

I LIBRI DE «IL COLLE DI GALILEO»
ISSN 2704-5609 (PRINT) | ISSN 2612-7989 (ONLINE)

I LIBRI DE «IL COLLE DI GALILEO»

Direttore

Daniele Dominici (*Università di Firenze*)

Comitato scientifico

Oscar Adriani (*Università di Firenze; Sezione INFN Firenze, Direttore*)

Marco Benvenuti (*Università di Firenze; Presidente del Sistema Museale d'Ateneo*)

Roberto Casalbuoni (*Università di Firenze*)

Francesco Cataliotti (*Università di Firenze*)

Stefania De Curtis (*Sezione INFN Firenze*)

Paolo De Natale (*Istituto Nazionale di Ottica, Direttore*)

Pier Andrea Mandò (*Università di Firenze*)

Giuseppe Pelosi (*Università di Firenze*)

Giacomo Poggi (*Università di Firenze*)

Maria Sofia Randich (*Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Direttore*)

Enrico Fermi a Firenze

Le «Lezioni di Meccanica Razionale»
al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria:
1924-1926

a cura di
ROBERTO CASALBUONI
DANIELE DOMINICI, GIUSEPPE PELOSI

FIRENZE UNIVERSITY PRESS

2019

Enrico Fermi a Firenze : le «Lezioni di Meccanica Razionale»
al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926 / a
cura di Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi.
– Firenze University Press, 2019.
(I libri de «Il Colle di Galileo» ; 6)

<https://www.fupress.com/isbn/9788864539607>

ISSN 2704-5609 (print)
ISSN 2612-7989 (online)
ISBN 978-88-6453-959-1 (print)
ISBN 978-88-6453-960-7 (online PDF)

Progetto grafico di Alberto Pizarro Fernández, Lettera Meccanica SRLs
Immagine di copertina: elaborazione grafica della fotografia che ritrae
da sinistra a destra Franco Rasetti, Rita Brunetti, Nello Carrara, Enrico
Fermi all'Istituto di Fisica ad Arcetri [Archivio Amaldi, Dipartimento
di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"]




Certificazione scientifica delle Opere

Tutti i volumi pubblicati sono soggetti a un processo di referaggio esterno di cui sono responsabili il Consiglio editoriale della FUP e i Consigli scientifici delle singole collane. Le opere pubblicate nel catalogo FUP sono valutate e approvate dal Consiglio editoriale della casa editrice. Per una descrizione più analitica del processo di referaggio si rimanda ai documenti ufficiali pubblicati sul catalogo on-line (www.fupress.com).

Consiglio editoriale Firenze University Press

M. Garzaniti (Presidente), M. Boddi, A. Bucelli, R. Casalbuoni, A. Dolfi, R. Ferrise, M.C. Grisolia, P. Guarnieri, R. Lanfredini, P. Lo Nostro, G. Mari, A. Mariani, P.M. Mariano, S. Marinai, R. Minuti, P. Nanni, G. Nigro, A. Perulli.

 L'edizione digitale on-line del volume è pubblicata ad accesso aperto su www.fupress.com.

La presente opera è rilasciata nei termini della licenza Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0: <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>). La licenza permette di condividere l'opera, nella sua interezza o in parte, con qualsiasi mezzo e formato, e di modificarla per qualsiasi fine, anche commerciale, a condizione che ne sia menzionata la paternità in modo adeguato, sia indicato se sono state effettuate modifiche e sia fornito un link alla licenza.

© 2019 Firenze University Press

Pubblicato da Firenze University Press

Firenze University Press
Università degli Studi di Firenze
via Cittadella, 7, 50144 Firenze, Italy
www.fupress.com

*This book is printed on acid-free paper
Printed in Italy*

SOMMARIO

PRESENTAZIONE <i>Luigi Dei</i>	VII
PREFAZIONE <i>Luisa Cifarelli</i>	IX
PREFAZIONE DEI CURATORI <i>Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi</i>	XV
ENRICO FERMI: UNA VITA INTENSA <i>Francesco Guerra, Nadia Robotti</i>	1
IL CONTRIBUTO SCIENTIFICO DI ENRICO FERMI <i>Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici</i>	23
PARTE I ENRICO FERMI, GLI ANNI FIORENTINI	
ENRICO FERMI DOCENTE ALLA REGIA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE <i>Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori, Stefano Selleri</i>	41
RICORDI DI FERMI <i>Nello Carrara</i>	65
LA STATISTICA DI FERMI ALLE RADICI DELL'ELETTRONICA DEI SEMICONDUTTORI <i>Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini</i>	83
IL PRIMO CONCORSO DI FISICA TEORICA <i>Paolo Rossi</i>	89
LAURA ED ENRICO FERMI A 'IL FRASSINE' <i>Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi</i>	97
UNA PARTITA A TENNIS E TANTI RICORDI <i>Carlo Franchetti</i>	103

PARTE II

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

PREFAZIONE ALLE LEZIONI

111

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

117

Enrico Fermi

RINGRAZIAMENTI

385

GLI AUTORI

387

PRESENTAZIONE

Luigi Dei

Rettore dell'Università di Firenze

Con grande piacere accolgo l'invito a scrivere qualche riga di presentazione alla seconda edizione del volume *Enrico Fermi a Firenze. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926*. Rispetto alla prima edizione le lezioni sono presentate in formato *latex* e il volume contiene alcuni nuovi contributi, tra i quali un contributo di Francesco Guerra, Nadia Robotti sulla vita di Enrico Fermi, nonché un contributo di Paolo Rossi sul concorso di Fisica Teorica che portò Fermi a Roma nel 1926. La Casa Editrice del nostro Ateneo, Firenze University Press, ha curato la pubblicazione in collaborazione col Centro Fermi di Roma. Come è noto, il Premio Nobel per la Fisica del 1938 Enrico Fermi insegnò nei primi due anni accademici della nostra università: il 1924/25 e il 1925/26. Ecco perché siamo orgogliosi di queste ricerche d'archivio che hanno consentito di portare alla memoria in modo documentale un lacerto di vita accademica di Fermi. La storia ci presenta spesso conti con stranezze e paradossi: nei venti anni che trascorrono fra il 1924 e il 1945 si assiste forse alla più grande rivoluzione concettuale, dopo quelle di Galileo e Newton, al trionfo della meccanica quantistica, la meccanica del mondo atomico-molecolare e alla penetrazione dei misteri del nocciolo più profondo della materia, il nucleo. L'aggettivo 'nucleare' diventerà un termine che caratterizzerà in modo sostanziale – nel bene del progresso della conoscenza, nel male di Hiroshima e Nagasaki – gli anni a venire fino ai giorni nostri. In questi stessi venti anni la storia ci consegnerà anche i più grandi drammi planetari: dittature e totalitarismi, genocidi, la più grande guerra della storia della civiltà umana, per la seconda volta in un secolo. Ma così è: le tragedie non fermano il cammino dell'uomo sulla strada della conoscenza. Fermi in questi venti anni, insieme a tanti altri scienziati, interroga e scuote con energia la sfinge che ha nome materia. Parte dai gas, dai loro calori specifici, proprio qui a Firenze, mentre insegna meccanica razionale ai fisici e agli ingegneri, e prosegue molto più in là di un gas. Le sue intuizioni, la sua eleganza nel disegnare formule apparentemente astratte e invece ricche di assoluta concretezza, lo elevano a genio del Novecento. Mi è gradito ricordare che quando ero studente di chimica in via Gino Capponi 9 e frequentavo le lezioni di termodinamica statistica tenute da quel meraviglioso didatta che era il professor Giorgio Taddei, l'approccio statistico al mondo di atomi e molecole mi affascinava

particolarmente. Maxwell e Boltzmann, i classici, e poi i quantistici Bose, Einstein, Fermi e Dirac. Ecco i sei giganti sulle spalle dei quali ancor oggi guardiamo il mondo. Quella formula compatta, che disegna la statistica di Fermi-Dirac per le particelle dette appunto fermioni, è bella a vedersi, con quei due numeri apparentemente lontani e invece vicinissimi: il primo è il numero 'uno', l'inizio di ogni cosa e l'altro il numero 'e' di Nepero o Eulero, che è legato al numero uno, ma anche all'infinito. Infatti 'e' si ottiene se a lui, l'uno, sommo $1/n$, dove 'n' è grandissimo praticamente infinito, ed elevo questa somma di due addendi proprio allo stesso numero n del denominatore della frazione sommata a 1. Il paradosso è che questa somma, che ha a che fare con l'infinito, produce un numero finito, non molto lontano dall'uno, un numero quasi magico, trascendente, che sta vicino al tre, perché è 2,71828... e qui davvero dovremmo continuare ancora di nuovo verso l'infinito! Nella statistica di Fermi-Dirac questi due fantastici numeri son messi in modo tale da regalarci... gli *smartphone*! Insomma, l'universo di oggi, digitale-informatico, che mette nelle nostre mani il mondo a portata di un *click* nasce a Firenze, circa un secolo fa, sulle ali di una formula matematica che la Fisica impiega per spiegare i misteri della materia. Infatti, alla base di questi marchingegni ci stanno semiconduttori solidi e alla base dei semiconduttori, genitori dell'elettronica, ci stanno la statistica di Fermi-Dirac, il livello di energia che porta il suo nome e tante altre belle cose. Sì perché la scienza è bella, come un quadro, un'opera letteraria, una sinfonia musicale. La sua bellezza spesso si condensa in una formula matematica, quella di Fermi, che come tante altre – e come si disse di Shakespeare –, non appartiene a un'epoca, ma all'umanità. E di queste bellezze il libro che qui presentiamo è davvero colmo.

Firenze, 29 agosto 2019

PREFAZIONE

Luisa Cifarelli

Presidente del Centro Fermi

Il Centro Fermi e una significativa testimonianza sul giovane Enrico Fermi a Firenze

Il Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche ‘Enrico Fermi’ (Centro Fermi) ha sede a Roma nella storica palazzina di Via Panisperna (Fig. 1) dove, a partire dal 1881, sotto la guida di Pietro Blaserna, fiorì il Regio Istituto di Fisica, un vero e proprio ‘ambiente creativo’ dove crebbe una delle figure più di spicco della fisica italiana del ’900: Enrico Fermi, vincitore nel 1926 della prima cattedra di Fisica Teorica istituita in Italia.

Fig. 1 – La storica palazzina di via Panisperna (nel 1880 ca.), un tempo Regio Istituto Fisico dell’Università di Roma, oggi sede istituzionale del Centro Fermi.



Qui Fermi iniziò la sua grande avventura alla conquista del nucleo, giungendo nel giro di pochi mesi a due scoperte fondamentali per lo sviluppo della fisica nucleare: quella della radioattività indotta da neutroni (marzo 1934) e quella dell’effetto del loro rallentamento nell’attivare la radioattività (ottobre 1934).

Fig. 2 – La sede del Centro Fermi, inaugurata il 28 ottobre 2019.



Fig. 3 – Scalone monumentale del Centro Fermi.



