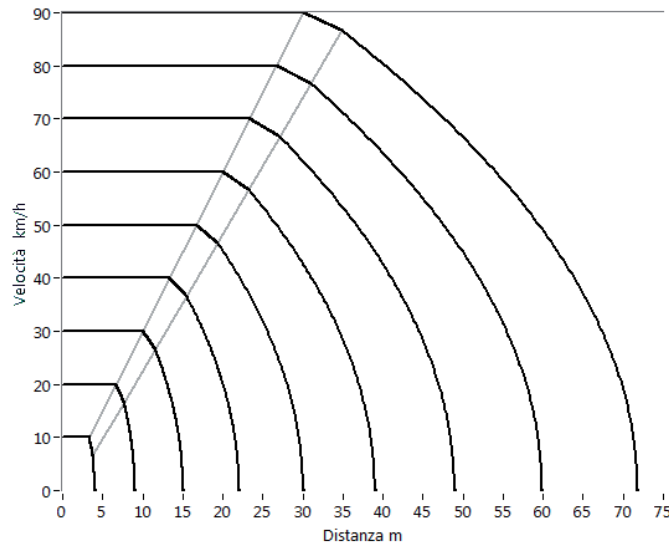
della quale il guidatore può arrestare il veicolo evitando il sinistro. Questa velocità, detta velocità di sicurezza, si ottiene invertendo l'espressione quadratica (3.13):

$$v_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$(3.15) \quad \text{con } A = \frac{1}{2d_f g}; \quad B = t_a(1-k) + t_r; \quad C = \frac{kd_f g t_a^2}{2}(k-1) - x$$

Nella Figura 3.4 sono riportate le curve dell'andamento della velocità in funzione dello spazio percorso dal veicolo durante una frenata di emergenza, con i seguenti parametri: $d_f = 0,8$; $k = 0,6$; $t_r = 1,2$; $t_a = 0,2$. Le linee in grigio indicano la demarcazione tra le tre fasi: reazione, transitorio della forza frenante e frenata stabilizzata. La Figura 3.5 mostra le stesse curve ma trascurando la fase di transitorio della forza frenante, ovvero ponendo $t_a = 0$. Come si può osservare, per una data velocità, le differenze di spazio percorso sono contenute in alcuni metri.

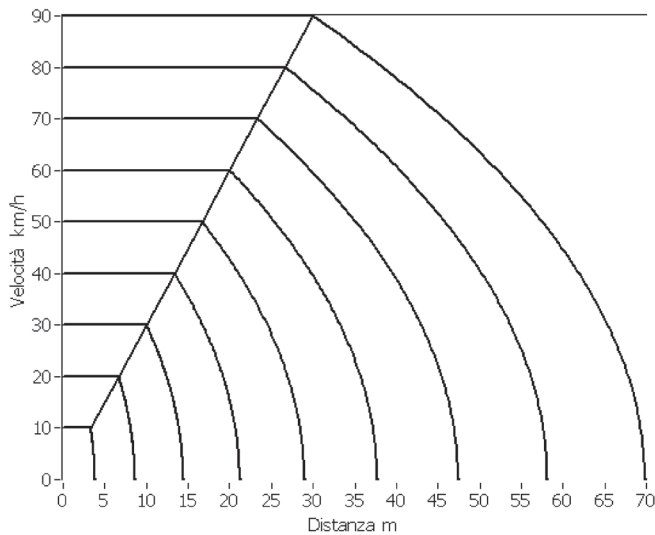
Figura 3.4 – Curve velocità – distanza durante la manovra di frenata di emergenza calcolate per $d_f = 0,8$; $k = 0,6$; $t_r = 1,2$; $t_a = 0,2$.



Esempio 2

Il conducente di un veicolo, in uscita da una curva a visuale non libera, si trova un ostacolo a distanza di 30 m. Calcolare la velocità di sicurezza per riuscire ad arrestare il veicolo con una frenata di emergenza senza urtare l'ostacolo.

Figura 3.5 – Curve velocità-distanza durante la manovra di frenata di emergenza calcolate per $d_f = 0,8$; $k = 0,6$; $t_r = 1,2$; $t_a = 0$, cioè senza fase transitoria di decelerazione.



Si assume: $d_f = 0,8$; $k = 0,6$; $t_r = 1,2$; $t_a = 0,2$; dalla (3.15) si ottiene: $v_i = 50$ km/h, come anche desumibile dalle curve di Figura 3.4. Alla velocità calcolata corrisponde un tempo di arresto, dalla (3.14), di: $t = 3,3$ s. Se si trascura il tempo della fase transitoria della forza frenante si ottiene una velocità di 51,2 km/h.

Altrimenti si può tenere conto dell'effetto della fase transitoria della forza frenante aumentando di una certa percentuale, solitamente attorno al 10%, lo spazio percorso in frenata, sia a ruote bloccate che con ABS. Con tale assunzione, le (3.13), (3.14), e (3.15) si semplificano nelle:

$$(3.16) \quad x = v_i t_r + \frac{v_i^2}{2d_f g}$$

$$(3.17) \quad t = t_r + \frac{v_i}{d_f g}$$

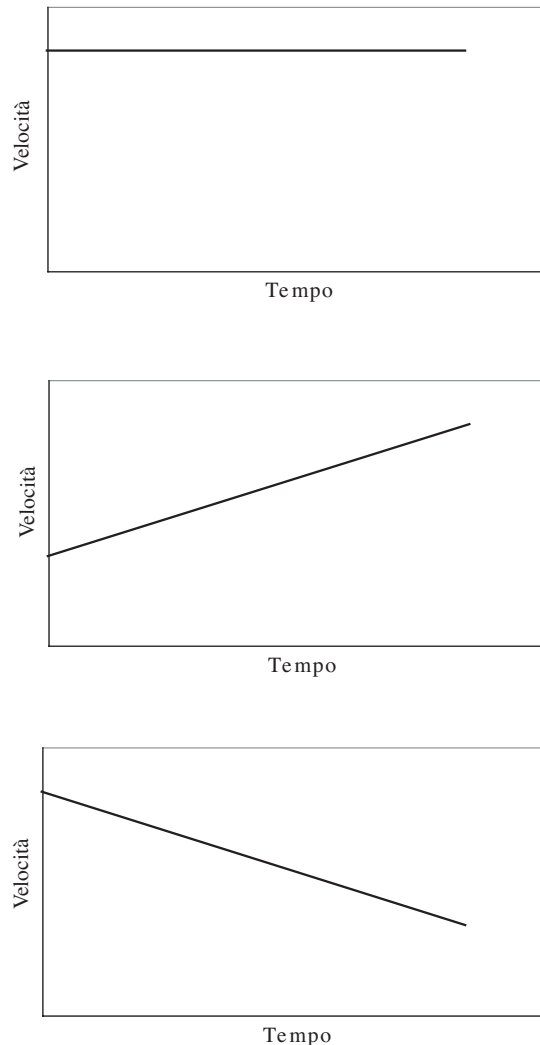
$$(3.18) \quad v_i = \sqrt{(d_f g t_r)^2 + s d_f g x} - a t_r$$

3.1.3 Diagrammi velocità-tempo e distanza di sicurezza fra due veicoli

Molti problemi dell'infortunistica stradale possono essere risolti in modo semplice ed intuitivo utilizzando i diagrammi velocità – tempo, che rappresentano graficamente l'andamento della velocità di un dato veicolo nel tempo. In Figura 3.6 sono mostrati qualitativamente i diagrammi velocità

– tempo relativamente alle schematizzazioni del moto del veicolo più frequentemente utilizzate nella ricostruzione degli incidenti stradali: moto uniforme e moto uniformemente accelerato o decelerato. Ovviamente il moto rappresentato può essere una combinazione di questi moti elementari.

Figura 3.6 – Diagrammi velocità-tempo nel caso di: a) moto uniforme; b) moto uniformemente accelerato; c) moto uniformemente decelerato.



Poiché lo spazio si ricava integrando l'espressione della velocità, come indicato dalla (3.3), l'area sottesa dalla curva velocità-tempo rappresenta la distanza percorsa dal veicolo nel tempo considerato. Conseguentemente, il calcolo della distanza, del tempo e della velocità può essere ricondotto al

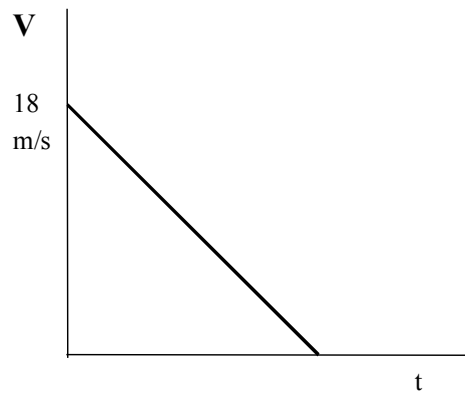
calcolo dell'area di rettangoli, triangoli o trapezi sottesi dalle curve velocità – tempo dei veicoli.

Esempio 3

Due veicoli viaggiano nella medesima direzione a 65 km/h (18 m/s) e ad una distanza di 10 m l'uno dall'altro. L'auto davanti (A) improvvisamente frena. Calcolare il tempo di reazione minimo del conducente dell'auto che segue (B) affinché, supponendo la medesima decelerazione dei veicoli, non avvenga il tamponamento.

Il veicolo A inizia a frenare al tempo $t = 0$ e la sua velocità, considerando la decelerazione costante, decresce in modo lineare nel tempo come mostrato in Figura 3.7. L'area sotto questa curva rappresenta la distanza di arresto del veicolo A.

Figura 3.7 – Curva velocità-tempo per il veicolo A.



Al tempo $t = 0$, il veicolo B, che segue, continua la sua marcia a velocità costante per un tempo pari al tempo di reazione psicotecnico t_r , che deve essere calcolato. Solo dopo tale tempo il guidatore del veicolo B comincia a frenare. Poiché la decelerazione è pari a quella del veicolo A, la curva velocità–tempo durante la frenata del veicolo B avrà la stessa pendenza della curva relativa al veicolo A (vedi Figura 3.8). L'area sottesa dalla curva del veicolo B è un trapezio, in cui la parte rettangolare rappresenta la distanza percorsa durante la fase di velocità costante e la parte triangolare la distanza percorsa durante la frenata.

Il moto dei due veicoli può essere rappresentato in un unico diagramma, come mostrato in Figura 3.9. La distanza percorsa dal veicolo B risulta maggiore di quella percorsa dal veicolo A e la differenza di percorso è rappresentata dall'area trapezoidale tratteggiata nella figura. Per evitare il tamponamento tale distanza deve essere non superiore ai 10 m iniziali che separavano i due veicoli.

Quindi deve essere: $x = v \cdot t_r$, da cui:

Figura 3.8 – Curva velocità-tempo per il veicolo B

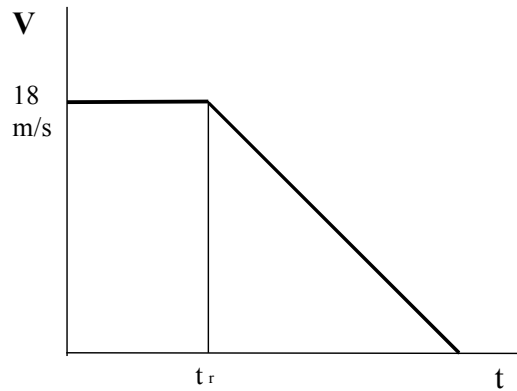
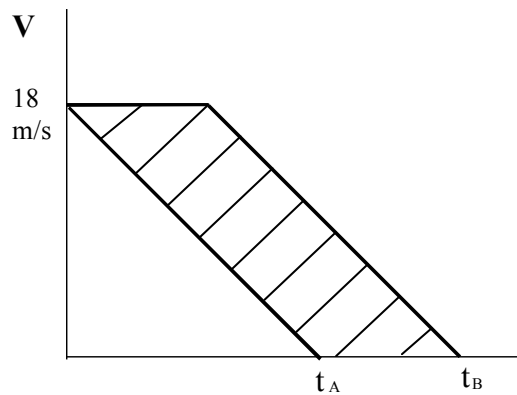


Figura 3.9 – Diagramma velocità-tempo dei due veicoli. L'area tratteggiata rappresenta la distanza iniziale tra i due veicoli.



$$t_r = \frac{10}{18} = 0,55s$$

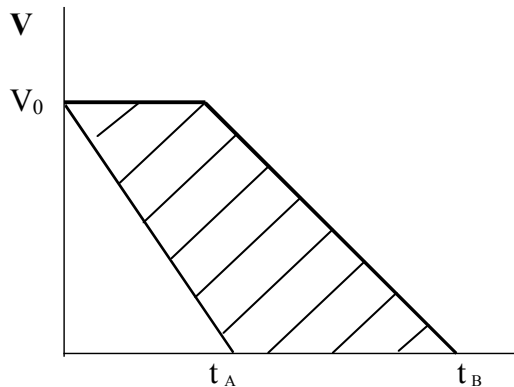
Tale tempo di reazione risulta molto ridotto, quindi, in condizioni normali, il guidatore del veicolo B non riuscirà ad evitare il tamponamento.

Esempio 4

Un autobus (B) si trova ad una distanza di 6m da un'auto (A) che frena improvvisamente con decelerazione pari a 0,8g; l'autista dell'autobus frenando a sua volta, con decelerazione 0,5g, riesce ad evitare di poco la collisione ma, a causa della brusca frenata, un passeggero cade dal sedile e l'autista viene accusato di aver tenuto una velocità troppo elevata per le condizioni di traffico e di non aver reagito nei tempi richiesti. L'autista dichiara che la velocità dell'autobus era fra gli 8 e i 16 km/h al momento della frenata. Si richiede di stabilire o meno la responsabilità dell'autista.

Il diagramma delle velocità dei due mezzi, riportato in Figura 3.10 è analogo a quello visto nell'esempio precedente, salvo che ora la pendenza delle curve nella fase di frenata è diversa poiché i due veicoli frenano con un diverso coefficiente di decelerazione. L'area tratteggiata rappresenta la distanza iniziale tra i due veicoli, pari a 6 m.