Nell'estensione delle ricerche sulla radioattività indotta da neutroni all'intera tavola periodica, un ruolo fondamentale fu svolto da quel gruppo di giovani studiosi che si era venuto a formare intorno a Fermi sotto la sua geniale guida scientifica, che verranno ricordati come 'i ragazzi di Via Panisperna', così come volle affettuosamente chiamarli Orso Mario Corbino, allora Direttore dell'Istituto.

A Fermi per queste sue due scoperte, che cambieranno il

futuro della fisica nucleare, fu attribuito nel 1938 il Premio Nobel per la Fisica, un premio Nobel tutto italiano.

Il Centro Fermi è un Ente di ricerca vigilato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, istituito nel 1999 a seguito del centenario della nascita della Società Italiana di Fisica (1997) e in vista del centenario della nascita di Enrico Fermi (2001) per onorarne la memoria e perseguirne gli insegnamenti. Dando vita ad attività di ricerca all'avanguardia e di carattere interdisciplinare, tenendo bene in vista, da un lato, le applicazioni e le ricadute scientifico-tecnologiche, dall'altro, la diffusione e la promozione della cultura scientifica, il Centro Fermi ha una 'doppia anima' di museo e al tempo stesso di istituto di ricerca. Attualmente sono più di 150 i ricercatori che collaborano nei vari progetti del Centro Fermi: sono dipendenti, assegnisti di ricerca o associati alle ricerche dell'Ente, provenienti da varie Università ed Enti di ricerca italiani (INFN, CNR, INRIM, ecc.) e stranieri (CERN, GSI, ecc.).

Dopo un lungo lavoro di ristrutturazione, nel 2019, a venti anni dalla fondazione del Centro Fermi, la storica palazzina è stata consegnata al Centro Fermi che ha così finalmente acquisito la sua sede ufficiale (Figg. 2-3). Sono stati fatti numerosi interventi conservativi che hanno ridato vita ai vari ambienti dell'Istituto di Fisica, inclusa l'Aula Magna, oggi denominata 'Aula Fermi' (Fig. 4).

Fig. 4 – L'Aula Magna dell'Istituto interamente ristrutturata, oggi Aula 'Enrico Fermi', il giorno dell'inaugurazione.



Il museo fermiano, appena allestito all'interno della palazzina (Fig. 5), racconta la vita, le scoperte e l'eccezionale contributo scientifico e umano di Enrico Fermi, documentandone le diverse tappe in Italia e negli Stati Uniti. I visitatori potranno ripercorrere la straordinaria carriera del grande scienziato tramite installazioni interattive e percorsi di approfondimento che potranno essere fruiti a più livelli e a tutte le età.

Fig. 5 – Ingresso al museo del Centro Fermi.



In qualità di istituto di ricerca, il Centro Fermi ospita e dirige circa 20 progetti scientifici che ricoprono diversi ambiti: dallo sviluppo di nuove tecnologie in Fisica fondamentale, alla Fisica applicata alla Biomedicina, dalla ricerca sull'energia, alle indagini fisiche applicate ai Beni culturali, sino agli studi legati alla storia della Fisica. Tutte le ricerche coinvolgono in maniera

particolare giovani ricercatori che il Centro Fermi supporta con contratti (assegni o borse) triennali.

Particolarmente importante è il progetto *Extreme Energy Events (EEE)* – *la Scienza nelle Scuole*, ideato nel 2004 da Antonino Zichichi per permettere agli studenti delle scuole superiori di partecipare in prima persona alla realizzazione di un grande esperimento sullo studio degli sciami estesi di muoni cosmici. Sono gli stessi studenti a costruire i rivelatori presso il CERN di Ginevra, per poi installarli nelle loro scuole dove è loro responsabilità controllarne il funzionamento e permettere una continua raccolta di dati. Questi ultimi vengono poi inviati al centro di calcolo CNAF-INFN di Bologna per essere ricostruiti e resi disponibili ai ricercatori, ma anche agli stessi studenti, per studi di Fisica astroparticellare. Attualmente sono circa 120 le scuole coinvolte su tutto il territorio italiano, di cui circa 60 dotate di un rivelatore in sede e altrettante abilitate a seguire l'esperimento tramite connessioni internet e web. Tutte contribuiscono all'analisi dei dati, partecipando a incontri, videoconferenze e 'masterclasses' attinenti all'esperimento.

Il progetto *VIEWLAB* è invece dedicato alla realizzazione di un laboratorio per le indagini sui beni culturali tramite strumentazione per tomografia a raggi X e per spettroscopia a fluorescenza X e a effetto Raman. Con queste tecniche sarà possibile analizzare vari reperti provenienti da musei e raccolte di tutt'Italia. Il progetto prevede inoltre una sezione dedicata agli studenti, con la possibilità di effettuare esperimenti dimostrativi per l'approfondimento di questi tipi di indagine.

Ma torniamo a Enrico Fermi che ebbe un incarico di insegnamento nell'Ateneo di Firenze nel corso degli anni accademici 1924/25 e 1925/26, dove tenne lezioni di Meccanica Razionale per gli studenti di Scienze e del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria. I temi affrontati in quel corso spaziavano dalla cinematica e la dinamica del punto, alla cinematica e statica dei sistemi rigidi, inclusa la statica di sistemi più in generale; contengono alcuni elementi di idromeccanica e includono il formalismo delle equazioni di Lagrange.

Seppur breve, quello fiorentino fu un periodo assolutamente rilevante per il futuro premio Nobel, nel corso del quale sviluppò il suo lavoro teorico sul gas monoatomico sfruttando il principio di esclusione di Pauli, dando origine alla fondamentale statistica, oggi nota come statistica di Fermi-Dirac, il cui impatto spazia su tutti i campi della Fisica. L'importanza del periodo trascorso a Firenze è ben testimoniata dalla lettera autografa proprietà del Centro Fermi (si veda contributo di N. Robotti e F. Guerra in questo volume).

I lavori teorici di Fermi non si limitano però alla celebre statistica. Basti pensare che nel successivo periodo romano Fermi elaborò la sua magistrale teoria dei raggi beta con la quale, nel 1933, introduceva una nuova forza fondamentale della natura, la forza nucleare debole. E subito dopo, mettendo in evidenza la sua incredibile versatilità di fisico teorico e di fisico speri-

mentale, realizzava le scoperte sui neutroni (Fig. 6) che, come appena detto, gli valsero il Premio Nobel.

Fig. 6 – La celebre ‘fontana dei pesci rossi’ nel giardino del Centro Fermi il giorno dell’inaugurazione. La fontana, con la cui acqua Fermi stabilì il ruolo cruciale delle sostanze idrogenate nella radioattività indotta da neutroni, è stata proclamata Sito Storico della Società Europea di Fisica il 20 aprile 2012, alla presenza dell’allora Presidente della Repubblica Giorgio Napolitano.



Il Centro Fermi, che nel suo museo vuole ripercorrere tutte le tappe della vita di Enrico Fermi, è quindi lieto di contribuire alla ristampa delle sue celebri «Lezioni di Meccanica Razionale». Si tratta di una trascrizione effettuata dai suoi allievi, ma pur sempre un’ulteriore e formidabile testimonianza su ciò che era Fermi, sin da giovanissimo, come docente e maestro.

PREFAZIONE DEI CURATORI

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi

Questo volume è la seconda edizione di un libro che rende omaggio a Enrico Fermi per il periodo da lui trascorso a Firenze, periodo breve ma sicuramente estremamente significativo nella sua vita scientifica, con la pubblicazione delle dispense «Lezioni di Meccanica Razionale» che Fermi tenne a Firenze nel biennio 1924-1926.

Dopo la laurea presso la Scuola Normale Superiore nel 1922 e due soggiorni all'estero, con borse di studio del Ministero della Pubblica Istruzione a Gottinga e della Fondazione Rockefeller a Leida, intervallati da un incarico di un corso di Matematica per Chimici all'Università di Roma, Fermi fu chiamato da Antonio Garbasso all'Università di Firenze a ricoprire dal primo novembre 1924 per incarico i corsi di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica della Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali.

Il periodo di Enrico Fermi a Firenze fu breve, ma molto fruttuoso. Iniziò infatti a svolgere ricerche di Fisica sperimentale con l'ausilio di Franco Rasetti, che era estremamente dotato per le attività di laboratorio. Inoltre Fermi scrisse, nel periodo fiorentino, il famoso lavoro che dette origine alla statistica di Fermi-Dirac e che porterà Fermi alla ribalta internazionale. Nell'anno accademico 1924/25 nel corso di 'Fisica Matematica', Enrico Fermi trattò l'«Elettrodinamica». Nell'anno successivo Fermi, dopo aver richiesto e ottenuto la trasformazione del titolo da Fisica Matematica in Fisica Teorica, trattò nozioni di probabilità, la termodinamica e la meccanica statistica.

Dopo la partenza di Fermi il corso di Meccanica Razionale fu tenuto da Enrico Persico fino all'anno accademico 1929/30 e poi da Gilberto Bernardini fino al 1931/32. Successivamente il corso passò ai fisici matematici, il primo dei quali fu Bruto Caldonazzo. Il corso di Fisica Teorica fu invece tenuto da Enrico Persico fino al 1929/30, poi da Bruno Rossi fino al 1931/32 e poi da Giulio Racah fino al 1937/38.

Le lezioni di Meccanica Razionale, di cui Fermi era incaricato, venivano tenute in Piazza San Marco, 2, la sede attuale del Rettorato ed erano seguite oltre che dagli studenti di Fisica e di Matematica anche dagli studenti del biennio propedeutico di Ingegneria. Gli studenti che seguivano il corso erano in larga parte studenti del biennio propedeutico di Ingegneria ed infatti furono due di loro, Bonanno Bonanni e Paolo Pasca, a raccogliere gli appunti delle lezioni in un volume, stampato dalla Litografia Tassini, in Firenze. L'an-

no della pubblicazione, il 1926, può essere solo desunto dalla dedica a mano esistente sulla copertina. I temi affrontati da Enrico Fermi nelle sue lezioni includono la cinematica e la dinamica del punto, la cinematica e la statica dei sistemi rigidi, inclusa la statica di sistemi più in generale. Infine le lezioni contengono le equazioni di 'Lagrangia' e alcuni elementi di idromeccanica.

Questa seconda edizione si è avvalsa della collaborazione con il Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche Enrico Fermi.

Abbiamo diviso questo libro in due parti: la prima dal titolo *Enrico Fermi, gli anni fiorentini* e l'altra contenente le *Lezioni di Meccanica Razionale*. Le due parti sono precedute da due contributi introduttivi di carattere più generale: il primo, di Francesco Guerra e Nadia Robotti, *Enrico Fermi: una vita intensa* ripercorre la vita dello scienziato, il secondo, di Roberto Casalbuoni e Daniele Dominici, ne rivede il contributo scientifico alla luce dei termini che fanno riferimento al suo nome.