Figura 3.10 – Diagramma velocità-tempo dei due veicoli. L'area tratteggiata rappresenta la distanza iniziale tra i due veicoli.



Questa area è data dalla differenza dell'area trapezoidale relativa all'autobus e dell'area triangolare relativa all'autoveicolo, ovvero, tradotto in formule:

$$\left(v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a_B} \right) - \frac{v_0^2}{2a_A} = 6 \text{ m}$$

che può essere risolta nel tempo di reazione:

$$t_r = \frac{6}{v_0} + \frac{v_0}{2a_A} - \frac{v_0}{2a_B}$$

La velocità iniziale dei veicoli è incognita, ma si può assumere, come tentativo, un valore pari a quello massimo dichiarato dal conducente dell'autobus, 16 km/h. Sostituendo nella espressione sopra, si ricava: $t_r = 1,02$ s. Tale valore risulta plausibile come tempo di reazione e dimostra che l'autista ha reagito prontamente. Poiché il passeggero sosteneva che l'autista stava procedendo a velocità elevata, si può calcolare il tempo di reazione assumendo un valore più elevato della velocità, ad esempio il doppio, 32 km/h. Con tale valore si ottiene un tempo di reazione pari a: $t_r = 0,10$ s, che risulta troppo breve affinché l'autista potesse frenare ed evitare il tamponamento. Si deve concludere, quindi, che la velocità dell'autobus non poteva essere molto più alta di quanto sostenuto dall'autista, altrimenti quest'ultimo avrebbe dovuto reagire in tempi troppo brevi e quindi non realistici.

3.1.4 Calcolo della velocità dalle tracce di frenata

Le tracce di frenata, sia nel caso di ruote bloccate sia nel caso di frenata con ABS, in cui le tracce sono meno evidenti, forniscono un utile elemento per il calcolo della velocità persa dal veicolo in tale fase, attraverso le formule riportate nel paragrafo 3.1.1. La difficoltà principale nell'applicazione delle formule risiede nella determinazione dell'appropriato valore del coefficiente di decelerazione d_f e nella determinazione della distanza di frenata x . La determinazione di questi parametri dipende da più elementi. La decelerazione dipende dalla aderenza impegnata su ciascuna ruota, ovvero dalla forza frenante sviluppata su ciascun punto di contatto tra veicolo e terreno; dipende quindi anche dallo scorrimento raggiunto su ciascun pneumatico e dal fatto se tutte e quattro le ruote sono bloccate o meno. Nel seguito vengono analizzati i casi di bloccaggio totale o parziale delle ruote (senza ABS).

Bloccaggio simultaneo di tutte e 4 le ruote

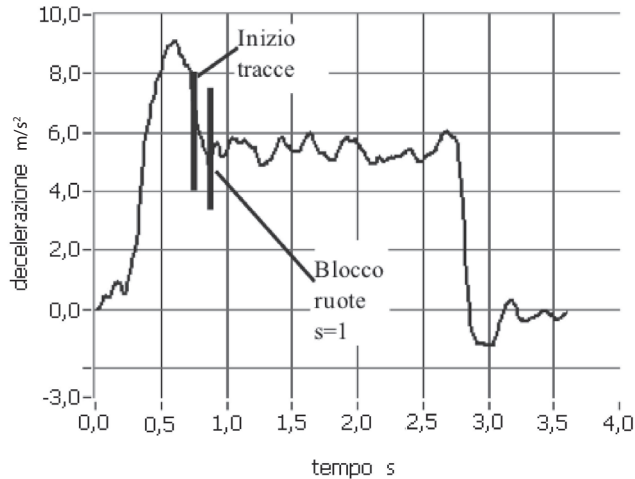
Quando, durante una frenata, tutte e quattro le ruote si bloccano simultaneamente, si ottiene la minima distanza di arresto del veicolo. Le 4 tracce lasciate sul terreno dal veicolo risultano circa tutte uguali in lunghezza. La decelerazione è pari al coefficiente di aderenza longitudinale f tra pneumatici e terreno moltiplicato per l'accelerazione di gravità, ed è la massima ottenibile dal veicolo in quelle determinate condizioni di aderenza. Il valore del coefficiente di decelerazione d_f coincide dunque con quello del coefficiente di aderenza longitudinale f .

La lunghezza delle tracce non coincide generalmente con la lunghezza del tratto in cui si ha la frenata stabilizzata, ovvero in cui la decelerazione raggiunge valori elevati e circa costanti. Da prove sperimentali su autoveicoli, infatti, si evidenzia come l'inizio della marcatura sul terreno da parte degli pneumatici, è leggermente ritardata rispetto al raggiungimento del valore massimo di decelerazione, come mostrato in Figura 3.11. Nella figura, dopo circa 0,2 s dall'inizio dell'applicazione del freno col pedale si raggiunge la massima decelerazione¹ e poco dopo si ha l'inizio della marcatura sul terreno delle tracce. La marcatura inizia un po' prima del bloccaggio delle ruote, cioè quando lo scorrimento non è ancora unitario.

In queste condizioni, al fine del calcolo della velocità del veicolo ad inizio manovra di frenata, si può utilizzare la (3.6), in cui la distanza percorsa in frenata si pone pari alla lunghezza delle tracce moltiplicata per un fattore, tipicamente pari a 1,1, come detto nel paragrafo 3.1.2. Questo fattore tiene conto del fatto che il veicolo ha cominciato a rallentare prima del-

¹ Tale ritardo nel raggiungere la massima decelerazione è in realtà funzione, oltre che della rapidità con cui si applica la forza al pedale del freno, anche della velocità iniziale del veicolo. 0,2 s rappresenta un valore medio.

Figura 3.11 – Andamento della decelerazione durante una frenata di emergenza.



l'effettiva marcatura delle tracce a terra, dapprima con una decelerazione crescente linearmente da zero ad un valore massimo e poi per un tratto stabilizzato in cui lo scorrimento ancora non ha raggiunto il valore unitario. Per i veicoli pesanti spesso la marcatura delle tracce avviene subito prima del raggiungimento del valore massimo della decelerazione.

In caso di veicolo equipaggiato con ABS e di raggiungimento delle condizioni di azionamento di tale dispositivo contemporaneamente sulle 4 ruote, si ha ugualmente la massima decelerazione possibile, pari all'incirca al valore massimo del coefficiente di aderenza, che si verifica per valori di scorrimento del 10-30 %, moltiplicato per l'accelerazione di gravità; in questo caso, tuttavia, risultano meno evidenti e più labili le tracce lasciate sul terreno e non sempre è possibile misurarne correttamente la lunghezza.

Bloccaggio di un solo asse

Il bloccaggio di un solo asse generalmente avviene, in assenza di difetti dell'impianto frenante, quando il guidatore applica una forza circa costante dopo il bloccaggio del primo asse. Infatti, anche se l'impianto frenante è regolato in modo ottimale per bloccare tutti e due gli assi in determinate condizioni di carico del veicolo, in altre condizioni si può verificare il bloccaggio prematuro di un asse; se la forza sul pedale non viene quindi aumentata, non si raggiunge il bloccaggio dell'altro asse. Ciò è quello che generalmente avviene a dei guidatori non particolarmente esperti, i quali, dopo aver sentito lo stridore delle ruote bloccate che strisciano sul terreno, non continuano a spingere ulteriormente sul pedale del freno.

Il livello di decelerazione raggiunta con il bloccaggio di un solo asse è generalmente diverso da quello raggiunto col bloccaggio di tutte le ruote. Se non viene effettuata una analisi del sistema frenante per verificare a

che livello di decelerazione si blocca il primo asse (vedi paragrafo 3.1.8), si possono assumere i seguenti valori per la decelerazione, validi per veicolo senza ABS:

- autoveicolo con poco carico: $d_f = 0,8f \div 0,9f$
- autoveicolo a pieno carico: $d_f = 0,7f \div 0,8f$
- furgone con poco carico: $d_f = 0,7f \div 0,8f$
- furgone a pieno carico: $d_f = 0,8f \div 0,9f$

Ad esempio, se un furgone a pieno carico marcia su un tratto di strada su cui si ha un coefficiente di aderenza longitudinale $f = 0,7$, la decelerazione minima corrispondente ad una frenata con le sole ruote anteriori risulta compresa tra $(0,8 \times 0,7)g$ e $(0,9 \times 0,7)g$, cioè tra $0,56g$ e $0,63g$.

Anche in questo caso si può maggiorare la lunghezza delle tracce del fattore 1,1 per tenere conto della parte di decelerazione precedente la marcatura delle tracce sul terreno, oppure considerare la fase transitoria di decelerazione come visto nel paragrafo 3.1.2.

Quando si ha il bloccaggio di una sola ruota di un asse, si possono utilizzare i medesimi fattori correttivi sopra riportati, poiché si può supporre che la ruota non bloccata del medesimo asse sviluppi una forza frenante approssimativamente pari a quella della ruota bloccata (in assenza di mal funzionamenti dell'impianto frenante).

In caso di tracce di frenata lasciate da un solo asse a seguito dell'applicazione del freno di stazionamento, si può considerare un fattore correttivo pari a $0,35 \div 0,6$, a seconda che il freno sia applicato alle ruote posteriori ($0,35$) o alle ruote anteriori ($0,6$).

Tracce di frenata di lunghezza non uniforme

In generale è difficile trovare tracce di frenata lasciate da un veicolo di uguale lunghezza; infatti spesso il bloccaggio delle ruote non si verifica contemporaneamente su tutte le ruote, sia per una insufficiente pressione sul pedale del freno che per un impianto frenante non perfettamente bilanciato per le condizioni di carico del veicolo o infine per diverse condizioni del manto stradale in corrispondenza delle quattro ruote. Il calcolo della velocità è diverso nel caso di tracce lasciate da tutte quattro le ruote o da un solo asse.

Se la lunghezza delle tracce è approssimativamente la stessa, si può calcolare la velocità iniziale del veicolo considerando la traccia più lunga ed un valore della decelerazione come sopra determinato, a seconda del numero di assi bloccati.

Nel caso in cui vi siano le tracce di tutte e quattro le ruote, con una differenza di lunghezza non trascurabile (dell'ordine di qualche metro) tra quelle anteriori e quelle posteriori, il bilanciamento dell'impianto frenante tra asse anteriore e posteriore non è ottimale per la situazione di carico del veicolo; in questo caso, per il calcolo della velocità iniziale, si considera la lunghezza della traccia più lunga moltiplicata per $0,9$ e un coefficiente di decelerazione pari al coefficiente di aderenza. Poiché per tenere conto

della decelerazione subita dal veicolo prima della marcatura delle tracce si deve ulteriormente moltiplicare, come visto sopra, la lunghezza ottenuta per 1,1, di fatto si ritorna al valore iniziale della lunghezza della traccia.

Se vi sono tracce lasciate solo da un asse, una eventuale differenza di lunghezza delle stesse può essere trascurata e si può considerare la lunghezza maggiore; infatti, come sopra osservato, si presuppone che anche la ruota che ha lasciato la traccia di lunghezza inferiore abbia esercitato una forza frenante complessivamente pari a quella della ruota bloccata.

Ad esempio se un veicolo, senza ABS e in una condizione caratterizzata da un coefficiente di aderenza $f = 0,8$, frena fino ad arrestarsi lasciando le seguenti tracce: anteriore sinistra 20 m, anteriore destra 16, posteriore sinistra 10, posteriore destra 5, allora si può considerare una lunghezza pari a $20 \times 0,9 \times 1,1 \approx 20$ m e una decelerazione minima pari a $0,8g$, ottenendo una velocità iniziale

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot 0,8} \cong 64 \text{ km/h.}$$

Se il veicolo, a pieno carico, avesse lasciato le sole tracce anteriori, si doveva considerare una lunghezza pari a $20 \times 1,1 = 22$ m e una decelerazione minima pari a $0,7 \times 0,8 g = 0,56 g$, ottenendo una velocità iniziale

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 22 \cdot 0,56} \cong 56 \text{ km/h.}$$

Veicoli commerciali

I veicoli pesanti hanno minore aderenza rispetto agli autoveicoli, a causa della diversa miscela utilizzata negli pneumatici, per potere sopportare pressioni di gonfiaggio superiori e ottenere una usura della scolpitura accettabile. Poiché le prestazioni in frenata dei veicoli dipendono in ultima analisi dai valori del coefficiente di aderenza, i veicoli pesanti, anche in condizioni ottimali di frenata, in cui si sfrutta al 100% l'aderenza disponibile, hanno prestazioni inferiori agli autoveicoli.

Si deve considerare, inoltre, che, poiché i veicoli commerciali hanno un grande intervallo di variazione del carico gravante su ogni asse, è generalmente difficile ottenere condizioni di ripartizione ottimali della forza frenante tra i vari assi. Ciò porta generalmente ad un utilizzo parziale della aderenza disponibile, in assenza di ABS, con prestazioni nella frenata che risultano tipicamente dell'ordine del 70 % di quello raggiunto da un autoveicolo, nel caso di veicolo caricato. Nel caso di un veicolo industriale completamente scarico e senza ABS, il bloccaggio delle ruote posteriori si può verificare su strada asciutta anche per valori di decelerazione di soli $0,25 g$.

L'entità della decelerazione dipende, quindi, fortemente dall'entità del carico del veicolo e della sua ripartizione tra gli assi.

I mezzi moderni, dotati di ABS su tutti gli assi, utilizzano al meglio l'aderenza disponibile e possono raggiungere, in condizioni di asfalto asciutto

con medie proprietà di aderenza, decelerazioni dell'ordine dei 0,65-0,75 g. I valori più alti sono riferiti a mezzi a 2 assi, mentre i valori più bassi sono riferiti a mezzi con più assi. Nelle stesse condizioni, la sola trattoria, con ABS, può raggiungere decelerazioni dell'ordine di 0,85 g.

Viceversa, una trattoria senza ABS generalmente ha una prestazione più scadente rispetto al mezzo con semirimorchio, in quanto l'impianto frenante è proporzionato e bilanciato per carichi elevati e, in mancanza del semirimorchio, le ruote dell'asse posteriore tendono a bloccarsi per bassi valori della decelerazione.

3.1.5 Distribuzione del carico sugli assi

Consideriamo dapprima il caso di un veicolo fermo su strada piana. Si considera nel seguito che il veicolo sia simmetrico rispetto ad un piano longitudinale, così che i carichi sul lato sinistro siano uguali a quelli sul lato destro.

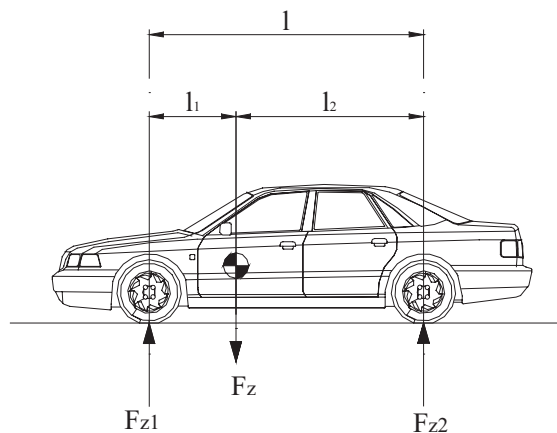
Dall'equilibrio del veicolo, vedi Figura 3.12, le forze normali al suolo risultano:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} F_{z1} &= mg \frac{l_2}{l} \\ F_{z2} &= mg \frac{l_1}{l} \end{aligned}$$

La distanza del baricentro del veicolo dall'avantreno risulta:

$$(3.20) \quad l_1 = F_{z2} \frac{l}{mg}$$

Figura 3.12 – Forze agenti su un veicolo fermo su strada piana.



Tipicamente, in mancanza di dati più precisi, per gli autoveicoli si può assumere che il baricentro si trovi in una posizione longitudinale corrispondente alla leva del cambio o allo specchietto retrovisore interno.

Si indica con ψ il rapporto tra il carico sull'asse posteriore e il peso totale:

$$(3.21) \quad \psi = \frac{F_{z2}}{mg}$$

Il carico relativo sull'asse anteriore risulta:

$$(3.22) \quad 1 - \psi = \frac{F_{z1}}{mg}$$

Generalmente gli autoveicoli attuali, a vuoto, hanno valori di ψ dell'ordine di 0,35, ovvero solo il 35% del carico grava sull'asse posteriore. Un carico così basso è il motivo per cui è necessario un impianto frenante ben bilanciato per evitare il bloccaggio prematuro delle ruote posteriori durante una frenata.

Se il veicolo è in moto e viene frenato, si deve considerare la forza di aderenza tra ruote e terreno e la forza di inerzia (vedi Figura 3.13); facendo l'equilibrio alla rotazione del veicolo, si ottengono le forze sugli assi:

$$(3.23) \quad F_{z1} = \frac{mg}{l} \left[l_2 + \frac{h}{g} a \right]$$

$$F_{z2} = \frac{mg}{l} \left[l_1 - \frac{h}{g} a \right]$$

esprimibili anche come:

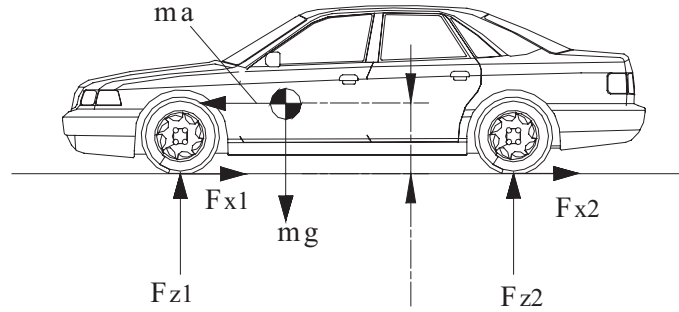
$$(3.24) \quad \begin{aligned} F_{z1} &= \left(1 - \psi + \frac{h}{gl} a\right) mg \\ F_{z2} &= \left(\psi - \frac{h}{gl} a\right) mg \end{aligned}$$

dove a è la decelerazione del veicolo e h l'altezza del baricentro da terra.

Nel caso più generale, per un veicolo che percorre una strada rettilinea con pendenza longitudinale α , considerando anche le forze aerodinamiche e di rotolamento, come schematizzato in Figura 3.14, le equazioni cardinali della dinamica forniscono:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} F_{x1} + F_{x2} + F_{xaer} + mg \sin \alpha &= ma \\ F_{z1} + F_{z2} + F_{zaer} - mg \cos \alpha &= 0 \\ F_{z1}(l_1 + \Delta x_1) - F_{z2}(l_2 - \Delta x_2) + mgh \sin \alpha - M_{aer} + F_{xaer} h &= mah \end{aligned}$$

Figura 3.13 – Forze agenti su un veicolo frenato su strada piana.

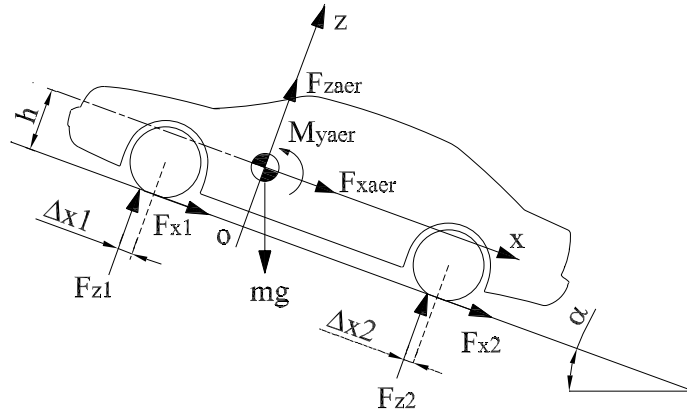


da cui si possono ricavare le espressioni delle forze normali al terreno agenti sugli assi:

$$(3.26) \quad F_{z1} = mg \frac{(l_2 - \Delta x_2) \cos \alpha - h \sin \alpha - K_1 V^2 + ha / g}{l + \Delta x_1 - \Delta x_2}$$

$$F_{z2} = mg \frac{(l_1 + \Delta x_1) \cos \alpha + h \sin \alpha - K_2 V^2 - ha / g}{l + \Delta x_1 - \Delta x_2}$$

Figura 3.14 – Forze agenti sul veicolo in movimento su strada in pendenza.



Dove i parametri:

$$K_1 = \frac{\rho A}{2mg} [C_x h - l C_{My} + (l_2 - \Delta x_2) C_z]$$

$$K_2 = \frac{\rho A}{2mg} [-C_x h + l C_{My} + (l_1 + \Delta x_1) C_z]$$

tengono conto delle forze aerodinamiche.

In pratica, nella ricostruzione degli incidenti stradali, nelle espressioni sopra si possono trascurare le quantità Δ_{x1} e Δ_{x2} , che risultano in generale di pochi millimetri.

Esempio

Determinare la distribuzione delle forze al suolo di una vettura nelle seguenti condizioni:

- ferma su strada piana;
- in moto a 100 km/h su strada piana;
- in moto a 70 km/h su strada in salita con pendenza del 10%;
- in frenata con decelerazione di 7 m/s^2 su strada piana, ad una velocità di 100 km/h;
- determinare inoltre il minimo coefficiente di aderenza necessario per consentire una accelerazione da fermo di 4 m/s^2 in piano, considerando il veicolo con trazione anteriore, senza slittamento delle ruote.

Si considerino le seguenti caratteristiche del veicolo: $m = 1200\text{ kg}$; $l_1 = 1064\text{ mm}$; $l_2 = 1596\text{ mm}$; $h = 570\text{ mm}$; $C_x = 0,36$; $C_z = -0,12$; $C_{My} = -0,05$; $A = 2,06\text{ m}^2$;

La densità dell'aria, al livello del mare con temperatura e pressione standard, si assume pari a $\rho = 1,2257\text{ kg/m}^3$.

- si ha $l = l_1 + l_2 = 1,064 + 1,596 = 2,66\text{ m}$. Applicando la (3.19) si ottiene immediatamente:

$$F_{z1} = 7063\text{ N}$$

$$F_{z2} = 4709\text{ N}.$$

Si ottiene un valore di ψ di 0,4 ovvero solo il 40 % del carico grava sull'asse posteriore.

- trascurando le forze di rotolamento, e quindi le quantità Δ_{x1} e Δ_{x2} , si ha:

$$K_1 = 0,000107 * (0,205 + 0,133 - 0,192) = 1,57\text{ E-}05$$

$$K_2 = 0,000107 * (-0,205 - 0,133 - 0,129) = -4,99\text{ E-}05$$

$$V = 100\text{ km/h} = 27,78\text{ m/s}$$

E quindi dalle (3.26) si ottiene:

$$F_{z1} = 7009\text{ N}$$

$$F_{z2} = 4879\text{ N}$$

Dal confronto con il caso a), si nota che le azioni aerodinamiche influiscono sul carico verticale totale per circa 120 N e che l'effetto è stato

quello di caricare maggiormente l'asse posteriore (di circa 170 N) e scaricare l'asse anteriore (di circa 50 N). Tali quantità risultano generalmente trascurabili nel caso di ricostruzione di un incidente stradale.

- c) La pendenza del 10% corrisponde ad un angolo di inclinazione $\alpha = 5,7^\circ$; la velocità è: $V = 70 \text{ km/h} = 19,44 \text{ m/s}$. Trascurando anche in questo caso le forze di rotolamento, per K_1 e K_2 si ottengono gli stessi valori del caso b) e applicando le (3.26) si ottiene:

$$F_{z1} = 6751 \text{ N}$$

$$F_{z2} = 5020 \text{ N}$$

- d) Trascurando anche in questo caso le forze di rotolamento, per K_1 e K_2 si ottengono gli stessi valori del caso b) e applicando le (3.26) si ottiene:

$$F_{z1} = 8809 \text{ N}$$

$$F_{z2} = 3079 \text{ N}$$

Si osserva che il carico totale verticale è ancor uguale a quello calcolata nel caso b) ma a causa della frenata, l'asse anteriore viene caricato di 1800 N e quello posteriore scaricato della stessa quantità.

Trascurando gli effetti aerodinamici, si potevano utilizzare direttamente le (3.24) ed ottenere:

$$F_{z1} = 8863 \text{ N}$$

$$F_{z2} = 2908 \text{ N}$$

- e) Partendo da fermo, si possono trascurare le forze aerodinamiche e di rotolamento. Dalle (3.24) si ha:

$$F_{z1} = 6034 \text{ N}$$

$$F_{z2} = 5737 \text{ N}$$

Dato che tutta la trazione si ha sulle ruote anteriori, deve risultare: F_{z1}

$f \geq ma$, da cui:

$$f \geq ma / F_{z1} = 1200 \cdot 4 / 6034 = 0,79.$$

Per valori inferiori del coefficiente di aderenza si ha lo slittamento delle ruote anteriori.

Questo ultimo calcolo può essere utile quando si vuole valutare un valore di accelerazione nella partenza da fermo, in presenza o meno di tracce di slittamento delle ruote traenti.

3.1.6 Frenatura ideale

La massima decelerazione del veicolo, trascurando le forze aerodinamiche e di rotolamento, su strada con pendenza α , si ottiene quando su ogni ruota

si raggiungono le condizioni limite di aderenza, ovvero quando si utilizza tutta l'aderenza disponibile. In queste condizioni si ha:

$$(3.27) \quad a_{\max} = \frac{1}{m} \sum_i F_{zi} f_i + g \sin \alpha$$

dove f_i rappresenta il coefficiente di aderenza per la ruota i -esima. Se si considerano uguali i coefficienti di aderenza per l'asse anteriore e quello posteriore, la massima accelerazione ottenibile è pari a:

$$(3.28) \quad a_{\max} = fg \cos \alpha + g \sin \alpha$$

che, nel caso di strada piana, si riduce alla:

$$(3.29) \quad a_{\max} = gf$$

Se l'aderenza si mantiene costante durante la frenatura (oppure se si considera un valore medio durante la fase di frenata), si possono applicare le equazioni del moto uniformemente decelerato, viste nel paragrafo 3.1.1.

Per ottenere una frenatura ideale su un terreno con pendenza α , sugli assi anteriore e posteriore (3.2.6) si deve esercitare una forza perpendicolare al suolo pari a:

$$(3.30) \quad F_{z1} = \frac{m}{l} [gl_2 \cos \alpha - gh \sin \alpha + ha_{\max}]$$

$$F_{z2} = \frac{m}{l} [gl_1 \cos \alpha + gh \sin \alpha - ha_{\max}]$$

Le corrispondenti forze di frenata parallele al suolo si ottengono moltiplicando le forze normali per il coefficiente di aderenza:

$$(3.31) \quad F_{x1} = f_1 F_{z1} = f_1 \frac{m}{l} [gl_2 \cos \alpha - gh \sin \alpha + ha_{\max}]$$

$$F_{x2} = f_2 F_{z2} = f_2 \frac{m}{l} [gl_1 \cos \alpha + gh \sin \alpha - ha_{\max}]$$

Considerando uguali i coefficienti di aderenza per l'avantreno ed il retrotreno, $f_1 = f_2$ e tenendo conto della (3.28), si ha:

$$(3.32) \quad F_{x1} = f \frac{mg}{l} \cos \alpha [l_2 + hf]$$

$$F_{x2} = f \frac{mg}{l} \cos \alpha [l_1 - hf]$$

Eliminando il parametro f nelle (3.32), si ottiene:

$$(3.33) \quad (F_{x1} + F_{x2})^2 - \frac{mg}{h} \cos \alpha (F_{x1} l_1 - F_{x2} l_2) = 0$$

che rappresenta l'equazione di una parabola sul piano $F_{x1} - F_{x2}$.