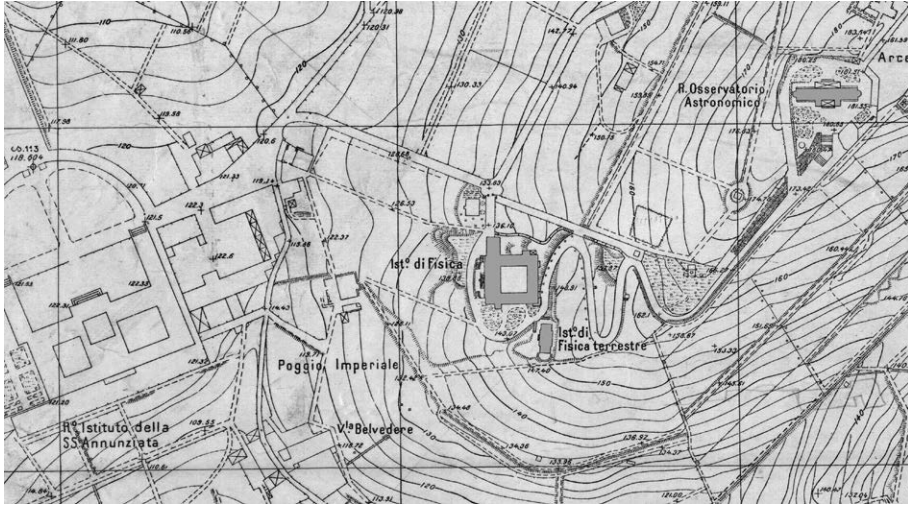
La prima parte del libro *Enrico Fermi, gli anni fiorentini*, è dedicata alla ricostruzione del periodo che Enrico Fermi ha trascorso a Firenze ed è articolata in sei contributi. Tracce di questo periodo, importante ma non molto conosciuto, possono essere trovate anche nelle seguenti pubblicazioni:

- E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, University of Chicago Press e Accademia Nazionale dei Lincei, Chicago and Rome 1962-1964;
- L. Fermi, *Atoms in the Family. My life with Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago 1954 (edizione italiana di Arnoldo Mondadori Editore, Verona 1954);
- E. Segrè, *Enrico Fermi, Physicist*, University of Chicago Press, Chicago 1970 (edizione italiana di Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1971);
- F. Cordella, A. De Gregorio, F. Sebastiani, *Enrico Fermi. Gli anni italiani*, Editori Riuniti, Roma 2001;
- E. Fermi, *Elettrodinamica. Prima edizione integrale del dattiloscritto del Corso di Fisica Matematica (Lezioni di Elettrodinamica e Teoria della Relatività) del 1924-1925 presso l'Università di Firenze*, W. Joffrain (a cura di), Ulrico Hoepli Editore, Milano 2006;
- B. Pontecorvo, *Enrico Fermi*, Edizioni Studio Tesi, Pordenone, 1993;
- G. Segrè, B. Hoerlin, *The Pope of Physics: Enrico Fermi and the Birth of the Atomic Age*, Henry Holt and Co. 2016, (edizione italiana di Raffaello Cortina Editore, Milano 2017)
- D. N. Schwartz, *The Last Man Who Knew Everything*, Basic Books, New York 2017 (edizione italiana di Solferino Editore, Milano 2018).

Curiose testimonianze del periodo fiorentino di Enrico Fermi possono esser trovate in un'intervista a Franco Rasetti di Judith R. Goodstein¹, ar-

¹ J.R. Goodstein, *Conversando con Franco Rasetti*, traduzione di E. Piccio in «Sapere», giugno 2003 (versione integrale in «Physics in perspective», vol. III, 2001).

Fig. 1 – Carta dell'Istituto Geografico Militare 1913-1920. Nella carta appare l'Istituto di Fisica, l'Istituto di Fisica Terrestre e il Regio Osservatorio Astronomico. L'Istituto di Fisica Terrestre è il nucleo dal quale ha avuto origine l'Istituto Nazionale di Ottica e, quindi, dovrebbe essere proprio l'edificio in cui sono stati ospitati Franco Rasetti e Enrico Fermi. [Per cortesia dell'Archivio Storico del Comune di Firenze]

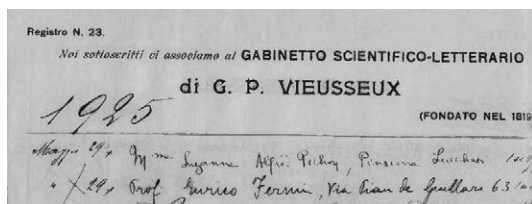


chivista presso l'Institute of Technology di Pasadena, California, tenuta il 4 febbraio 1982: ad esempio quella, in cui Rasetti racconta la sua temporanea convivenza con Enrico Fermi ad Arcetri:

And at the side of the physics building was a little building that was completely unoccupied and unfurnished. There, I had only one room, furnished with a bed and a little oil stove to keep warm, so to speak, to some extent. At least it raised the temperature some five or six degrees above the outdoor temperature at night. And I lived alone there, with only the company of some scorpions. [Laughter] If you had something hanging on the wall, like a picture, when you turned it, behind it was a scorpion and a few spiders. So I lived there for two years. The third year I was there, Fermi came [at the end of 1924], and we kept company for two years. But in these two years he took my room in this little building, which later became the first building of the National Institute of Optics².

² E accanto all'edificio di Fisica c'era un piccolo edificio che nessuno occupava e che era completamente privo di mobili. Lì ho avuto un'unica stanza, attrezzata con un letto ed una piccola stufa ad olio per scaldarsi, per così dire, in qualche modo. Almeno però riusciva ad alzare la temperatura di cinque o sei gradi rispetto alla temperatura esterna di notte. E ho vissuto da solo in quella stanza con l'unica compagnia di qualche scorpione. [Risata] Se avevi qualcosa attaccato alla parete, come un quadro, guardando dietro trovavi uno scorpione e qualche ragno. Dunque, ho vissuto lì per due anni. Il terzo anno in cui mi trovavo lì arrivò Fermi [alla fine del 1924] e ci siamo tenuti compagnia per due anni. Ma in questi due anni

Fig. 2 – La firma di Enrico Fermi sul libro dei soci del Gabinetto Scientifico-Letterario G.P. Vieusseux di Firenze. Dopo la firma si legge di pugno di Fermi il domicilio a Firenze «Via Pian de Giullari 63/a». [Per cortesia del Gabinetto Scientifico-Letterario G.P. Vieusseux]



Il primo contributo sugli anni fiorentini di Fermi ha per titolo *Enrico Fermi docente alla Regia Università degli Studi di Firenze*. Gli autori, Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori e Stefano Selleri, hanno avuto la pazienza di ‘rovistare’ nell’Archivio Storico dell’Università di Firenze per ricostruire il periodo relativo agli anni accademici 1924/25 e 1925/26, ricercando nomi, carriere e curiosità degli studenti, fisici, matematici e studenti del biennio di ingegneria, che hanno seguito il corso e dato il corrispondente esame. Il secondo contributo è il ricordo di Nello Carrara – compagno di studi di Enrico Fermi alla Scuola Normale di Pisa – in una conferenza, intitolata *Ricordi di Fermi* e tenuta al Rotary Club di Firenze nel maggio del 1955, pochi mesi dopo, quindi, la scomparsa di Enrico Fermi, avvenuta nel novembre 1954. Il terzo contributo, che ha per titolo *La statistica di Fermi: alle radici dell’elettronica dei semiconduttori*, di Giuseppe Pelosi e Massimiliano Pieraccini, ripercorre l’impatto della statistica di Fermi sulle applicazioni della Fisica dello stato solido. Il quarto contributo, di Paolo Rossi, rivede le tappe della creazione della prima cattedra di Fisica Teorica che porterà Fermi nel novembre 1926 a trasferirsi dall’Università di Firenze a quella di Roma.

Segue poi un contributo di Daniele Dominici e Giuseppe Pelosi sui soggiorni estivi dei coniugi Fermi a Villa Il Frassine, a Rignano sull’Arno, non lontano da Firenze. Infine il sesto e ultimo contributo, dal titolo *Una partita a tennis e tanti ricordi*, è di Carlo Franchetti, nipote di Enrico Fermi e già docente di Analisi Matematica presso la Facoltà di Ingegneria dell’Università di Firenze.

Tutti i dati, comprese le affiliazioni di coloro che hanno contribuito alla stesura dei testi, sono ‘fotografati’ alla data di pubblicazione del libro.

egli occupò la mia stanza in questo piccolo edificio, che in seguito divenne il primo edificio dell’Istituto Nazionale di Ottica.

ENRICO FERMI: UNA VITA INTENSA

Francesco Guerra, Nadia Robotti

Il mattino del 2 gennaio 1939, la motonave Franconia della Cunard Line, partita da Southampton in Inghilterra il 24 dicembre, attracca ai moli di Ellis Island a New York. Dalle cabine di seconda classe sbarcano Enrico Fermi, accompagnato dalla moglie Laura, nata Capon, e dai figli Nella e Giulio (Fig. 1). È con loro anche la giovane governante Bianca Casaroli. Con grande arguzia Fermi osserva che è stato fondato il ramo americano della famiglia. In effetti, l'arrivo sotto la Statua della Libertà del giovane brillante fisico italiano, appena insignito del Premio Nobel a soli 37 anni, rappresenta un punto di svolta, non solo nella sua vita personale e scientifica, ma anche per la storia del Novecento, se si tiene conto dei risultati strategici che l'attività di Fermi conseguirà negli Stati Uniti, capaci di influenzare gli equilibri geopolitici di tre continenti. Il passaggio dalla fase 'Fermi in Italia' a 'Fermi in America', da 'small science' a 'big science', è visivamente e simbolicamente sottolineato dal cambio drastico nello stile e dimensione dei quaderni in cui sono appuntate le sue note di ricerca, nelle collezioni alla Domus Galilaeana di Pisa e alla Biblioteca dell'Università di Chicago.

Fig. 1 – Enrico, Laura, Nella e Giulio sbarcati a New York.



Fig. 2 – Enrico Fermi ritira nell'aprile 1919 il Diploma di Licenza Liceale conseguita nella sessione di Luglio 1918 presso il Liceo 'Umberto I' a Roma (è la prima firma pubblica nota di Fermi). Liceo Pio Albertelli (già 'Umberto I'), Roma.

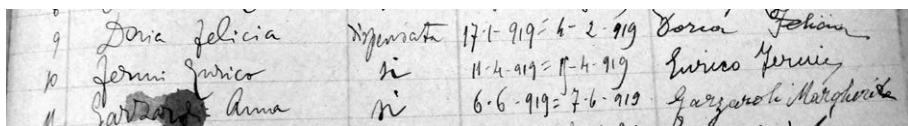


Fig. 3 – Quaderno di appunti di Fermi, 1920. [Domus Galilaeana, Pisa]



Enrico Fermi nasce a Roma, in una casa in via Gaeta, il 29 settembre del 1901, da Alberto, impiegato del Ministero delle Comunicazioni, e da Ida De Gattis, insegnante. Consegue la licenza liceale nel luglio 1918 (Fig. 2) presso il prestigioso Liceo Classico 'Umberto I', all'Esquilino, ora intitolato a Pilo Albertelli, professore di storia e filosofia dell' 'Umberto I', perito nell'eccidio delle Fosse Ardeatine il 24 Marzo 1944. Enrico Fermi è fin dall'epoca giovanile un entusiasta autodidatta (Fig. 3), e si impadronisce rapidamente di un vasto e approfondito corpo di conoscenze in Matematica e Fisica, incluse le ultime conquiste della Fisica Moderna. Nel 1918 vince per concorso un posto di allievo in-

terno della Scuola Normale Superiore di Pisa e si iscrive al corso di laurea in Fisica in quella Università. Il 4 luglio 1922 consegue la laurea, con pieni voti e lode, discutendo una tesi sperimentale sulla diffrazione dei Raggi X. Pochi giorni dopo, il 7 luglio consegue anche il Diploma di Abilitazione della Scuola Normale, con una tesi dal titolo *Un teorema di calcolo delle probabilità ed alcune sue applicazioni*¹. Già in questo periodo, addirittura ancora studente, pubblica alcuni lavori teorici di elettrodinamica e relatività.

Al suo rientro a Roma, ha un incontro decisivo con Orso Mario Corbino (Fig. 4), Senatore del Regno, Professore di Fisica Sperimentale e Direttore dell'Istituto di Fisica della Regia Università di Roma (Fig. 5). Questo incontro

¹ E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, University of Chicago Press and Accademia Nazionale dei Lincei, Chicago and Rome, 1962 and 1964, 38b.

sarà determinante per il suo futuro ed anche per quello della fisica italiana. Corbino, interessato allo sviluppo scientifico del suo Istituto, capisce di aver trovato in Fermi l'elemento adatto.

Seguendo le pratiche del tempo, Fermi nel 1923 viene accolto a Roma nella Loggia massonica 'Adriano Lemmi', allora di obbedienza alla Comunione di Piazza del Gesù, la stessa di Corbino.

La carriera accademica di Fermi si sviluppa regolarmente e rapidamente. Ne diamo un cenno sommario, cercando di porre in rilievo, in accordo con il carattere di questo Volume, alcuni aspetti caratteristici legati all'Istituto Fisico di Firenze in Arcetri. Nel 1923, con l'appoggio di Corbino, che era anche membro della commissione esaminatrice, ottiene una borsa di studio per l'estero del Ministero della Pubblica Istruzione. Si reca allora per alcuni mesi a Gottinga, presso l'Istituto di Max Born. Qui estende la sua rete di conoscenze con i maggiori fisici del tempo, ma il suo soggiorno è alquanto in anticipo sui tempi. Infatti le importanti ricerche sulla nuova meccanica quantistica partiranno solo nel 1925 con Werner Heisenberg, e saranno poi estese in collaborazione con lo stesso Born, e Pasqual Jordan. Al suo ritorno a Roma, Fermi tiene per incarico il Corso di Matematica per i Chimici per l'a.a. 1923/24. Nell'autunno del 1924, usufruendo di una borsa di studio della Rockefeller

Fig. 4 – Orso Mario Corbino (1876-1937). [Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"]



Fig. 5 – La palazzina di via Panisperna, sede dell'Istituto di Fisica della Regia Università di Roma. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"]



Foundation, si reca per tre mesi a Leida, dove stabilisce ottimi rapporti con Paul Ehrenfest, ricevendone stimoli per il suo coinvolgimento in problemi di meccanica statistica. La visita a Leida di Fermi è accuratamente preparata da Vito Volterra, che si occupa non solo di ottenere l'assenso della Rockefeller Foundation per l'appoggio finanziario, ma scrive anche personalmente a H. A. Lorentz per favorire i contatti con Paul Ehrenfest, e anche con i laboratori sperimentali di Heike Kamerlingh Onnes e Willem Hendrik Keesom. Nella sua lunga e dettagliata risposta, datata Haarlem 25 febbraio 1924, Lorentz assicura che Enrico Fermi troverà a Leida una accoglienza cordiale, e illustra ampiamente le possibilità di contatti scientifici, in accordo con gli interessi di ricerca di Fermi. La visita a Leida è prevista inizialmente per la durata di sei mesi, con un supporto globale di 700 dollari. Ma nuovi importanti sviluppi si profilano all'orizzonte, e la visita a Leida viene ridotta a tre mesi a partire dal primo settembre 1924.

Presso il Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche Enrico Fermi di Roma, è conservata una lettera molto significativa di Enrico Fermi, datata Roma 23 marzo 1924, e indirizzata a Ettore Bortolotti, Professore di Geometria alla Regia Università di Bologna (Fig. 6). Qui Fermi lo ringrazia

Fig. 6 – Lettera di Fermi del 23 marzo 1924 a Ettore Bortolotti (1866-1947). [Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche Enrico Fermi, Roma]

Roma, 23.3.1924.
Egregio Professore,
Tante grazie attribuite e Lei
alla signora e a tutta la
sua famiglia, per la cordiale
accoglienza fattami durante la
mia permanenza a Bologna.
Sono ormai di ritorno a
Roma dopo due brevi visite
a Firenze e a Pisa, dove
ho rivisto all'incirca dei vecchi
compagni di università di
Luca e sinici; alla scuola

Normale l'ambiente si è
già assai cambiato in questi
pochi anni, ed ho ormai tro-
vati assai pochi vecchi com-
pagni.
A Firenze ho preso qualche
accordo per una eventuale
mia sistemazione in quella
università, per l'anno venturo.
Ringraziandola di nuovo per
la gentile ospitalità, invio a
Lei e a tutta la Sua famiglia
distinti saluti.
Devoto
Enrico Fermi

per la cordiale accoglienza e ospitalità ricevuta a Bologna, ed accenna a due sue ulteriori visite a Pisa e Firenze. Chiaramente all'inizio del 1924 Fermi stava esplorando di persona le varie possibilità aperte per la sua futura sistemazione, prendendo in considerazione, oltre alla naturale soluzione Roma, dove copriva già un incarico di insegnamento, anche Bologna, Pisa, Firenze. Fermi era certamente in relativa confidenza con Ettore Bortolotti, in quanto anche compagno di corso a Pisa del figlio Enea. Nella lettera, Fermi ci rivela un fatto importantissimo, che riportiamo direttamente con le sue parole: «A Firenze ho preso qualche accordo per una mia eventuale sistemazione in quella università per l'anno venturo».

È questo il primo indizio che la traiettoria accademica di Fermi sta per toccare Firenze. Visto dall'esterno, pare proprio che Antonio Garbasso, direttore dell'Istituto Fisico di Firenze ad Arcetri, riesca ad ottenere un risultato strategicamente decisivo, nei confronti di Orso Mario Corbino in via Panisperna, assicurandosi la presenza ad Arcetri del più brillante giovane fisico italiano, già ampiamente affermato con una produzione scientifica di altissimo livello.

Certamente l'offerta di Firenze era al momento più conveniente per Fermi, in attesa che Corbino potesse perfezionare la strategia ottimale per assicurare Fermi a via Panisperna. Infatti Fermi riceve a Firenze per il 1924-1925 i due incarichi di insegnamento di Meccanica Razionale, per il terzo anno dei corsi di laurea in Matematica e in Fisica e Matematica, e di Fisica Matematica per il quarto anno. Questi corsi erano fatti seguire anche dagli studenti del Biennio propedeutico di Ingegneria. Gli incarichi sono rinnovati per il successivo anno accademico 1925/26. Poter svolgere due corsi molto vicini ai suoi interessi di ricerca sarà stata una grande soddisfazione per Fermi, che si liberava del noioso corso di Matematica per i Chimici. Non è un caso che Fermi alcuni anni dopo, nello stendere il suo curriculum per la conferma sulla Cattedra di Fisica Teorica a Roma, dichiara che i corsi svolti per incarico a Firenze erano stati «fisica teorica e meccanica razionale». Fin da allora per Fermi la Fisica Matematica andava intesa come Fisica Teorica. Purtroppo non abbiamo i registri delle lezioni del corso di Fisica Matematica, per poter vedere come Fermi aveva organizzato i suoi argomenti. Naturalmente, il corso di Meccanica Razionale, dato il suo carattere propedeutico non permetteva grande libertà nella scelta degli argomenti.

Il periodo passato sulla collina di Arcetri è estremamente proficuo per Fermi. Infatti nel 1925 consegue la libera docenza in Fisica Matematica, assicurandosi una presenza accademica molto più forte. Occorre notare che Fisica Teorica ancora non esisteva come disciplina ufficiale. Inoltre, è proprio durante il periodo fiorentino che Fermi perviene al suo primo risultato scientifico di assoluto valore internazionale: la formulazione della statistica del gas degenere di elettroni, da cui avranno origine importantissimi sviluppi futuri, compresa la teoria elettronica dei metalli.

La nuova meccanica quantistica si era sviluppata, a partire dalla poco maneggevole formulazione matriciale di Werner Heisenberg del 1925, in una

forma equivalente ma più rassicurante e familiare, in quanto coincidente l'equazione d'onda di Schrödinger, introdotta agli inizi del 1926. Inoltre, Wolfgang Pauli già nel 1925, aveva formulato il suo principio di esclusione per cui due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantico. Enrico Fermi pubblica i suoi risultati sulla statistica di particelle identiche, che seguono il principio di Pauli, in una serie di lavori, a partire da una nota lineare, dal titolo *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*², apparsa agli inizi del 1926, e presentata dal Socio Antonio Garbasso nella seduta del 7 febbraio, seguita da un articolo sulla «Zeitschrift für Physik», dal titolo *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases*, inviato per la pubblicazione il 26 marzo³. Pochi mesi dopo, indipendentemente, Paul Dirac perviene a risultati analoghi, esposti in un lavoro pubblicato sui «Proceedings of the Royal Society» il primo ottobre del 1926, ma inviato per la pubblicazione il 26 agosto, in cui Fermi non viene affatto citato. Ma la reazione di Fermi è immediata. In una cortese, ma ferma lettera (Fig. 7) su carta intestata dell'Istituto Fisico di Roma, datata 25 ottobre 1926, e quindi inviata solo pochi giorni dopo la pubblicazione dell'articolo di Dirac, viene ristabilita la verità dei fatti. Ne riportiamo il testo, perché tipico dello stile peculiare dell'autore:

Dear Sir! In your interesting paper "On the Theory of Quantum Mechanics" (...) you have put forward a theory of the Ideal Gas based on Pauli's principle. Now a theory of the ideal gas that is practically identical to yours was published by me at the beginning of 1926 (...). Since I suppose that you have not seen my paper, I beg to attract your attention on it. I am, Sir, Your Truly
 Enrico Fermi

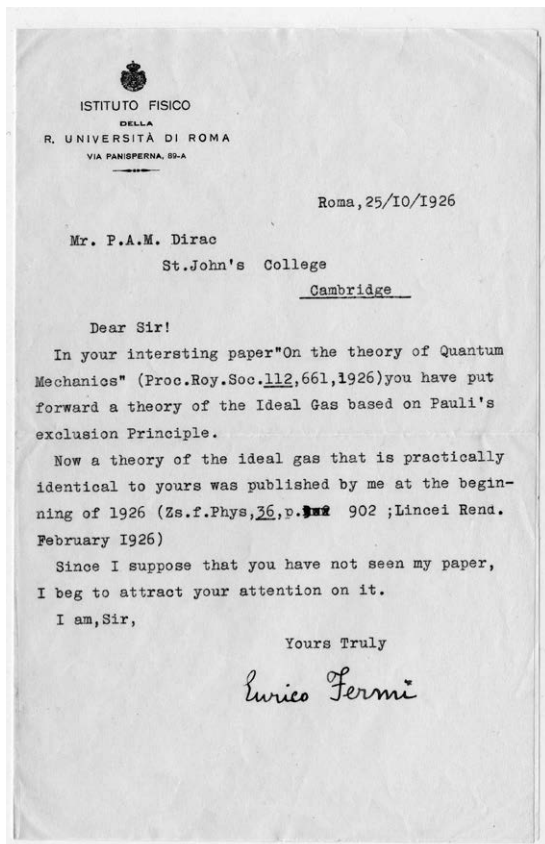
Non abbiamo il testo della risposta di Dirac, che però certamente accetta la precisazione di Fermi, tanto che in un lavoro successivo propone di chiamare statistica di Fermi la distribuzione statistica coinvolta. La Storia ha cristallizzato la denominazione di 'statistica di Fermi-Dirac'. Inoltre le particelle corrispondenti sono state chiamate 'Fermioni'. Senza la lettera di Fermi, forse si sarebbe arrivati al termine 'Dirachioni'.