La parabola rappresenta il luogo dei punti in cui F_{x1} e F_{x2} producono una frenata ideale, ovvero una decelerazione ottimale, nell'ipotesi in cui $f_1 = f_2$.

Sempre nel piano $F_{x1} - F_{x2}$, si possono tracciare le curve a f_1 , a f_2 e ad accelerazione costante. Per le curve a f_1 costante, si può sostituire la (3.27) nella prima delle (3.31) e ricavare:

$$(3.34) \quad F_{x1} = F_{x2} \frac{f_1 h}{l - h f_1} + \frac{f_1 m g l_2}{l - h f_1} \cos \alpha$$

che, al variare del parametro f_1 , rappresenta un fascio di rette passanti per il punto ($F_{x1} = 0$; $F_{x2} = (m g l_2 / h) \cos \alpha$); analogamente, sostituendo la (3.27) nella seconda delle (3.31) si ottiene:

$$(3.35) \quad F_{x2} = -F_{x1} \frac{f_2 h}{l + h f_2} + \frac{f_2 m g l_1}{l + h f_2} \cos \alpha$$

che, al variare del parametro f_2 , rappresenta un fascio di rette passanti per il punto ($F_{x1} = (m g l_1 / h) \cos \alpha$; $F_{x2} = 0$);

Le rette ad accelerazione costante sono date dalla (3.27):

$$(3.36) \quad F_{x1} = -F_{x2} + m(a - g \sin \alpha)$$

che rappresentano rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

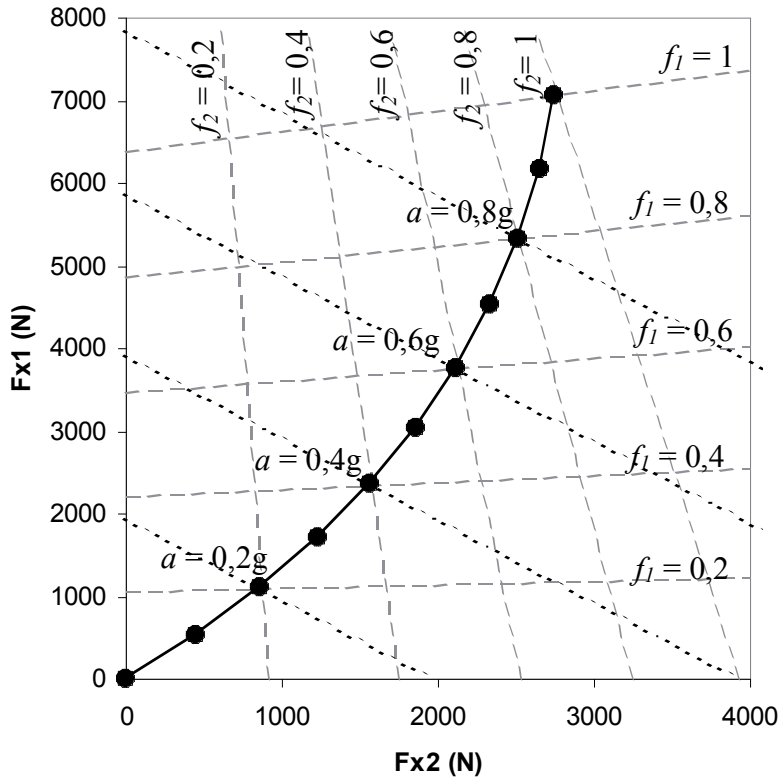
In Figura 3.15 è rappresentata la curva di frenatura ideale per valori $m = 1000$ kg, $\alpha = 0$, $l_1 = 1,2$ m; $l_2 = 1,3$ m e $h = 0,5$ m, assieme alle curve a f_1 , a f_2 e ad accelerazione costante. Le forze riportate sugli assi sono quelle relative agli assali posteriore e anteriore e non alle singole ruote, per le quali le forze sono pari alla metà.

Si osserva che se il raggio delle ruote è lo stesso tra asse anteriore e posteriore, come in generale succede, il diagramma sopra tracciato rappresenta anche, a meno di un fattore di scala dato dal valore del raggio sotto carico della ruota, il diagramma della coppia frenante sulle ruote C_f .

Il diagramma si modifica a seconda del carico sul veicolo, dato che cambia, oltre alla massa complessiva, la posizione del baricentro. Tali variazioni sono più sensibili per i mezzi industriali, in cui si hanno più ampie condizioni di carico.

Dal diagramma di Figura 3.15, si ricava, ad esempio, che la retta a $f_1 = 0,6$ interseca l'asse della forza sull'asse anteriore F_{x1} ad un valore di circa 3500 N, corrispondente ad una decelerazione inferiore a $0,4g$.

Figura 3.15 – Curva di frenatura ideale per $m = 1000$ kg, $a = 0$, $\alpha = 0$, $l_1 = 1,2$ m; $l_2 = 1,3$ m e $h = 0,5$ m. Sono tracciate anche le rette a f_1 costante, a f_2 costante e ad accelerazione costante.



Cioè, frenando su un asfalto con coefficiente di aderenza di 0,6 con le sole ruote anteriori, ad esempio per un guasto ai freni posteriori, si ha il bloccaggio delle ruote anteriori per un valore della decelerazione del veicolo di 0,4g.

Viceversa, sul medesimo asfalto, se si guastassero i freni anteriori, il veicolo con i soli freni posteriori raggiungerebbe una decelerazione di soli 0,24g, con un valore della forza frenante di circa 2500 N, individuata dall'intersezione della retta a $f_2=0,6$ con l'asse della forza posteriore F_{x2} .

Osservando la curva della frenatura ideale, si osserva, inoltre, che all'aumentare della decelerazione del veicolo, aumenta maggiormente la forza sull'asse anteriore rispetto a quella sull'asse posteriore, al fine di evitare il bloccaggio delle ruote posteriori dovuto al trasferimento di carico sull'avantreno.

3.1.7 Frenatura reale

La condizione di frenatura ideale implica che tutte le ruote raggiungano la condizione di bloccaggio contemporaneamente. Ciò si verifica general-

mente solo per una data condizione di carico e di decelerazione, per un dato veicolo. Ciò perché la regolazione della coppia frenante sulle ruote è determinata dai parametri dell'impianto frenante; si indica come fattore di ripartizione della frenata $K = C_{f1}/C_{f2} = F_{x1}/F_{x2}$ il rapporto tra le coppie frenanti, o tra le forze frenanti, sull'avantreno rispetto a quelle sul retrotreno. Sul diagramma F_{x1} e F_{x2} la caratteristica dell'impianto frenante, che determina le condizioni di frenatura reale, è rappresentabile da una retta passante per l'origine, con coefficiente angolare K ; l'intersezione di tale retta con la parabola di frenatura ideale determina le condizioni in cui l'impianto funziona in condizioni ideali.

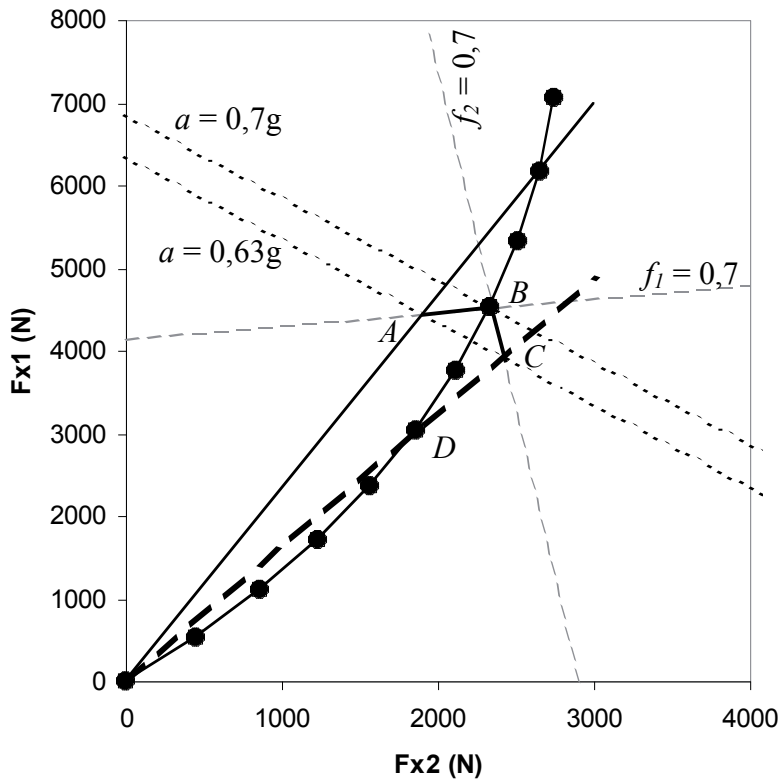
Per ogni valore della decelerazione, si può determinare il valore di K necessario ad ottenere una frenata in condizioni ideali.

Consideriamo, ad esempio, il diagramma di frenatura indicato in Figura 3.16, in cui sono riportate due caratteristiche dell'impianto frenante contraddistinte da valori $K = 2,33$ e $K = 1,63$.

Ipotizziamo che il veicolo freni su una strada con coefficiente di aderenza ruote-terreno $f_1 = f_2 = 0,7$. All'aumentare della forza esercitata sul pedale del freno, le forze frenanti degli assi anteriore e posteriore, per il veicolo con $K = 2,33$, aumentano seguendo la linea continua fino al punto A. Nel punto A sull'avantreno si raggiunge la condizione di $f_1 = 0,7$ e quindi si ha il bloccaggio delle ruote anteriori, ad un valore della decelerazione del veicolo di circa 0,63g. Continuando ad incrementare la pressione sul pedale del freno, la forza di aderenza sull'avantreno non può più aumentare, avendo raggiunto il limite dell'aderenza disponibile e le forze seguono la retta di coefficiente di aderenza costante lungo il tratto A-B. Al punto B anche sull'asse posteriore si raggiungono le condizioni di bloccaggio delle ruote e si ha il bloccaggio di tutte e 4 le ruote del veicolo, con una decelerazione di 0,7g. Questa sequenza di bloccaggio delle ruote ha una positiva influenza sul comportamento direzionale del veicolo, e viene considerata stabile: il veicolo non ha la tendenza a ruotare su se stesso a causa di un prematuro bloccaggio delle ruote posteriori.

Viceversa, analizzando il comportamento del veicolo con un fattore di ripartizione della frenata $K = 1,63$ (linea tratteggiata in Figura 3.16), si osserva che all'aumentare della pressione sul pedale del freno le forze sugli assi percorrono la curva tratteggiata fino al punto C, in cui sul retrotreno si raggiunge $f_2 = 0,7$ e si ha quindi il bloccaggio delle ruote posteriori, per un valore della decelerazione prossimo a 0,63g. A questo punto la forza sul retrotreno non può più aumentare avendo raggiunto l'aderenza disponibile e ad un incremento della pressione sul pedale del freno, le forze seguono la curva C-B. Nel punto B si ha il bloccaggio di tutte e 4 le ruote. Tale sequenza, poiché si sono bloccate per prime le ruote posteriori, favorisce la perdita di controllo direzionale del veicolo, con rotazione dello stesso attorno ad un asse verticale. Si osserva, in quest'ultima analisi, che il comportamento del veicolo risulta stabile fino all'intersezione della retta tratteggiata con la parabola di frenatura ideale, cioè fino al punto D, a cui corrisponde una decelerazione di circa 0,5g, detta decelerazione critica, che segna il passaggio da condizioni stabili ad instabili.

Figura 3.16 – Frenatura ideale e curve di frenata reale stabile (linea continua) ed instabile (linea tratteggiata), determinate da due fattori di ripartizione della frenata K pari a 2,33 e 1,63 rispettivamente.



Per evitare il bloccaggio del retrotreno e mantenere una decelerazione elevata in tutte le condizioni di aderenza disponibile, sono spesso adottati delle caratteristiche dell'impianto frenante non lineari, tali da seguire il più possibile la curva di frenatura ideale. Il caso più comune è un correttore di frenata, che riduce la pressione agente sui freni posteriori rispetto a quelli anteriori dopo il raggiungimento di una data pressione; la curva che si ottiene è una bilineare, tale da rimanere nella zona stabile del diagramma $F_{x1} - F_{x2}$.

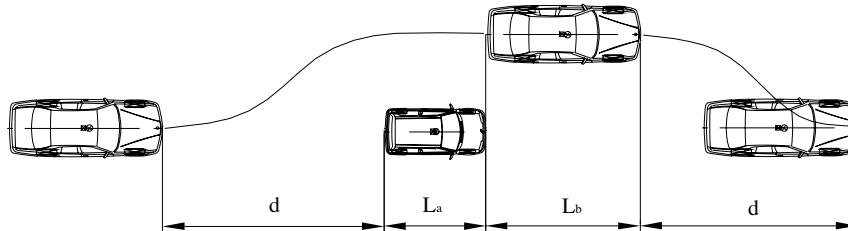
I sistemi ABS invece modulano direttamente la pressione nei cilindretti dei freni di una o più ruote, per evitare uno scorrimento eccessivo sulla ruota; la frenatura avviene così sempre in prossimità di quella ideale.

3.1.8 Il sorpasso

La manovra di sorpasso di un veicolo da parte di un altro veicolo viene generalmente suddivisa, per l'analisi dei tempi e degli spazi necessari a compiere tale manovra, nelle seguenti fasi:

1. *deviazione*, in cui il veicolo si porta alla sinistra del veicolo da sorpassare;
2. *affiancamento*, in cui i due veicoli sono affiancati; il veicolo da sorpassare può essere in movimento o fermo;
3. *rientro*, in cui il veicolo ritorna nella propria corsia di percorrenza antecedente al sorpasso.

Figura 3.17 – Schematizzazione della manovra di sorpasso.