Nel 1926, Enrico Fermi, a venticinque anni, è ormai una personalità completamente affermata nel panorama scientifico internazionale. La sua produzione conta una cinquantina di lavori di altissimo livello, su un vasto spettro di argomenti che comprendono l'elettromagnetismo, la relatività generale, i raggi Röntgen, la meccanica, la teoria ergodica, l'effetto fotoelettrico, la meccanica statistica, la meccanica quantistica, la spettroscopia. Da notare un lavoro in collaborazione con Aldo Pontemoli *Sulla massa della radiazione in uno spazio vuoto*, e uno con Enrico Persico su *Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria*. Questi lavori in collaborazione tra i tre giovani colleghi, tutti di formazione romana, sembra-

² E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit., n. 30.

³ Ivi, n. 31.

Fig. 7 – Lettera di Fermi a Paul Dirac (1902-1984).
[Florida State University, Special Collections and Archives,
Dirac papers]



no avere quasi un valore simbolico, che prefigura alcuni importanti sviluppi futuri. La produzione scientifica di Fermi comprende anche lavori sperimentali, come quelli pionieristici sugli effetti di un campo alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza, svolti nel 1925 a Firenze in collaborazione con Franco Rasetti, preludio delle collaborazioni future.

Nel frattempo, Orso Mario Corbino era riuscito, nel suo lusingante tentativo di istituire una Cattedra di Fisica Teorica a Roma, a far bandire il relativo concorso nazionale, il primo in Italia. L'esito del concorso, per soli titoli, è scontato: laterna dei vincitori comprende Enrico Fermi al primo posto, all'unanimità, Enrico Persico al secondo, a maggioranza,

e infine Aldo Pontremoli al terzo, all'unanimità. Fermi viene subito chiamato a Roma, dove prende servizio il primo gennaio del 1927. Persico va a Firenze e poi a Torino. Pontremoli va a Milano, ma poi incontra un tragico destino partecipando nel 1928 alla spedizione polare di Umberto Nobile con il dirigibile Italia.

L'attività di Fermi a Roma prosegue con regolarità. Negli anni dal 1927 al 1933, assistiamo, tra l'altro, allo sviluppo del modello statistico dell'atomo, con le sue varie applicazioni agli spettri atomici, allo studio dell'elettrodinamica quantistica, con metodi semplici e innovativi, che hanno formato una generazione di ricercatori, alla spiegazione delle strutture iperfini in spettroscopia come conseguenza dei momenti magnetici del nucleo.

Il 17 luglio del 1928 Fermi si unisce in matrimonio (Fig. 8) con rito civile con Laura Capon, figlia dell'Ammiraglio Augusto, esponente di spicco

della comunità ebraica romana. Augusto Capon è un grande servitore dello Stato, deciso nazionalista schierato verso l'acquisizione della sponda dalmata sotto lo pseudonimo di Adriacus, e purtroppo onesto e coerente sostenitore del Fascismo dall'inizio, fino al suo arresto avvenuto nell'ottobre del 1943 durante la razzia nel ghetto, operata dalle forze di occupazione germaniche, che lo porta alla deportazione e alla morte. Dall'unione nascono due figli, Nella nel 1931, e Giulio nel 1936, che sono battezzati nel 1936 presso la Chiesa di Santa Bonosa in via Tirso. Alla vigilia della partenza per Stoccolma, e gli Stati Uniti, il 5 dicembre del 1938, i coniugi contraggono anche il matrimonio secondo il rito cattolico, officiato dal monsignore Ernesto Ruffini, presso la Parrocchia S. Roberto Bellarmino in Piazza Ungheria, dopo che Laura ha ricevuto il prescritto sacramento del battesimo.

Fig. 8 – Matrimonio di Enrico Fermi con Laura Capon, 19 luglio 1928, Roma. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”]



Il 18 marzo 1929, con un Decreto Reale su proposta del Capo del Governo, Benito Mussolini, Fermi è nominato tra i primi trenta membri della neocostituita Accademia d'Italia. Esprime la sua soddisfazione per l'evento in una pagina di un suo quaderno di appunti di ricerca custodito alla Domus di Pisa, scrivendo a caratteri maiuscoli con la matita blu la frase: «A - VII - 18-3-29 - INCIPIT VITA NOVA — GAUDEAMUS IGITUR». Si tratta di una delle pochissime manifestazioni personali in un quaderno di ricerca di Fermi, dove egli riprende, nell'appropriato contesto 'accademico', le parole di un inno goliardico certamente appreso negli anni di studio a Pisa: «Gaudeamus igitur, Iuvenes dum sumus». Una efficace astuzia del Regime era stata quella di garantire agli accademici non solo simbolici diritti di precedenza nelle cerimonie ufficiali, subito dopo il Vice av-

vocato generale dello Stato, ma anche una sorta di congrua prebenda di ben 36.000 Lire annue, corrispondenti circa al doppio dello stipendio di un professore universitario.

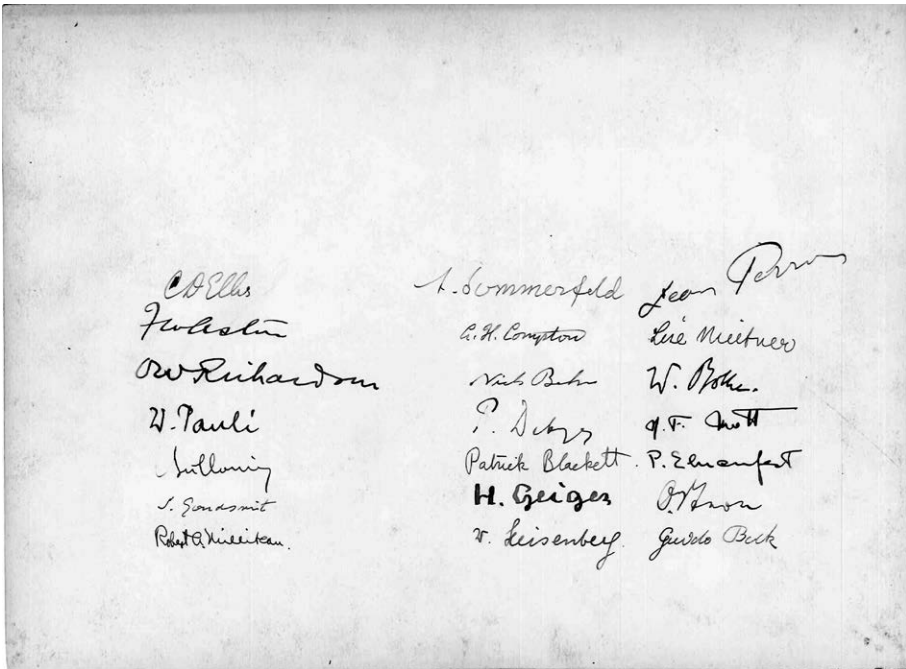
La data ufficiale di iscrizione di Fermi al Partito Nazionale Fascista è quella del 27 aprile 1929, circa quaranta giorni dopo la nomina all'Accademia, tanto che Mussolini, dopo l'espatrio di Fermi negli Stati Uniti, si affrettò a dire, creduto da pochi, che lo aveva nominato Accademico d'Italia nel 1929 senza nemmeno sapere se fosse iscritto al Partito. Esiste però una ben nota fotografia (Fig. 9) che mostra Fermi esibire sul risvolto sinistro della giacca una riconoscibilissima 'cimice' del P.N.F. mentre è in barca sul lago di Como nel 1927, in compagnia di Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli. Sulla base di alcuni documenti ministeriali, si deve ritenere che l'iscrizione sia avvenuta nel 1926. Naturalmente, Fermi firmò il prescritto giuramento di fedeltà al Regime fascista, in data 23 novembre 1931.

Fig. 9 – Enrico Fermi, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli in barca sul lago di Como nel 1927. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”]



Nell'ottobre del 1931, Orso Mario Corbino ed Enrico Fermi riescono a organizzare a Roma un evento di natura epocale: una grande conferenza internazionale sulla fisica nucleare, la prima al mondo per ampiezza e risonanza (Fig. 10). Vi partecipano circa cinquanta invitati ufficiali, tra cui sette premi Nobel, e molti futuri insigniti. Questa conferenza mostra che ormai il centro di interesse di Corbino e Fermi si è spostato verso la fisica nucleare, che costituisce la vera frontiera della ricerca dopo il sostanziale esaurimento della fisica atomica e molecolare, con l'avvento e lo sviluppo della nuova meccanica quantistica di Heisenberg, Born, Jordan, Dirac, Schrödinger.

Fig. 10 – Fronte: Partecipanti alla conferenza di Fisica Nucleare, Roma 1931. Retro: Firme di alcuni dei partecipanti. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”]



La conferenza ha grande successo e costituisce una sede molto efficace per un proficuo dibattito tra i massimi esperti del settore sullo stato attuale e sui possibili sviluppi della ricerca sulla costituzione dei nuclei atomici. Solo pochi mesi dopo, nel mitico Laboratorio Cavendish diretto da Ernest Rutherford a Cambridge, James Chadwick riesce a dimostrare l'esistenza di un nuovo costituente nucleare, il neutrone, una particella di massa comparabile a quella del protone ma senza carica. La scoperta del neutrone produce una vera rivoluzione nella fisica nucleare. In particolare, Werner Heisenberg ed Ettore Majorana riescono a dimostrare che è possibile costruire modelli realistici del nucleo atomico, nell'ambito della meccanica quantistica esistente, assumendo protoni e neutroni come costituenti elementari di base, tenuti insieme da appropriate forze di scambio.

In questo contesto Enrico Fermi si inserisce con la massima autorevolezza ed efficacia. Si apre un periodo di ricerca che ha quasi del miracoloso, in cui Fermi nel giro di pochi mesi, dal dicembre del 1933 all'ottobre dell'anno successivo, riesce ad ottenere risultati strepitosi di assoluto livello internazionale. Nel dicembre del 1933, partendo dal modello nucleare di Heisenberg-Majorana, costituito da soli protoni e neutroni, Fermi formula una innovativa teoria del decadimento beta, in un ambito di teoria quantistica dei campi, secondo cui l'elettrone beta non pre-esiste nel nucleo, ma viene creato al momento del decadimento, insieme con un neutrino di Pauli, in conseguenza della trasformazione di un neutrone in protone. In questo modo si rispetta la conservazione dell'energia e della carica, e si rende conto dello spettro beta continuo, come conseguenza della diversa distribuzione dell'energia disponibile, tra elettrone beta e neutrino, che sfugge all'osservazione. Inoltre, nel marzo del 1934, guidato dalla sua teoria del decadimento beta, dimostra che è possibile produrre radioattività indotta tramite bombardamento con neutroni. La strumentazione usata da Fermi in questa scoperta è estremamente semplice, ma efficace. Le sorgenti di neutroni sono costituite da piccole fialette di vetro riempite di polvere di berillio e di emanazione di radio (Fig. 11), messe a disposizione con frequenza settimanale da Giulio Cesare Trabacchi, direttore del Laboratorio Fisico dell'Istituto Superiore di Sanità, ospitato nell'edificio di via Panisperna. I rivelatori sono contatori di Geiger-Müller (Fig. 12), costruiti da Fermi con l'aiuto dei fisici di Arcetri. Infine, nell'ottobre dello stesso anno vengono scoperti gli effetti dei neutroni lenti che migliorano di gran lunga l'efficacia nel produrre radioattività indotta.

La scoperta della radioattività beta indotta da neutroni riguarda all'inizio solo due elementi, alluminio e fluoro, e viene immediatamente comunicata da Fermi con una *Lettera alla Ricerca Scientifica* del 25 marzo 1934⁴. Nel giro di pochi giorni Fermi riesce a testare da solo decine di altri elementi, co-

⁴ E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit., n. 84a.

me comunica in una ulteriore *Lettera alla Ricerca Scientifica*⁵ e in una lettera a «Nature», inviata il 10 aprile⁶.

Fig. 11 – Sorgenti di neutroni di Fermi. [Domus Galilaeana, Pisa]

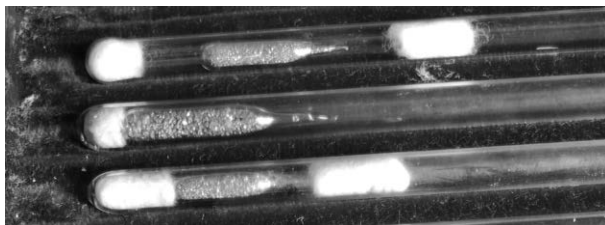
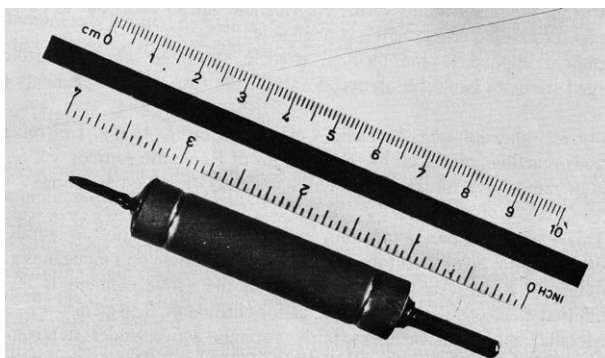


Fig. 12 – Contatore Geiger di Fermi. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”]



Naturalmente non è questa la sede opportuna per una descrizione dettagliata delle motivazioni, metodi e procedure adottate da Fermi per la sua scoperta, per cui rimandiamo alla nostra monografia⁷. È importante però osservare che è possibile ricostruire nei minimi dettagli tutte le fasi della scoperta iniziale della radioattività indotta da neutroni tramite le informazioni contenute nel primo quaderno di laboratorio di Fermi, da noi localizzato nell'archivio 'Oscar D'Agostino', presso l'omonimo Istituto Tecnico per Geometri in Avellino.

Vogliamo anche fare alcune osservazioni sui contatori di Geiger-Müller utilizzati da Fermi nella fase della scoperta, che forniscono ulteriore testimonianza dei suoi persistenti legami con l'Istituto Fisico di Arcetri.

Certamente Fermi, nel predisporre i suoi contatori deve aver usufruito delle competenze di Bruno Rossi, suo amico da lunga data.

⁵ Ivi, n. 84b.

⁶ Ivi, n. 93.

⁷ F. Guerra, N. Robotti, *The Lost Notebook of Enrico Fermi - The True Story of the Discovery of Neutron-Induced Radioactivity*, Società Italiana di Fisica and Springer Verlag, Bologna - Berlino, 2018.

In Italia Bruno Rossi era il pioniere nell'uso dei contatori di Geiger-Müller e anche uno dei più grandi esperti nella loro costruzione. Nel 1930, con una borsa di studio del C.N.d.R., Rossi si era recato presso il laboratorio di Walther Bothe al Physikalisch-Technische Reichsanstalt a Charlottenburg (Berlino), proprio per impraticarsi nella tecnica dei contatori Geiger-Müller. In questa occasione, come egli stesso racconta, era venuto a conoscenza direttamente da Bothe del 'segreto' che garantiva ai contatori di Berlino un funzionamento pronto e affidabile: il filo centrale non era costruito in acciaio, come era consuetudine ufficialmente stabilita anche nelle pubblicazioni, ma era fatto in alluminio, opportunamente trattato.

Di questo segreto sembra che Rossi abbia fatto partecipe Fermi. Infatti, come verrà dichiarato da Fermi nell'articolo conclusivo sul «Nuovo Cimento» del maggio del 1934 a solo suo nome⁸, i contatori erano stati costruiti con il filo centrale di alluminio, e quindi seguendo proprio il procedimento che Bothe aveva confessato a Rossi.

Sembra proprio che il 'segreto di Bothe' da Berlino sia giunto fino a Roma, passando per Arcetri.

Richiamiamo anche l'attenzione su alcune notizie fornite da Edoardo Amaldi, a proposito dei contatori a disposizione dei laboratori a Roma. Come scrive Amaldi:

Vorrei aggiungere un ultimo piccolo ricordo, che risale alla primavera del 1934. A Roma, Fermi, alla fine di marzo di quell'anno, aveva scoperto la radioattività artificiale provocata dai neutroni, ed il nostro Gruppo aveva cominciato a svolgere uno studio sistematico di questo fenomeno nella maggior parte degli elementi. A tale scopo ci servivamo di contatori di Geiger molto piccoli e a pareti sottili che avevamo imparato a costruire da noi, anche consultando Bruno Rossi che stava ormai a Padova, mentre Gilberto [Bernardini] e Daria [Bocciarelli] erano rimasti a Firenze. Essi avevano un'esperienza ben più lunga e consolidata della nostra, dato che da anni usavano quella stessa tecnica per lo studio dei raggi cosmici.

Un fine settimana di aprile o maggio 1934 vennero a Roma Bernardini, [Giuseppe] Occhialini, Daria Bocciarelli ed Emo Capodilista; ci portarono delle scatole piene di contatori Geiger e di contatori proporzionali: erano un regalo per aiutarci nel nostro lavoro. Li avevano costruiti per noi, dedicando alla loro realizzazione e prova un tempo notevole, almeno dieci o quindici giorni. Però devo dire che poi non li abbiamo mai usati. Erano bellissimi e funzionavano benissimo, ma purtroppo la geometria non era quella adatta perché a noi servivano molto più piccoli. [...] Anche a distanza di anni debbo dire di non aver mai sentito di nessun altro episodio di tanta generosità e concreta amicizia come quella mostrata dagli amici di Firenze in quella occasione.⁹

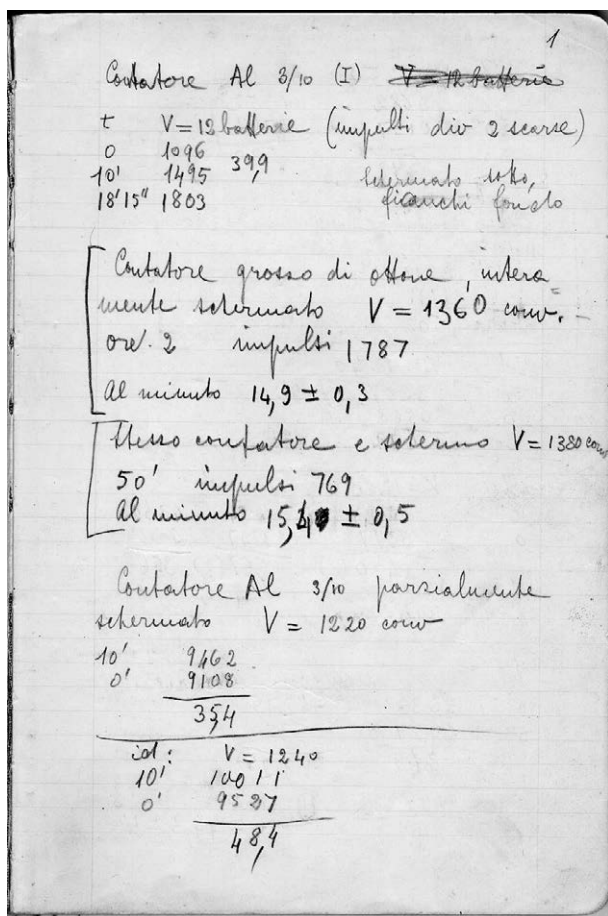
⁸ E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit., n. 96.

⁹ F. Guerra, N. Robotti, *The Lost Notebook of Enrico Fermi - The True Story of the Discovery of Neutron-Induced Radioactivity*, cit.

Naturalmente se invece la visita riportata da Amaldi fosse in realtà avvenuta nel marzo 1934, allora tutta la ricostruzione sui contatori utilizzati a Roma andrebbe rivista, e il ruolo di Arcetri ne verrebbe amplificato.

Nelle pagine iniziali del Quaderno di Avellino, Fermi registra prove di funzionamento effettuate su una serie di contatori, da lui denominati *Contatore Al 3/10*, *Contatore grosso di ottone*, *Contatore Al 2/10*, *Contatore 4 Al P 301*, *Contatore 5 Al P 201*, *Contatorino Al 1* (Fig. 13).

Fig. 13 – Pagina del quaderno di laboratorio di Enrico Fermi in Avellino. [Fondazione ‘Oscar D’Agostino’, Avellino]



Sembra una lista troppo lunga, alquanto incongruente con l'idea che semplici contatori fossero stati costruiti autonomamente. In particolare risulta strano che Fermi abbia costruito anche un «contatore grosso di ottone», che invece avrebbe trovato più logica utilizzazione per ricerche sui raggi cosmici. Se l'ipotesi che i contatori siano stati forniti da Arcetri fosse vera, allora

ci sarebbe una naturale interpretazione: Fermi effettua delle prove per stabilire quali sono i migliori contatori, più adatti per le sue ricerche, e in quali condizioni di funzionamento. Naturalmente sarebbero necessarie altre prove documentali per poter raggiungere conclusioni certe su questa importante questione.