Osservando la Figura 3.17, si ha:

d = distanza di sicurezza

L_a = lunghezza veicolo a da sorpassare;

L_b = lunghezza veicolo b che sorpassa;

S = spazio percorso dal veicolo a , sorpassato, durante il tempo t di durata totale del sorpasso

Risulta:

$$(3.37) \quad D = 2d + L_a + L_b + S$$

Indicando con V_a = velocità veicolo a sorpassato, V_b = velocità veicolo b sorpassante, si ha:

$$(3.38) \quad t = \frac{S}{V_a}$$

ed anche:

$$(3.39) \quad t = \frac{D}{V_b}$$

Uguagliando le (3.38) e (3.39), tenendo conto della (3.37), si ottiene:

$$(3.40) \quad D = (2d + L_a + L_b) \frac{V_b}{V_b - V_a}$$

Se si tiene conto del tempo t_s , necessario a chi sorpassa, per compiere ciascuna delle manovre di sterzata e di percorrenza dei tratti sinuosi d , precedente e seguente al sorpasso, si ha:

$$(3.41) \quad D = (2V_b t_s + L_a + L_b) \frac{V_b}{V_b - V_a}$$

Per t_s si possono assumere i seguenti valori:

- $t_s = 1$ s per i conducenti dei veicoli a due ruote;
- $t_s = 1,50$ per i conducenti di autovetture;
- $t_s = 1,80$ s per i conducenti di altri veicoli
- $t_s = 2$ per i conducenti dei veicoli autocarri.

3.2 Moto in curva

Nel moto di un veicolo in curva possono essere lasciate al suolo tracce che, per le loro caratteristiche ed andamento, permettono di individuare il tipo di moto e di stimare la velocità angolare o velocità circonferenziale iniziale del veicolo. A seconda delle caratteristiche del moto si può distinguere tra un moto di sbandamento controllato dal conducente (*yawing*), oppure con perdita di controllo direzionale (*spinning*); in questo ultimo caso il veicolo spesso ruota su sé stesso attorno ad un asse perpendicolare al suolo. Nel seguito vengono analizzati i due tipi di moto e le modalità per il calcolo delle velocità iniziali del veicolo.

3.2.1 Sbandamento in curva: calcolo della velocità critica

Il veicolo, percorrendo una curva al di sopra di una certa velocità, lascia delle tracce al suolo generate dalle ruote in rotolamento. Un altro caso, in cui vengono lasciate delle tracce, è quando il veicolo sterza bruscamente a velocità sostenuta, ad esempio in caso di una manovra per evitare un altro veicolo o un potenziale pericolo. Le ruote posteriori ed anteriori non percorrono la stessa traiettoria e generalmente le tracce più marcate e visibili vengono lasciate dalle ruote esterne alla curva, in particolare dalla ruota anteriore.

Le tracce possono fornire almeno due informazioni fondamentali: la prima è la traiettoria seguita dal veicolo e quindi il raggio di curvatura della stessa (ai fini della ricostruzione, le tracce vengono considerate come una porzione di arco circolare); la seconda è che l'angolo di deriva delle ruote è stato sufficientemente ampio da essere al limite della aderenza laterale disponibile.

Un punto materiale che si muove con velocità circonferenziale V su una traiettoria circolare di raggio R , è soggetto ad una accelerazione centrifuga V^2/R e richiede una corrispondente forza radiale $F_c = mV^2/R$ per mantenere tale traiettoria. Questa forza è data, nel caso di un veicolo, dalle forze di contatto delle ruote col suolo. Se la velocità del veicolo aumenta oltre un certo limite, aumenta la forza radiale richiesta e, superata l'aderenza disponibile, si verifica uno slittamento delle ruote e la marcatura delle tracce; si

parla in questo caso di sbandamento del veicolo. In questo caso la velocità, detta velocità critica in curva, può essere valutata dal bilancio delle forze:

$$(3.42) \quad V_{cr} = \sqrt{gfR}$$

Questa formula, detta anche formula della velocità critica, è stata ricavata nell'ipotesi di punto materiale, cioè nel caso in cui si possa considerare la massa tutta concentrata in un punto, nell'ipotesi in cui la perdita di aderenza avvenga in modo istantaneo quando la forza centrifuga supera una certa soglia e considerando la velocità del veicolo costante su una traiettoria a curvatura costante. Nel caso reale la perdita di aderenza non è un fenomeno a soglia ma avviene gradualmente all'aumentare dell'angolo di deriva, che è diverso per ciascuna ruota e, considerate le dimensioni del veicolo, si hanno anche effetti di trasferimento del carico dalle ruote interne a quelle esterne alla curva.

Le prove sperimentali, in cui un veicolo percorre una traiettoria circolare a velocità via via crescente, mettono in evidenza che il veicolo non comincia a lasciare delle tracce visibili ad una velocità corrispondente a quella calcolata con la (3.42); il coefficiente di aderenza calcolato con la (3.42), relativo all'intero veicolo, risulta in generale più basso di quello ottenibile dalla prova svolta sul singolo pneumatico al banco; la differenza tra coefficiente di aderenza laterale così ottenuto e quello del pneumatico fornisce una stima di quanto il veicolo sia in grado di utilizzare tutta l'aderenza sviluppabile dai pneumatici. In generale, i veicoli industriali e le autovetture riescono ad utilizzare solo una frazione, del 50-70% della aderenza laterale potenzialmente sviluppabile dai pneumatici.

Tuttavia molti esperimenti hanno mostrato che nel caso in cui il veicolo sterzi improvvisamente, la velocità iniziale del veicolo è sufficientemente approssimata dalla (3.42) e che la stessa, se utilizzata con criterio, cioè con gli opportuni valori del raggio e del coefficiente di aderenza, fornisce risultati accettabili. Quindi, sebbene siano state proposte formule più aderenti al fenomeno fisico, che però risultano di più difficoltosa applicazione in quanto necessitano della conoscenza di più parametri quali ad esempio l'angolo di deriva od altri, la formula della velocità critica viene utilizzata largamente, con errori nella stima della velocità del veicolo compresi generalmente in $\pm 10\%$.

La formula non si applica nel caso di mezzi articolati e veicoli industriali.

Sebbene non vi sia un accordo completo tra i ricercatori sui parametri da utilizzare per l'applicazione della formula, nel seguito si suggeriscono le seguenti regole:

- Per il calcolo del raggio di curvatura si utilizza la traccia lasciata dalla ruota anteriore esterna alla curva; la traccia dovrebbe mostrare segni di striature laterali, indicanti che la stessa sia stata dovuta effettivamente ad un moto in curva, accelerato, decelerato o a velocità costante e non lasciata, ad esempio, in una manovra di partenza da fermo con sterzata. La traccia

lasciata dalla ruota posteriore dovrebbe risultare più esterna alla curva rispetto a quella lasciata dalla ruota anteriore. Le tracce non dovrebbero divergere in modo sensibile lungo il tratto considerato per la misura, altrimenti ciò indica che vi è stata una perdita di controllo del veicolo con conseguente rotazione attorno all'asse verticale dello stesso (spinning); nel caso in cui sia presente una sola traccia, lasciata dalla ruota anteriore, la forza laterale di contatto risulta inferiore alla massima possibile.

- Il tratto di traccia da prendere in considerazione per il calcolo del raggio della traiettoria deve essere quello corrispondente al primo tratto di curva; generalmente un tratto di corda di circa 15 m è sufficiente per una corretta valutazione del raggio; tuttavia, se la freccia risulta inferiore a 0,3 m è opportuno considerare una corda più lunga, al fine di minimizzare gli errori di misura;
- Nella formula della velocità critica si utilizza il coefficiente di aderenza longitudinale corrispondente ad uno scorrimento del 100%.

Si nota che sebbene il fenomeno della marcatura delle tracce in questo caso sia dovuto essenzialmente ad uno scorrimento laterale delle ruote (deriva) e quindi al superamento dell'aderenza laterale disponibile, nella formula della velocità critica si è indicato il valore dell'aderenza longitudinale e come raggio non quello della traiettoria percorsa dal baricentro del veicolo ma dalla ruota anteriore esterna. Ciò rende più semplice l'utilizzo della formula, perché i coefficienti di aderenza longitudinali sono più facilmente disponibili e possono essere determinati sperimentalmente con prove di frenata rettilinea ed anche il raggio di curvatura della traiettoria del baricentro risulta di più difficile determinazione. I risultati ottenuti forniscono comunque errori dello stesso ordine di grandezza rispetto all'utilizzo del coefficiente di aderenza laterale e del raggio della traiettoria percorsa dal baricentro.

Nel caso in cui la strada abbia un certo angolo di sopraelevazione γ , cioè si abbia una pendenza laterale, si deve tenere conto anche della forza di gravità. Il bilancio delle forze orizzontali fornisce (vedi Figura 3.18):

$$(3.43) \quad m \frac{V^2}{R} = fN \cos \gamma + N \sin \gamma$$

mentre il bilancio delle forze verticali:

$$(3.44) \quad N = \frac{mg}{\cos \gamma - f \sin \gamma}$$

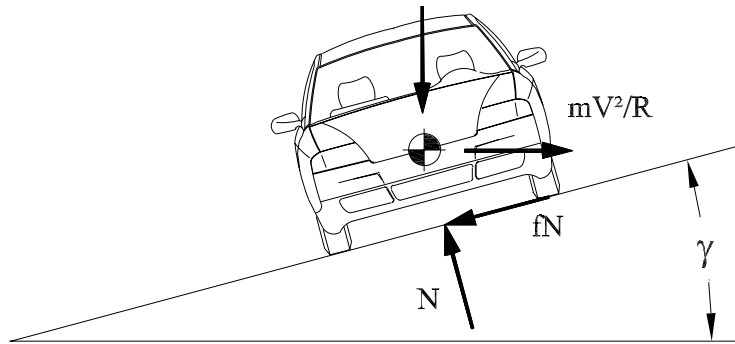
Eliminando N dalle due precedenti equazioni si ottiene l'espressione della velocità critica:

$$(3.45) \quad V_{cr} = \sqrt{gR \frac{f + \tan \gamma}{1 - f \tan \gamma}}$$

Se γ è pari a 0 la (3.45) si riconduce alla (3.42); γ può essere sia positivo che negativo.

La (3.45) rappresenta la velocità massima che un veicolo, non frenato od accelerato, può raggiungere in curva seguendo una traiettoria con un raggio R senza significativi slittamenti e perdita di controllo del veicolo.

Figura 3.18 – vista frontale di un veicolo che percorre una curva con angolo di sopraelevazione γ .



Se l'angolo γ è piccolo, compreso in $\pm 5^\circ$, allora $\sqrt{1+f \tan \gamma} \cong 1$ e la (3.45) si semplifica nella:

$$(3.46) \quad V_{cr} = \sqrt{gRf + \tan \gamma}$$

In Tabella 2 sono riportate le differenze nel calcolo della velocità critica utilizzando le (3.42), (3.45) e (3.46).

Tabella 2 – Confronto tra velocità critiche calcolate con diverse formule.

Sopraelevazione $e = \tan \gamma$	Velocità critica (km/h) per $R = 185 \text{ m}$ $f=0,7$		
	Eq. (3.42)	Eq. (3.45)	Eq. (3.46)
+3 %	128	135	139
-3 %	128	121	117

Se la strada ha una pendenza anche in senso longitudinale, cioè se ha un andamento discendente o ascendente caratterizzato da un angolo θ allora, dal bilancio delle forze e con la semplificazione vista per la (3.46), si ottiene:

$$(3.47) \quad V_{cr} = \sqrt{gRf + \tan \gamma + \tan \theta}$$

3.2.2 Calcolo della velocità critica nel caso di veicolo frenato

Nel caso in cui il veicolo in moto di sbandamento sia frenato, l'aderenza disponibile per generare le forze centripete diminuisce, in quanto una parte viene impegnata per rallentare il veicolo.

In questo caso si può scrivere il bilancio tra forze centrifughe e centripete facendo riferimento alle sole forze laterali esercitate dalle ruote:

$$(3.48) \quad m \frac{V^2}{R} = F_{y1} + F_{y2}$$

Facendo riferimento all'approssimazione del cerchio di aderenza (vedi paragrafo 2.2.5), su ciascun asse le forze laterali e longitudinali massime sono legate dalla relazione:

$$(3.49) \quad \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_z f$$

dove F_z è la forza verticale gravante su ciascun asse, esprimibile, ad esempio per strada piana, attraverso le (3.24). La F_x è la componente di aderenza lungo il piano di rotolamento della ruota e può essere espressa per i due assi come:

$$(3.50) \quad \begin{aligned} F_{x1} &= ma(1-\phi) \\ F_{x2} &= ma\phi \end{aligned}$$

dove ϕ indica la distribuzione della forza di frenata tra asse anteriore e posteriore. Se si ipotizza, in prima approssimazione, che tale distribuzione sia proporzionale al carico dinamico verticale gravante su ciascun asse, si può scrivere:

$$(3.51) \quad \begin{aligned} F_{x1} &= (1-\psi + \frac{h}{gl}a)ma \\ F_{x2} &= (\psi - \frac{h}{gl}a)ma \end{aligned}$$

e dalla (3.49) e (3.24):

$$(3.52) \quad \begin{aligned} F_{y1} &= (1-\psi + \frac{h}{gl}a)mg \sqrt{f^2 - \left(\frac{a}{g}\right)^2} \\ F_{y2} &= (\psi - \frac{h}{gl}a)mg \sqrt{f^2 - \left(\frac{a}{g}\right)^2} \end{aligned}$$

da cui, dalla (3.48), si ricava l'espressione per la velocità critica per un veicolo in sbandamento in curva, soggetto ad una decelerazione a derivante da una azione frenante:

$$(3.53) \quad V_{cr} = \sqrt{gR \sqrt{f^2 - \left(\frac{a}{g}\right)^2}}$$

formalmente identica alla (3.42), dove al posto di f si ha un coefficiente di aderenza ridotto, in virtù del fatto che parte dell'aderenza richiesta per tenere il veicolo in curva viene impegnata per frenare.

Si osserva che mentre l'ipotesi fatta, che la forza frenante si ripartisca in modo proporzionale al carico dinamico sugli assi, può portare a errori nella valutazione delle forze longitudinali F_x sui singoli assi, la loro somma è esatta e anche la somma delle forze laterali F_y sugli assi, che compare nella (3.48), risulta ben approssimata.