Dopo la scoperta della radioattività indotta da neutroni, Fermi dà l'avvio a un progetto di grande respiro che riguarda la ricerca sistematica a tappeto su tutta la tavola periodica degli elementi, avvalendosi della collaborazione, in ordine di tempo, di Oscar D'Agostino, Emilio Segrè, Edoardo Amaldi, Franco Rasetti. In un primo lavoro conclusivo su questa prima fase delle ricerche sistematiche, sottomesso per la pubblicazione sui *Proceedings of the Royal Society (London)* nel luglio del 1934¹⁰, viene riportato che su un totale di circa 60 elementi provati, ben più di 40 risultano attivati producendo decine di nuovi nuclidi beta instabili.

Alla ripresa dopo le vacanze estive, Bruno Pontecorvo, che finora era stato impiegato in ricerche spettroscopiche, si unisce al gruppo di ricerca, giusto in tempo per partecipare ad una nuova importante scoperta e all'analisi sistematica delle sue conseguenze. Dopo una serie di significativi indizi di anomalie, che non possiamo qui esaminare in dettaglio, ma in cui il ruolo di Pontecorvo è essenziale, sabato 20 ottobre Fermi, «con intuito formidabile», scopre che l'interposizione di uno blocco di paraffina tra la sorgente di neutroni e il campione da irradiare rende molto più efficace il bombardamento neutronico agli effetti della produzione di radioattività indotta, almeno in tutte le reazioni in cui il nuclide prodotto ha lo stesso numero atomico del nucleo iniziale (reazioni (n,γ)).

Fermi comprende subito che i neutroni sono rallentati dagli urti elastici con i protoni contenuti negli atomi di idrogeno della paraffina, e che la sezione d'urto di assorbimento ha un andamento che cresce con il diminuire della velocità dei neutroni incidenti, per un effetto di risonanza quantistica. Anche l'acqua, a causa della presenza di nuclei di idrogeno, ha proprietà analoghe alla paraffina. Laura Fermi¹¹ fornisce una vivida e fortunata descrizione di esperimenti effettuati nella fontana dei pesci rossi nel giardino della palazzina di via Panisperna.

Sono risultati anche di grande valenza applicativa. Infatti, con questi metodi è possibile realizzare praticamente nuove sostanze artificiali radioattive, non esistenti in natura, da utilizzare per cure mediche, o come traccianti per lo studio delle reazioni chimiche e delle reazioni metaboliche negli organismi viventi. Il metodo dei neutroni lenti viene immediatamente brevettato per le sue prospettive applicative. Tutti i più importanti sviluppi in Fisica nucleare dopo il 1934, nel bene e nel male, saranno basati sui neutroni lenti. Il brevetto (Fig. 14) ha come primo firmatario Enrico Fermi, seguito dai suoi

¹⁰ E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit., n. 98.

¹¹ L. Fermi, *Atomi in famiglia*, University of Chicago Press, Chicago, 1954.

Fig. 14 – Il brevetto di Fermi e collaboratori sui neutroni lenti. [Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”]

REGISTRO 194 NUM. D'ORDINE 148

MINISTERO DELLE CORPORAZIONI
Ufficio della Proprietà Intellettuale

L'anno 1934, il giorno venticinque del mese di Settembre
alle ore 18,15 il Sig. Ing. Letterio Labocetta p. s. dei sigg.
Enrico Fermi, Edoardo Amaldi, Oscar d'Agostino,
Bruno Pontecorvo, Franco Rasetti, Emilio Segrè,
Giulio Cesare Trabacchi
ha presentato a me sottoscritto: Roma

1. Domanda di attestato di Priv. Ind.
per un trovato avente per titolo:
Metodo per accrescere il rendimento dei
procedimenti per la produzione di radioattività
artificiale mediante il bombardamento
con neutroni.

2. Descrizione in triplo.

3. Disegno nessun in triplo

4. Lettera d'incarico

5. Vaglia N. 14 della Tassa pagata in L. 380 del 26.10.34 x u.

6. Marca da bollo da L. 5,00.

7.

8.

La domanda, la descrizione e i disegni sono stati firmati dal

collaboratori in stretto ordine alfabetico: Edoardo Amaldi, Oscar D'Agostino, Bruno Pontecorvo, Franco Rasetti, Emilio Segrè, e Giulio Cesare Trabacchi, che, come direttore del Laboratorio Fisico dell'Istituto di Sanità Pubblica, ha fornito le sorgenti di neutroni.

Dopo la scoperta degli effetti dei neutroni lenti, Fermi abbandona le ricerche radiochimiche, volte all'individuazione chimica dei nuclidi radioattivi prodotti, e si dedica con lungimiranza, allo studio sistematico del rallentamento, diffusione, assorbimento dei neutroni nelle varie sostanze.

Illustri esponenti della comunità scientifica internazionale, tra i quali Werner Heisenberg, Victor Hess, Max Planck, James Franck, Arthur Compton, Erwin Schrödinger, Chandrasekhara Raman, propono

Fermi già per il Premio Nobel 1935, con successive riproposte per il 1936, 1937, 1938.

Infine l'Accademia delle Scienze svedese gli assegna il Premio Nobel per la Fisica 1938 (Fig. 15), con la seguente motivazione: «per la Vostra scoperta di nuove sostanze radioattive appartenenti all'intero campo degli elementi e per la scoperta, da Voi fatta nel corso di tali studi, del potere selettivo dei neutroni lenti». Si tratta di un Premio Nobel tutto italiano. Fermi è stato capace di ottenere risultati epocali in Fisica nucleare, sfruttando al meglio le scarse risorse esistenti in Italia, aiutato dalla sua intuizione fisica, ma anche dal suo coraggio e determinazione.

Ben prima dell'assegnazione del Premio Nobel, Enrico Fermi si rende conto che l'espatrio è ormai inevitabile. Entrano in maniera determinante un complesso di ragioni molto differenti. Certamente conta l'impossibili-

tà di proseguire le ricerche in Italia, a causa della mancanza di mezzi strumentali adeguati. Infatti le agili ed affidabili sorgenti di neutroni ‘fatte in casa’, costituite da una fialetta di vetro riempita di radon e di polvere di berillio, con cui Fermi aveva fatto le sue scoperte, non consentivano più di proseguire le ricerche in modo competitivo a livello internazionale. Erano necessarie sorgenti molto più potenti che solo gli acceleratori di particelle potevano assicurare. Ma un ciclotrone, anche di modesta potenza, era molto al di là delle possibilità concrete offerte da una ‘Italietta’ alquanto sottosviluppata, seppure con vocazioni imperiali. Esistono poi per Fermi problemi seri legati alla valorizzazione dei brevetti sui neutroni in Italia, cioè in un ambiente poco favorevole dal punto di vista economico e industriale. Fermi, infatti, non solo è titolare del ben noto brevetto sui neutroni lenti, insieme con i suoi collaboratori, ma ha anche fatto richiesta, nel 1935, di un altro brevetto, a solo suo nome, che coinvolge tutte le interazioni dei neutroni con la materia. Questa richiesta, depositata negli Stati Uniti e in Canada, ha una vita molto travagliata, e viene ostacolata in tutti i modi. Quindi un inserimento totale di Fermi negli Stati Uniti certamente avrebbe favorito la valorizzazione di questi due brevetti. Occorre anche considerare che il contesto socio-politico in Italia sta subendo una deriva molto pericolosa. Il carattere totalitario dello Stato si inasprisce. La politica si avvicina sempre più a quella della Germania nazista. L'Italia si avvia a promulgare leggi razziali assolutamente inaccettabili nella loro infamia. Inoltre si fanno sempre più concrete le possibilità di un imminente conflitto generalizzato, chiamato «guerrone» in alcune lettere di Bruno Pontecorvo.

L'espatrio di Fermi è accuratamente programmato. Innanzitutto, il 4 settembre 1938 (il Premio Nobel non è stato ancora assegnato) fa sapere alla

Fig. 15 – Diploma del Premio Nobel. [The University of Chicago Library]



Columbia University, che le ragioni che lo avevano indotto, due anni prima, a rifiutare l'offerta di una posizione stabile di professore non sono più valide e che accetta volentieri un incarico alla Columbia University, o anche in un altro posto. La data della lettera è in significativa e tempestiva correlazione con i provvedimenti adottati dal Consiglio dei ministri il 2 e il 3 settembre, in merito alla esclusione degli ebrei dall'insegnamento di ogni grado e ordine, e al divieto per gli alunni di «razza ebraica» di frequentare le scuole pubbliche. Inoltre, proprio il 3 settembre l'Accademia d'Italia, di cui Fermi è membro, ha costituito una commissione di accademici con il compito di studiare «quali furono attraverso i secoli le manifestazioni e i riflessi dell'ebraismo nella vita dell'Italia dai tempi di Roma antica ad oggi». Inoltre, egli sfrutta tutte le possibilità legali per poter espatriare con il pieno consenso delle autorità italiane. Ricevuta la notizia del conferimento del Premio Nobel, ottiene il permesso di partecipare alla cerimonia di consegna del Premio a Stoccolma, e di recarsi poi negli Stati Uniti, in congedo straordinario, per tenere un ciclo di lezioni alla Columbia University. Al termine del periodo di congedo, ottiene una aspettativa per motivi di famiglia, senza assegni. Al termine del periodo di aspettativa, nel 1940, comunica al Ministero che non può rientrare a prendere servizio, perché coinvolto in ricerche molto importanti. Il Ministero accetta le dimissioni. Sulla sua cattedra di Fisica Teorica, alla fine del 1940, viene chiamato Gian Carlo Wick, il maggiore fisico teorico rimasto in Italia.

Quindi, dopo aver ritirato il Diploma e la Medaglia del Premio Nobel per la Fisica dalle mani di Sua Maestà il Re Gustavo V di Svezia, nella fastosa cerimonia alla Sala dei Concerti di Stoccolma il 10 dicembre 1938, Enrico Fermi con la sua famiglia si reca a Copenhagen per un brevissimo soggiorno presso Niels Bohr, e poi si imbarca con la famiglia direttamente verso gli Stati Uniti, sfuggendo all'atmosfera arretrata e opprimente del Regime Fascista, e all'orrore delle leggi razziali e del conflitto imminente in Europa.

Per una singolare coincidenza, l'emigrazione di Fermi negli Stati Uniti avviene contemporaneamente alla scoperta, da parte di Otto Hahn a Berlino, di un nuovo fenomeno fisico, la fissione del nucleo di uranio per bombardamento con neutroni lenti, capace di liberare enormi quantità di energia.

Fermi, prima alla Columbia University e poi all'Università di Chicago, si lancia nell'impresa di sfruttare l'energia liberata dalla fissione a fini pratici, tramite una reazione a catena controllata. Si tratta di un problema scientifico e tecnologico formidabile. Infatti, il nucleo di uranio che subisce la fissione da parte dei neutroni lenti è l'isotopo raro 235, presente solo con una frazione dello 0.7% nell'uranio naturale. Nel corso della fissione sono liberati neutroni veloci, che dovranno essere rallentati, tramite un 'moderatore'. In maniera sistematica Fermi è coinvolto nella determinazione del numero di neutroni liberato per ogni fissione, nella scelta del moderatore, nella determinazione della geometria migliore su come disporre uranio e moderatore, in modo che il moderatore rallenti i neutroni senza assorbirne troppi, tenendo presente che l'isotopo più abbondante nell'uranio naturale,

il 238, è un avido assorbitore di neutroni ad una energia di risonanza che si colloca tra quella dei neutroni prodotti e quella dei neutroni termici utili alla fissione. Con queste ricerche Fermi partecipa a pieno titolo al progetto Manhattan, volto alla costruzione di armi nucleari, da usare possibilmente nella guerra in corso.