Esempio

Determinare la velocità critica in curva di un veicolo che, percorrendo una curva con raggio di 200 m su strada con coefficiente di aderenza longitudinale pari a 0,8, viene frenato con decelerazione di 0,3 g.

Applicando la (3.53), si ottiene: $V = 38,1$ m/s, cioè 137 km/h. Se il veicolo non fosse stato frenato, la sua velocità limite, sullo stesso percorso, sarebbe stata di 142 km/h.

3.2.3 Sbandamento e rotazione attorno all'asse verticale del veicolo: calcolo della velocità dalle tracce

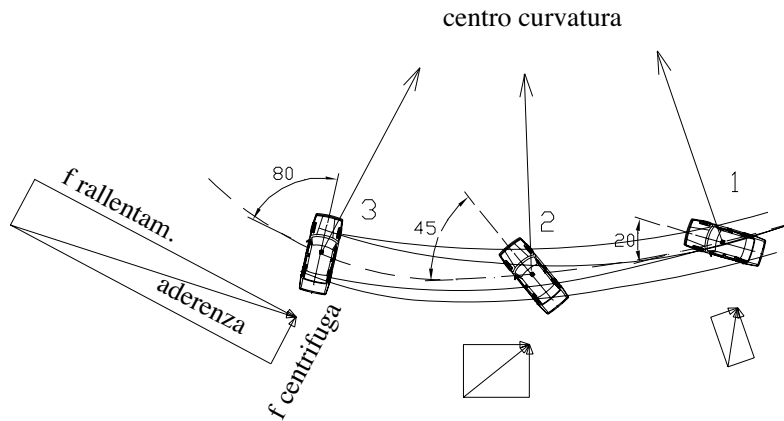
In alcuni casi succede che il veicolo, a seguito di una brusca sterzata, vada in rotazione su se stesso mentre il baricentro percorre una traiettoria curva. Le tracce lasciate al suolo durante tale moto non risultano parallele tra loro e durante la rotazione del veicolo si possono anche intersecare.

In questo caso non si può utilizzare la formula della velocità critica, se non nel caso in cui all'inizio delle tracce si abbia un tratto sufficientemente lungo di moto in curva controllato, in cui le tracce divergono lentamente. Infatti, durante la perdita di controllo, il veicolo aumenta il suo angolo di imbardata e aumenta l'angolo di deriva sulle ruote, con la conseguenza che il moto delle singole ruote diventa sempre più un moto di strisciamento e meno di rotolamento. Per calcolare la decelerazione del veicolo durante il suo moto e la sua velocità critica si deve quindi considerare l'angolo di imbardata, cioè l'angolo tra direzione longitudinale del veicolo e la direzione della traiettoria (ovvero della velocità istantanea del baricentro del veicolo), come mostrato in Figura 3.19.

Consideriamo il caso in cui il veicolo non sia frenato né accelerato durante lo sbandamento, cioè le ruote siano libere di rotolare; questo risulta il caso più frequente nella pratica.

Durante il moto del veicolo si ha una dissipazione dell'energia cinetica dovuta al lavoro di attrito tra ruote e suolo. Poiché non vi sono forze

Figura 3.19 – Tracce divergenti associate al moto con perdita di controllo del veicolo.



frenanti applicate, la forza di aderenza F è pressoché in direzione perpendicolare all'asse del veicolo, mentre la forza centrifuga mV^2/R agisce perpendicolarmente alla traiettoria seguita dal veicolo. Per un dato angolo di imbardata β , la componente della aderenza perpendicolare alla traiettoria $F\cos\beta$ bilancia la forza centrifuga, mentre la componente in direzione parallela alla traiettoria, $F\sin\beta$, rallenta il veicolo.

Ad esempio, nella posizione 1 di Figura 3.19, il veicolo ha un angolo di imbardata di 20° . Poiché le ruote anteriori sono sterzate verso destra, tutte le ruote formano un angolo di deriva di almeno 20° . In questo caso la maggior parte della aderenza impiegata bilancia la forza centrifuga mentre solo il 34% ($\sin 20 = 0,34$) rallenta il veicolo. All'aumentare dell'angolo di imbardata, aumenta la componente della aderenza che rallenta il veicolo; ad esempio nella posizione 2 di Figura 3.19, il veicolo è rallentato dal 70% dell'aderenza, mentre in posizione 3 praticamente tutta l'aderenza è impegnata nel rallentamento del veicolo.

Poiché vi sono delle tracce a terra lungo la traiettoria, si può desumere che tutta l'aderenza disponibile venga impegnata nella manovra e quindi, utilizzando il coefficiente di aderenza laterale, si può determinare in ogni punto la velocità del veicolo dal bilancio delle forze in direzione perpendicolare alla traiettoria, ottenendo:

$$(3.54) \quad V_{cr} = \sqrt{gfR \cos \beta}$$

Nella pratica, come già visto nel caso di sbandamento senza perdita di controllo, si può utilizzare il raggio di curvatura calcolato sulla traccia della ruota anteriore esterna ed utilizzare il coefficiente di aderenza longitudinale, semplificando l'applicazione della formula e senza commettere errori più marcati.

Dall'analisi sopra vista, si può calcolare in modo alternativo la velocità dissipata nel moto senza controllo anche valutando il lavoro compiuto dalle forze di aderenza, dove, per ogni tratto di traiettoria si può assumere una decelerazione pari a $gf \sin \beta$.

Questa ultima procedura ha il vantaggio di non necessitare del raggio di curvatura della traiettoria ma solo della sua lunghezza, evitando gli errori nel calcolo del raggio, soprattutto nel caso di elevati valori di questo.

La procedura può essere applicata dividendo la traiettoria in n tratti e calcolando su ciascuno il lavoro compiuto dalle forze di aderenza $L = mgf \sin \beta \Delta s$. Sommando i lavori compiuti su tutti i tratti ed eguagliando alla variazione di energia cinetica:

$$(3.55) \quad \frac{1}{2} m(v_i^2 - v_p^2) = \sum_{i=1}^n \frac{mgf(\sin \beta_i + \sin \beta_{i+1})}{2} \Delta s_i$$

si ricava la velocità iniziale del veicolo:

$$(3.56) \quad v_i^2 = \sqrt{v_{fi}^2 + gf \sum_{i=1}^n (\sin \beta_i + \sin \beta_{i+1}) \Delta s}$$

Includendo gli effetti di una eventuale forza frenante applicata e di una pendenza della strada lungo la traiettoria, la decelerazione diventa $g(f_i \sin \beta + f_t \sin \beta + \sin \theta)$, dove θ è l'angolo della pendenza della strada nella direzione della traiettoria del veicolo, gf_i e gf_t sono le decelerazioni del veicolo lungo la direzione trasversale e longitudinale del veicolo rispettivamente. In questo caso la velocità iniziale risulta:

$$(3.57) \quad v_i^2 = \sqrt{v_f^2 + g \sum_{i=1}^n (f_i \sin \beta_i + f_l \cos \beta_i + f_t \sin \beta_{i+1} + f_l \cos \beta_{i+1} \sin \theta) \Delta s_i}$$

Si osserva che se la forza frenante raggiunge un valore tale da bloccare le ruote, allora su ciascuna ruota agisce una forza di attrito diretta in senso contrario alla sua velocità rispetto al suolo e il moto del veicolo non avviene più, in generale, lungo una traiettoria curva. Questo tipo di moto può essere studiato attraverso l'analisi del moto roto - traslatorio.

3.3 Moto roto traslatorio

Il moto del veicolo nella fase post urto è spesso assimilabile ad un moto roto-traslatorio, che può essere studiato integrando le equazioni del moto; ai fini della ricostruzione degli incidenti stradali è, nella maggioranza dei casi, sufficiente utilizzare un modello a tre gradi di libertà del veicolo e adottare uno schema semplificato delle forze agenti su di esso, trascurando il trasferimento di carico tra le ruote dovuto ai moti di rollio e beccheggio

e tutte le forze ad eccezione di quelle dovute ai pneumatici. Si distingue il caso di moto con ruote bloccate o libere di ruotare.

3.3.1 Simulazione del moto a ruote bloccate

Questo caso si verifica, in genere, quando il guidatore sta frenando prima dell'urto oppure nel caso in cui le deformazioni del veicolo durante l'urto causino il bloccaggio delle ruote.

Le equazioni del moto, considerando un sistema di riferimento inerziale XYZ solidale con la strada, possono essere scritte come:

$$(3.58) \quad \begin{aligned} m\ddot{X} &= F_X \\ m\ddot{Y} &= F_Y \\ J_Z\ddot{\psi} &= M_Z \end{aligned}$$

avendo considerato il veicolo come un corpo rigido a tre gradi di libertà. Le forze che compaiono nelle equazioni sopra scritte sono quelle agenti sul veicolo, che per lo studio del moto post urto possono essere ridotte alle sole forze trasmesse dai pneumatici, trascurando tutte le altre.

Le forze di aderenza si possono assumere in modulo pari a fF_i , in cui F_i è la quota parte di carico che grava sulla ruota i -esima e f è il coefficiente di aderenza. Ogni forza si oppone al moto relativo tra terreno e ruota e quindi la direzione di ciascuna forza è quella della velocità istantanea dell'orma di contatto dell' i -esima ruota, con segno opposto. A causa della rotazione del veicolo, ogni orma ha una direzione di moto diversa e non è possibile considerare la forze agente sull'asse ma si devono considerare le forze agenti sulle singole ruota.

Consideriamo dapprima un sistema di assi solidale con il veicolo, xyz ; le componenti u_i e v_i della velocità dell'orma di contatto della i -esima ruota, di coordinate (x_i, y_i) rispetto al baricentro del veicolo, sono (vedi Figura 3.20):

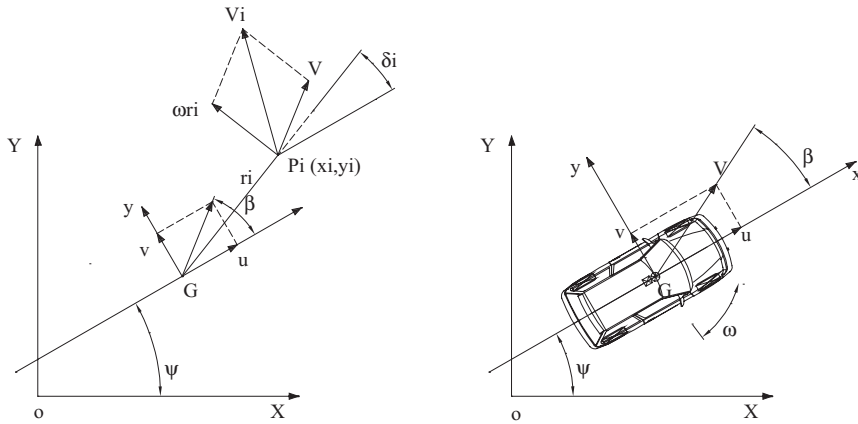
$$(3.59) \quad \begin{aligned} u_i &= V \cos \beta - \omega r_i \sin \chi_i \\ v_i &= V \sin \beta - \omega r_i \cos \chi_i \end{aligned}$$

dove r_i è la distanza dell'orma dal baricentro del veicolo, χ_i è l'angolo tra direzione dell'orma e asse longitudinale del veicolo, V è la velocità del baricentro del veicolo rispetto al sistema di riferimento inerziale. Si hanno le seguenti relazioni:

$$(3.60) \quad \begin{aligned} r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ \chi_i &= \arctan \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Le componenti della forza nel sistema xyz sono quindi:

Figura 3.20 – a) Velocità del punto di contatto della ruota i -esima sul terreno. b) Sistema di riferimento inerziale e variabile del moto.



$$(3.61) \quad \begin{aligned} F_{xi} &= -fZ_i \frac{u_i}{|V_i|} = fZ_i \frac{-V \cos \beta + \omega r_i \sin \chi_i}{|V_i|} \\ F_{yi} &= -fZ_i \frac{v_i}{|V_i|} = -fZ_i \frac{-V \sin \beta + \omega r_i \cos \chi_i}{|V_i|} \end{aligned}$$

dove il modulo della velocità dell'orma i -esima è dato da:

$$(3.62) \quad |V_i| = \sqrt{V^2 + \omega^2 r_i^2 + 2V\omega r_i \sin(\beta - \chi_i)}$$

Il momento della forza agente sulla i -esima ruota attorno al baricentro del veicolo è dato da:

$$(3.63) \quad M_i = F_{yi} r_i \cos \chi_i - F_{xi} r_i \sin \chi_i = fZ_i r_i \frac{V \sin(\beta - \chi_i) + \omega r_i}{|V_i|}$$

Sulla singola ruota, la direzione delle forze date dalle (3.61) e del momento dato dalla (3.63), varia con continuità durante il moto del veicolo; anche la risultante delle forze e dei momenti agenti sulle quattro ruote risulta variabile nel tempo ma in misura minore.

Il moto del veicolo può essere descritto integrando le equazioni di moto (3.58), in cui le forze ed i momenti sono dati dalle (3.61) e (3.63), dopo aver riportato le forze nel riferimento inerziale XYZ , attraverso la rotazione di coordinate:

$$(3.64) \quad \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

Per effettuare l'integrazione numerica è necessario imporre le condizioni iniziali, che sono la posizione XY del baricentro, l'angolo ψ del veicolo e le velocità iniziali V e $\omega = \dot{\psi}$ del veicolo. Ad ogni passo di integrazione si ottengono i nuovi valori di posizione e velocità del veicolo; l'integrazione va avanti fino a quando il veicolo risulta fermo.

3.3.2 Simulazione del moto a ruote non bloccate

Spesso nel moto post urto il veicolo ha tutte o in parte le ruote libere di ruotare. Sulla singola ruota agiscono la forza dovuta alla resistenza di rotolamento e la aderenza laterale, generata dall'angolo di deriva. Poiché durante il moto rotatorio del veicolo gli angoli di deriva sulle 4 ruote assumono valori elevati durante la maggior parte della rotazione, non è necessario modellare con precisione la dipendenza dell'aderenza laterale dall'angolo di deriva come riportato in Figura 2.11, ma è sufficiente utilizzare una schematizzazione come mostrato in Figura 3.21.

Le forze che si esercitano sulla ruota, riferite al sistema di riferimento solidale con il veicolo xyz , possono essere scritte allora come:

$$(3.65) \quad \begin{cases} F_{xi} = Z_i \frac{u_i}{|u_i|} [-f_r \cos \delta_i - f \sin \delta_i] \\ F_{yi} = Z_i \frac{v_i}{|v_i|} [-f_r \sin \delta_i + f \cos \delta_i] \end{cases} \quad \text{per } \alpha > \alpha_1$$

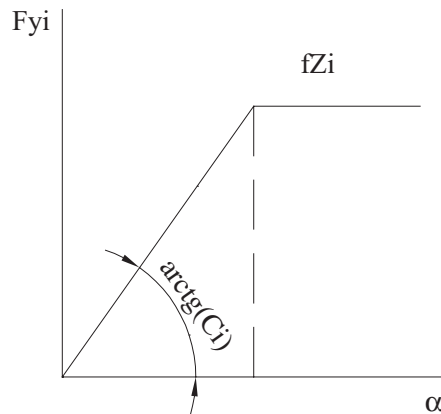
$$\begin{cases} F_{xi} = Z_i \frac{u_i}{|u_i|} \left[-f_r \cos \delta_i - f \frac{\alpha_i}{C_i} \sin \delta_i \right] \\ F_{yi} = Z_i \frac{v_i}{|v_i|} \left[-f_r \sin \delta_i + f \frac{\alpha_i}{C_i} \cos \delta_i \right] \end{cases} \quad \text{per } \alpha \leq \alpha_1$$

dove f_r è il coefficiente di rotolamento. Anche in questo caso, per integrare le equazioni di moto è necessario ruotare le forze nel sistema di riferimento inerziale XYZ , attraverso la matrice di rotazione (3.64).

Per quanto riguarda il momento attorno all'asse z si deve considerare che le forze di rotolamento, assunte tutte uguali sulle 4 ruote, forniscono un momento nullo nel caso in cui le ruote anteriori non siano sterzate ($\delta = 0$); viceversa, se vi è un angolo di sterzo non nullo, si genera un momento che però, poiché la resistenza di rotolamento è molto piccola rispetto all'aderenza laterale, può essere trascurato. Allora il momento attorno all'asse z può essere espresso considerando solo il contributo dell'aderenza laterale:

$$(3.66) \quad M_i = F_{yi} r_i \cos \chi_i$$

Figura 3.21 – Schematizzazione bilineare dell'andamento della aderenza laterale in funzione dell'angolo di deriva.

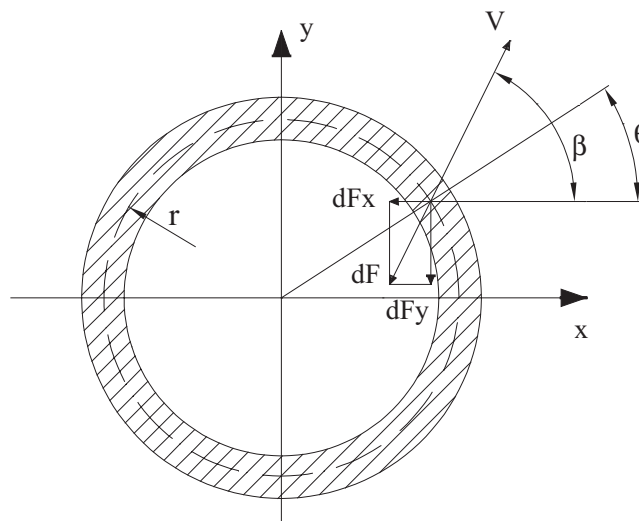


3.3.3 Moto post urto: modello semplificato

Per descrivere il moto roto-traslatorio del veicolo a ruote bloccate si può utilizzare un modello semplificato, che evita di dovere effettuare l'integrazione numerica delle equazioni di moto, come visto nei paragrafi precedenti. Il modello, pur adottando delle schematizzazioni più grossolane, fornisce risultati confrontabili con l'integrazione numerica sopra riportata.

Si considera che l'area di contatto del veicolo sulla pavimentazione avvenga su una corona circolare di raggio pari alla distanza media dei centri delle aree di contatto ruota terreno dal baricentro del veicolo (vedi Figura 3.22).

Figura 3.22 – Contatto tra veicolo e suolo schematizzato come una corona circolare.



Su ogni punto della corona circolare, le componenti della forza, nel riferimento xyz solidale con il veicolo, e il momento di imbardata possono essere espressi attraverso equazioni analoghe alle (3.61) e (3.63). Assumendo che il carico verticale si distribuisca in modo uniforme sulla corona circolare si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned}
 dF_x &= f \frac{mg}{2\pi} \frac{-V \cos \beta + \omega r \sin \theta}{\sqrt{V^2 + \omega^2 r^2 + 2V\omega r \sin(\beta - \theta)}} d\theta \\
 (3.67) \quad dF_y &= -f \frac{mg}{2\pi} \frac{-V \sin \beta + \omega r \cos \theta}{\sqrt{V^2 + \omega^2 r^2 + 2V\omega r \sin(\beta - \theta)}} d\theta \\
 dM &= -f \frac{mgr}{2\pi} \frac{-V \sin(\beta - \theta) + \omega r}{\sqrt{V^2 + \omega^2 r^2 + 2V\omega r \sin(\beta - \theta)}} d\theta
 \end{aligned}$$

La forza dF può essere scomposta in una componente dF_{\parallel} parallela alla velocità V del baricentro, la cui azione è quella di rallentare il veicolo, ed in una componente dF_{\perp} perpendicolare alla velocità, la cui azione è quella di deviare la traiettoria del veicolo incurvandola. Quest'ultima componente, integrata su tutta la corona circolare risulta nulla e quindi, nei limiti di questo modello semplificato, il moto del veicolo risulta rettilineo. Nella realtà il moto del veicolo risulta ad andamento curvo ma senza discostarsi troppo dal moto rettilineo.

La componente della forza parallela alla velocità può essere scritta come:

$$(3.68) \quad dF_{\parallel} = dF_x \cos \beta + dF_y \sin \beta = -f \frac{mg}{2\pi} \frac{V + \omega r \sin(\beta - \theta)}{\sqrt{V^2 + \omega^2 r^2 + 2V\omega r \sin(\beta - \theta)}} d\theta$$

Integrando la forza ed il momento su tutta la corona circolare si ha:

$$\begin{aligned}
 F_{\parallel} &= -f \frac{mg}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + a \sin \zeta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \sin(\zeta)}} d\zeta \\
 (3.69) \quad M &= -f \frac{mgr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \frac{1}{a} \sin \zeta}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} \sin(\zeta)}} d\zeta
 \end{aligned}$$

dove $\zeta = \theta - \beta$, ed a rappresenta il rapporto tra la componente di velocità dovuta alla rotazione e quella dovuta alla traslazione:

$$(3.70) \quad a = \frac{\omega r}{V}$$

Gli integrali che compaiono nelle (3.69) non sono calcolabili in forma chiusa e devono essere valutati numericamente.

Ponendo:

$$K(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + a \sin \zeta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \sin(\zeta)}} d\zeta$$

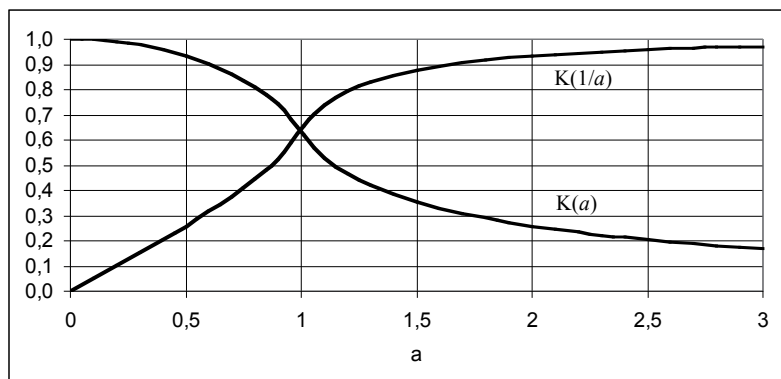
$$(3.71) \quad K\left(\frac{1}{a}\right) = - \int_0^{2\pi} \frac{1 + \frac{1}{a} \sin \zeta}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} \sin(\zeta)}} d\zeta$$

in Tabella 3 vengono riportati i valori degli integrali calcolati per vari valori di a , mentre in Figura 3.23 sono riportati i loro andamenti.

Tabella 3 – Valori delle funzioni K per alcuni valori di a .

a	$K(a)$	$K(1/a)$	a	$K(a)$	$K(1/a)$
0	1	0	1,4	0,3860	0,8566
0,2	0,9899	0,1005	1,6	0,3306	0,8936
0,4	0,9587	0,2043	1,8	0,2900	0,9177
0,6	0,9028	0,3158	2	0,2587	0,9342
0,8	0,8125	0,4441	2,5	0,2043	0,9587
1	0,6366	0,6366	3	0,1691	0,9716
1,2	0,4685	0,7926	∞	0	1

Figura 3.23 – Andamento delle funzioni $K(a)$ e $k(1/a)$.



Le equazioni di moto del veicolo, dalle (3.69) e (3.71), risultano:

$$(3.72) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -fgK(a) \\ \frac{d\omega}{dt} &= -fgr \frac{m}{J_z} K\left(\frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

Poiché a varia durante il moto del veicolo e la funzione K non è esprimibile in forma chiusa, le (3.72) devono essere integrate numericamente.

Tuttavia, poiché le leggi $V(t)$ e $\omega(t)$ sono quasi lineari, si può assumere, ai fini della ricostruzione del moto del veicolo, che il loro rapporto rimanga costante, e quindi che anche a sia costante. Con tale ipotesi, le (3.72) possono essere integrate analiticamente, e forniscono:

$$(3.73) \quad \begin{aligned} V &= \sqrt{2gK(a)fx} \\ \omega &= \sqrt{2\frac{m}{J_z}K\left(\frac{1}{a}\right)f g \alpha r} \end{aligned}$$

che risultano analoghe alla (3.7). In pratica si può considerare separatamente i moti di traslazione e di rotazione, assumendo un coefficiente di aderenza ridotto, pari a $fK(a)$ e $fK(1/a)$ rispettivamente.

3.4 Ribaltamento del veicolo

Il ribaltamento del veicolo è un evento complesso, influenzato dalle caratteristiche geometriche e inerziali del veicolo, dalla rigidità delle sospensioni e dalla geometria del terreno. Ai fini della ricostruzione dell'evento di ribaltamento si utilizzano approcci semplificati, che permettono di ricavare la velocità limite di ribaltamento e la velocità dissipata durante la fase di rotazione a terra del veicolo.

All'origine del ribaltamento vi è una forza laterale applicata alle ruote esterne durante il moto in curva o il moto di sbandamento. Queste forze laterali generano un impulso applicato sul punto di contatto ruota-terreno e di conseguenza un momento attorno al baricentro del veicolo. Se l'impulso è sufficientemente ampio, ovvero la forza laterale è sufficiente ad alzare le ruote interne e agisce per un tempo sufficiente, si arriva al ribaltamento, in mancanza di azioni correttive del guidatore (anche se in tali condizioni solo un guidatore molto esperto può riuscire a controllare il veicolo).

Generalmente il ribaltamento del veicolo non avviene mai in condizioni statiche o quasi statiche sotto la sola forza centrifuga in curva, eccetto per i veicoli con carreggiata particolarmente stretta e baricentro alto, in quanto le condizioni di slittamento laterale si verificano prima di quelle di ribaltamento; di fatto il raggiungimento della massima aderenza laterale limita l'entità dell'impulso laterale applicato.

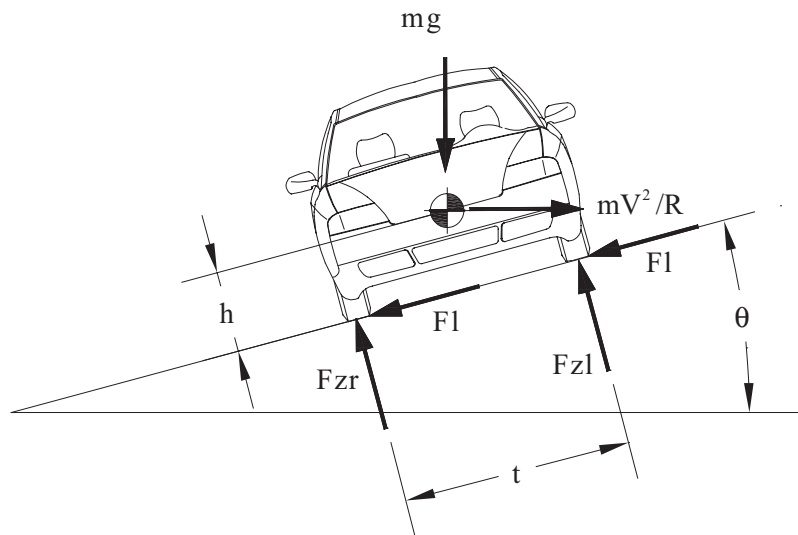
Diverso è il caso dinamico, in cui una azione di sterzata improvvisa che genera una oscillazione di rollio e un movimento di imbardata o l'effetto di un urto laterale, come l'urto su un marciapiede, o, ancora, una pendenza elevata del terreno (come può avvenire in tratti fuoristrada), possono provocare il ribaltamento del veicolo.

Nel seguito si presentano due modelli che mettono in evidenza i parametri coinvolti nel fenomeno di innesco del ribaltamento, anche se trovano limitata applicazione nella ricostruzione dell'incidente complessivo con ribaltamento.

3.4.1 Ribaltamento in condizioni quasi statiche

Si consideri il veicolo in Figura 3.24, con massa m e marciante a velocità V costante su una curva di raggio R , con una certa sopraelevazione θ .

Figura 3.24 – Diagramma delle forze sul veicolo.



La forza centrifuga mV^2/R agisce nel baricentro del veicolo, assieme alla forza peso, mentre sulle ruote è applicata la forza laterale e le reazioni perpendicolari al terreno.

Il momento delle forze rispetto al punto di contatto delle ruote esterne risulta:

$$(3.74) \quad \sum M = \frac{-mgt}{2} \cos \theta - mgh \sin \theta + F_{zl} t + m \frac{V^2}{R} h \cos \theta + m \frac{V^2}{2R} t \sin \theta$$

Considerando piccoli valori dell'angolo di sopraelevazione della strada, si può porre: $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \theta$, da cui, imponendo le condizioni di equilibrio alla rotazione, cioè che il momento delle forze sopra scritto sia nullo, si ottiene:

$$(3.75) \quad \frac{V^2}{Rg} = \frac{h\theta + \frac{t}{2} - \frac{F_z t}{mg}}{h + \frac{t}{2}\theta}$$

In condizioni di incipiente ribaltamento, la forza perpendicolare al terreno F_z che agisce sulla ruota interna diventa nulla e, dalla (3.75), nel caso in cui sia posto $\theta = 0$, si ottiene la condizione di inizio ribaltamento:

$$(3.76) \quad \frac{V^2}{Rg} = \frac{t}{2h}$$

Nella realtà le sospensioni del veicolo e la deformabilità dei pneumatici riducono il valore di accelerazione a cui la forza di contatto delle ruote interne alla curva diviene nulla. Infatti nel caso reale la massa sospesa del veicolo si inclina verso l'esterno della curva di un angolo di rollio ϕ , riducendo il braccio delle forze stabilizzanti. Si ottiene in questo caso:

$$(3.77) \quad \frac{V^2}{Rg} = \frac{t - 2h\phi}{2h}$$

Il valore $t/2h$ è chiamato fattore di stabilità trasversale ed indica la propensione di un veicolo al ribaltamento.

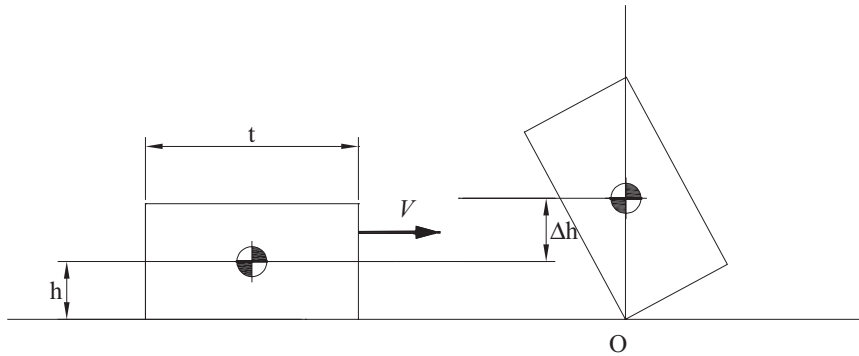
Dati i piccoli valori dell'angolo di rollio, la riduzione del fattore di stabilità trasversale dovuta alle sospensioni e alla deformabilità dei pneumatici risulta generalmente contenuta in qualche punto percentuale (tipicamente attorno al 5%, con riduzioni minori per le macchine rigide, come quelle sportive, e maggiori in quelle con sospensioni 'morbide', come nelle berline di lusso).

3.4.2 Ribaltamento in condizioni dinamiche

Si consideri un veicolo, schematizzato come un corpo rigido, con una velocità laterale iniziale V , che entra in contatto con un ostacolo laterale, tipo un gradino di un marciapiede, contemporaneamente con le ruote di un lato del veicolo, come mostrato in Figura 3.25

A seguito dell'urto, le ruote che entrano in contatto col gradino subiscono un impulso che generalmente dissiperà una parte di energia; assumiamo per il momento che l'urto sia perfettamente elastico ($\epsilon = 1$) e non ci sia dissipazione di energia (rappresenta il caso in cui il veicolo raggiunge più facilmente le condizioni di ribaltamento). In questo caso si può eguagliare direttamente l'energia cinetica posseduta dal veicolo prima dell'urto con l'incremento di energia potenziale gravitazionale necessaria affinché il baricentro del veicolo si elevi della quantità Δh , fino a raggiungere la posizione limite di stabilità, che si ha quando la proiezione verticale del

Figura 3.25 – Veicolo che durante il moto a velocità V incontra un ostacolo laterale: posizione limite di stabilità.



baricentro cade sul punto di appoggio del veicolo, ovvero le ruote a contatto col gradino:

$$(3.78) \quad \frac{1}{2} mV^2 = mg\Delta h$$

poiché, come si osserva dalla Figura 3.25, risulta:

$$(3.79) \quad h = h \left[\sqrt{\left(\frac{t}{2h}\right)^2 + 1} - 1 \right]$$

la (3.78) fornisce la velocità limite a cui si verifica il ribaltamento, nel caso di urto laterale contro un gradino, con coefficiente di restituzione unitario:

$$(3.80) \quad V = \sqrt{2gh \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2h}\right)^2 + 1} - 1 \right)}$$

Un altro approccio per valutare la velocità limite di ribaltamento è basato sull'applicazione della conservazione della quantità di moto per determinare la velocità angolare del veicolo subito dopo l'impatto e quindi applicando la conservazione dell'energia dopo l'impatto.

La conservazione del momento della quantità di moto durante l'urto, considerando per ora che l'urto sia completamente anelastico ($\varepsilon = 0$), cioè che le ruote a contatto col gradino si arrestino e il veicolo abbia a fine urto solo velocità angolare ω_o attorno al punto O coincidente con le suddette ruote, fornisce:

$$(3.81) \quad J_o \omega_o = mVh$$

La conservazione dell'energia dopo l'impatto fornisce:

$$(3.82) \quad \frac{1}{2} J_o \omega_o^2 = mg \Delta h$$

da cui, ricavando ω_o dalla (3.82), dalla (3.81) e dalla (3.79), si ottiene:

$$(3.83) \quad V = \sqrt{\frac{2J_o g}{mh} \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2h}\right)^2 + 1} - 1 \right)}$$

Poiché il momento di inerzia del veicolo rispetto al punto di rotazione O può essere scritto, per il teorema di Huygens, in funzione del momento di inerzia attorno al baricentro J_x come:

$$(3.84) \quad J_o = J_x + m \left(h^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right)$$

la (3.82) può essere riscritta come:

$$(3.85) \quad V = \sqrt{\frac{1+A^2+B^2}{A^2} 2gh \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2h}\right)^2 + 1} - 1 \right)}$$

dove si è posto:

$$(3.86) \quad A = \left(\frac{2h}{t}\right) \quad B = \frac{2}{t} \sqrt{\frac{J_x}{m}}$$

Nel caso di urto con una certa componente di restituzione elastica, esprimibile attraverso il coefficiente di restituzione elastica ε , il valore della velocità limite di ribaltamento nell'urto contro gradino si abbassa, ed è esprimibile, dalla conservazione dell'energia, attraverso la:

$$(3.87) \quad V = \sqrt{\frac{1+A^2+B^2}{A^2(1+\varepsilon)^2} 2gh \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2h}\right)^2 + 1} - 1 \right)}$$

Si deve considerare che se il gradino è basso, a causa delle deformazioni del pneumatico, il veicolo può sormontare l'ostacolo invece di ribaltarsi e quindi le relazioni sopra riportate non risultano applicabili.

3.4.3 Analisi dell'incidente con ribaltamento

L'incidente con ribaltamento è caratterizzato, in genere, da una fase iniziale, detta di pre ribaltamento, in cui il veicolo trasla e ruota attorno all'asse verticale (sbanda) generando forze laterali sulle ruote, una fase di innesco ribaltamento in cui le ruote interne, sotto l'impulso laterale generato da moti di rollio o da urti contro ostacoli, cominciano a sollevarsi fino a che il veicolo raggiunge la posizione limite di stabilità ed una fase finale di rotolamento, in cui il veicolo può compiere lateralmente diversi giri su se stesso fino ad arrestarsi.

La fase iniziale pre ribaltamento, in cui il veicolo comincia a sbandare può essere trattata con le metodologie esaminate nel paragrafo 3.2, mentre di seguito si esaminano le altre due fasi.

Fase di innesco ribaltamento

Dati sperimentali relativi alla fase di innesco del ribaltamento indicano che l'accelerazione laterale subita dal veicolo aumenta in conseguenza dell'aumento delle forze laterali sulle ruote esterne. In questa fase solitamente il veicolo lascia delle impronte e tracce a terra. Nel caso di ribaltamento su una superficie liscia asfaltata, la fine della fase di innesco, che si verifica quando il veicolo si trova con le ruote interne sollevate nella posizione limite di stabilità, coincide generalmente con la fine delle tracce gombose lasciate dai pneumatici o dalle tracce metalliche lasciate dai cerchi. Evidenze sperimentali mostrano che non vi è grande differenza tra tracce lasciate dal cerchione e tracce lasciate dal pneumatico, né in termini di propensione al ribaltamento né in termini di maggiore accelerazione laterale del veicolo.

Nel caso di ribaltamento su superficie erbosa o terra, la fine della fase di innesco è individuata dalla fine dei solchi lasciati dalle ruote. In presenza di ostacoli o gradini, le tracce spesso finiscono in corrispondenza dell'ostacolo.

Generalmente l'inizio della fase di innesco viene assunta quando la forza sulle ruote interne si annulla. Tale momento non è così evidente da determinarsi, a meno che non sia causata dall'urto contro un ostacolo, nel qual caso l'ostacolo stesso indica tale posizione.

Dati sperimentali ricavati su veicoli americani indicano:

- a) per l'innesco causato dall'urto contro gradino od ostacolo, una durata τ di circa 0,1 s ed una decelerazione media di $a = 12 \text{ g} - 13 \text{ g}$;
- b) per l'innesco su pavimentazione liscia, una durata τ di circa 0,5 s ed una decelerazione media di $a = 1,2 \text{ g} - 1,7 \text{ g}$;

Con tali dati è possibile calcolare la velocità all'inizio della fase di innesco e lo spazio percorso dalle:

$$(3.88) \quad V_{\text{inizio}} = V_{\text{fine}} + a\tau$$

$$(3.89) \quad S = \frac{V_{\text{inizio}}^2 - V_{\text{fine}}^2}{2a}$$

Fase di rotolamento

La distanza d percorsa nella fase finale, in cui il veicolo rotola su se stesso, risulta generalmente determinabile dall'evidenza dei rilievi, mentre il numero di giri effettuato e l'orientazione del veicolo, che possono essere di un certo interesse per l'analisi del moto e delle sollecitazioni degli occupanti, risulta un dato più complesso da determinare e richiede una analisi anche delle deformazioni del veicolo oltre che delle tracce al suolo lasciate durante tale fase.

La velocità del veicolo all'inizio della fase di rotolamento può essere determinata schematizzando il moto come uniformemente decelerato, con un coefficiente f di decelerazione equivalente, mediato su tutto lo spazio percorso in rotolamento:

$$(3.90) \quad V = \sqrt{2gfd}$$

Valori di letteratura per il coefficiente di decelerazione durante la fase di rotolamento, ottenuti da sperimentazione su veicoli americani a velocità di inizio rotolamento compresi tra 50 e 90 km/h, possono riassumersi in valori compresi tra $0,4 < f < 0,5$, indipendentemente dal tipo di terreno.

Esempio

Si consideri un veicolo che, a seguito dello scoppio della ruota posteriore destra, sbandi e, dopo essersi traversato, inizi il ribaltamento, finendo la sua corsa ad una distanza di 35,4 m dal punto in cui finiscono le tracce gommose lasciate sulla pavimentazione asfaltata liscia. Le tracce gommose risultano lunghe 85,3 m ed iniziano con una curvatura di raggio pari a circa 216 m. Dalle dichiarazioni del conducente, subito dopo lo scoppio del pneumatico, lo stesso ha frenato senza riuscire a mantenere il controllo del veicolo.

Si può assumere come fase di rotolamento quella compresa tra la fine delle tracce e la posizione di quiete del veicolo, lunga 35,4 m. In tale fase, usando un coefficiente di decelerazione compreso tra 0,4 e 0,5, si ottiene dalla (3.90) una velocità di inizio rotolamento compresa tra 60 km/h e 67 km/h.

La velocità posseduta dal veicolo all'inizio della fase di innesco può essere calcolata dalla (3.88), che con un valore di $\tau = 0,5$ e $a = 1,5$ g fornisce una velocità compresa tra 86 m/h e 94 km/h

La velocità del veicolo all'inizio della perdita di controllo può essere determinata dalla formula della velocità critica in curva, che, assumendo un coefficiente di decelerazione di 0,7, fornisce un valore di 139 km/h.

Si può valutare se il valore così calcolato della velocità iniziale di marcia del veicolo è congruente con il fatto che il veicolo abbia iniziato la fase di innesco del ribaltamento alla velocità compresa tra 86 km/h e 94 km/h sopra calcolata.

La distanza percorsa dal baricentro del veicolo nella fase di innesco del ribaltamento, risulta, dalla (3.89) compresa tra 10,2 m e 11,2 m; si assume un valore medio di 10,7 m. Nella fase iniziale di pre ribaltamento il veicolo ha percorso, quindi, una distanza pari a $85,3 \text{ m} - 10,7 \text{ m} = 74,6 \text{ m}$, passando da una velocità di 139 km/h ad una compresa tra 86 km/h e 94 km/h. Assumendo una decelerazione uniforme in tale tratto si ottiene una decelerazione media compresa tra 5,5 e 6,2 m/s^2 , compatibile con l'applicazione del freno come dichiarato dal conducente.