È avvincente seguire nel dettaglio, tramite lo studio dei rispettivi rapporti segreti, il confronto scientifico a distanza tra Enrico Fermi e il suo attuale formidabile rivale, Werner Heisenberg, coinvolto nell'analogo progetto nucleare tedesco. È significativo che entrambi sviluppano indipendentemente la teoria del reattore nucleare, in modo fisicamente equivalente, basandosi sul lavoro di Fermi sul rallentamento, diffusione e assorbimento dei neutroni nella materia, svolto nel 1935-1938, prima della scoperta della fissione. Ma seguiamo alcuni passaggi chiave dell'intera vicenda. Apprendiamo così che ancora nel marzo 1943 Fermi discuteva con Harold Urey sulla possibilità di usare l'acqua pesante come moderatore, come descritto nel rapporto segreto A-544¹². Mentre Heisenberg, tramite un bellissimo esperimento¹³ per valutare la lunghezza di diffusione di neutroni termici in acqua pesante, eseguito a Lipsia in collaborazione con Robert e Klara Döpel, perviene fin dall'agosto 1940 alla netta conclusione che «aus und 238 eine Maschine zur Energieerzeugung gebaut werden kann» («si potrà costruire un dispositivo per lo sfruttamento dell'energia tramite uranio naturale e acqua pesante»). D'altra parte, Fermi determina fin dal 25 settembre 1940 la corretta sezione d'urto di assorbimento dei neutroni termici sul carbonio (rapporto segreto A-21¹⁴), mentre Heisenberg deve far riferimento ad un elegante esperimento (Fig. 16) di Walther Bothe e Peter Jensen del gennaio 1941, descritto nel rapporto segreto G-71¹⁵ [5]. Purtroppo l'esperimento di Bothe e Jensen giunge alla fatale conclusione che «The gemessen Diffusionslänge ist soviel kleiner, die Absorption also soviel stärker, dass die hier untersucht Kohle als Bremsstoff für die Maschine kaum in Betracht kommen dürfte» («La lunghezza di diffusione misurata è tanto più piccola, e anche l'assorbimento è tanto più forte che il carbonio qui esaminato non può essere considerato come una conveniente sostanza di rallentamento per la macchina»). Non si può dubitare dell'abilità sperimentale di Bothe e Jensen, né della validità del loro apparato, che del resto deriva da ben noti metodi sviluppati da Fermi già nel 1936. Certamente l'elettrografite Siemens, a loro disponibile in quel momento, era carica di piccole impurità fortemente assorbenti per i neutroni, per le quali era difficile fare la dovuta correzione.

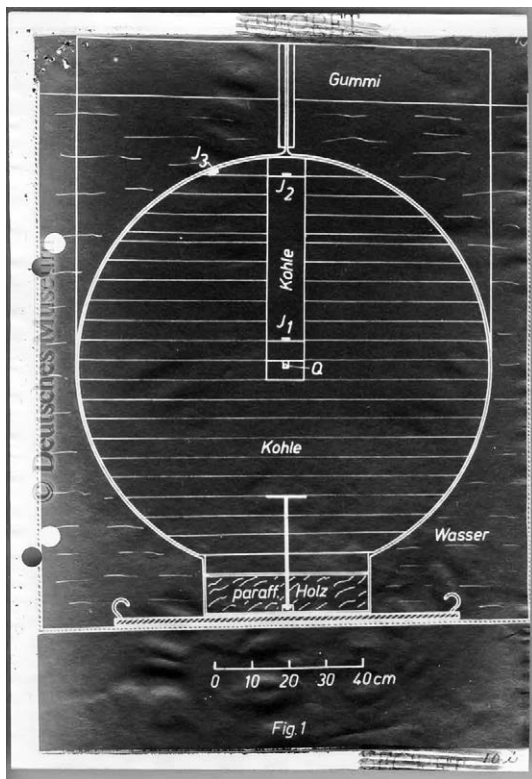
¹² E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit., n. 184.

¹³ R. u. K. Döpel, W. Heisenberg, *Bestimmung der Diffusionslänge in schwerem Wasser*, in W. Blum et al., *Werner Heisenberg: Gesammelte Werk. Collected Works, Series AIII*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

¹⁴ E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, cit. n. 136.

¹⁵ AA. VV., *Documenti Segreti 1939-1945*, <https://www.deutsches-museum.de/archiv/archiv-online/geheimdokumente/>.

Fig. 16 – L'apparato nell'esperimento di Bothe e Jensen.
[Archivi del Deutsches Museum, Muenchen]



Certo è che Heisenberg nel 1940-1941 si trova automaticamente indirizzato verso la scelta dell'acqua pesante come moderatore. Una scelta scientificamente corretta, che lo porta però a scontrarsi con la cronica scarsità negli approvvigionamenti di acqua pesante pura e uranio naturale, nella Germania in guerra dell'epoca. Nell'ultimo esperimento B8 svolto ad Heigerloch all'inizio del 1945, con le truppe Alleate in avvicinamento, il reattore di Heisenberg produce una forte moltiplicazione globale nel numero di neutroni, ma non raggiunge la condizione critica.

Invece Fermi circa nello stesso periodo decide per la grafite, che l'industria americana gli può fornire alla massima pu-

rezza. È noto che il 2 dicembre del 1942 Fermi riesce ad innescare la reazione a catena autosostenuta e controllata in un reattore sperimentale ad uranio naturale e grafite, posto sotto le tribune di uno stadio dismesso dell'Università di Chicago (Fig. 17). Si tratta di un risultato strategico fondamentale, che porta alla costruzione di reattori di potenza, capaci di produrre plutonio per irraggiamento neutronico di sbarre di uranio. Il plutonio è facilmente separabile dall'uranio per via chimica, ed è una sostanza altamente fissile.

Nell'ambito del progetto Manhattan, il Trinity Test del luglio 1945, mostra l'efficacia del plutonio come esplosivo nucleare. Per decisione dell'Amministrazione americana, due bombe nucleari vengono sganciate sul Giappone ad Hiroshima e Nagasaki. La prima è basata su uranio 235, disponibile in seguito al successo del programma di arricchimento dell'uranio naturale, la seconda è basata sul plutonio prodotto nei reattori di potenza.

Nel dopoguerra, Fermi si trova al vertice del suo successo. Ormai cittadino americano dal 1944, viene insignito dal Congresso nel 1946 della Medaglia al Merito, la più alta decorazione civile degli Stati Uniti (Fig. 18).

Può continuare le sue ricerche avendo a disposizione mezzi imponenti. Si consideri che il flusso di neutroni da un reattore nucleare può arrivare al fantastico valore di un milione di miliardi per centimetro quadrato per secondo, da paragonare con il valore di centomila per secondo delle sue prime sorgenti radon-berrillio. Con queste nuove sorgenti Fermi può compiere eleganti esperienze di diffrazione dei neutroni sui nuclei.

Fermi si inserisce con efficacia anche nello sviluppo e applicazioni dei primi calcolatori elettronici, pervenendo per esempio alla valutazione della distribuzione energetica in sistemi dinamici non lineari (modello di Fermi-Pasta-Ulam), un indirizzo di ricerca direttamente connesso ai suoi primi lavori di meccanica statistica.

Fermi si rivela anche un pioniere nella fisica delle alte energie, studiando la diffusione di pioni, prodotti al ciclotrone di Chicago, su protoni, e pervenendo alla scoperta delle risonanze pione-nucleone, tra le prime nuove particelle instabili create artificialmente.

Di notevole importanza è anche lo sviluppo di un semplice modello, tuttora qualitativamente valido, che permette di spiegare la grandissima energia dei raggi cosmici come dovuta agli urti, mediati da campi magnetici, di nuclei leggeri, in particolare protoni, con strutture di grandezza astronomica. In altre parole, i raggi cosmici parteciperebbero ad una sorta di equipartizione energetica con i corpi molto più grandi presenti nell'Universo.

Purtroppo un male incurabile lo stronca il 28 novembre 1954, a soli 53 anni, interrompendo ineluttabilmente la serie ulteriori di risultati scientifici che poteva raggiungere.

Fig. 17– Il reattore Nucleare di Fermi CP-1. [The University of Chicago Library]



Fig. 18– La Medaglia al Merito di Enrico Fermi. [The University of Chicago Library]



Bibliografia

- AA. VV., *Documenti Segreti 1939-1945*, <https://www.deutsches-museum.de/archiv/archiv-online/geheimdokumente/>.
- R. u. K. Döpel, W. Heisenberg, *Bestimmung der Diffusionslänge in schwerem Wasser*, in W. Blum et al., *Werner Heisenberg: Gesammelte Werk. Collected Works, Series AII*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- L. Fermi, *Atomi in famiglia*, University of Chicago Press, Chicago, 1954.
- E. Fermi, *Collected papers (Note e Memorie). Volume I & II*, University of Chicago Press and Accademia Nazionale dei Lincei, Chicago and Rome, 1962 and 1964.
- F. Guerra, N. Robotti, *The Lost Notebook of Enrico Fermi - The True Story of the Discovery of Neutron-Induced Radioactivity*, Società Italiana di Fisica and Springer Verlag, Bologna - Berlino, 2018.

IL CONTRIBUTO SCIENTIFICO DI ENRICO FERMI

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici

Questo volume vuole rendere omaggio ad Enrico Fermi per il periodo da lui trascorso a Firenze nella nostra Università, periodo breve ma estremamente significativo per la sua vita scientifica. Da un lato nel periodo fiorentino Fermi concepì il lavoro sul gas monoatomico sfruttando il principio di esclusione di Pauli: questo lavoro ha originato la statistica di Fermi-Dirac che ha una importanza fondamentale non solo in tutta la fisica moderna, ma anche in settori più applicativi, quali i semiconduttori e di conseguenza la moderna elettronica, la superconduttività e così via. Dall'altro Fermi ritrovò Franco Rasetti, un maestro della fisica sperimentale, che poi raggiunse lo stesso Fermi a Roma negli anni successivi. La presenza di Rasetti tra i 'ragazzi di via Panisperna' fu di grande rilievo per tutte le vicende connesse con l'attività del gruppo nella Fisica Nucleare. In questa breve nota abbiamo pensato di rendere omaggio alla carriera scientifica del grande scienziato italiano, elencando tutte le espressioni usate in Fisica e non solo, che siamo stati in grado di reperire, che contengano, in qualche forma, il nome di Fermi. Queste espressioni sono state raggruppate per argomento. Come apparirà evidente dalla lettura, risulta molto difficile trovare un argomento di Fisica in cui non appaia il nome di Fermi.

Statistica di Fermi-Dirac

Questo è forse uno dei contributi più importanti di Fermi perché, come vedremo, questa statistica sta alla base di numerosissimi fenomeni fisici. Il lavoro di Fermi fu sviluppato mentre era a Firenze negli anni 1925-1926 e dette luogo a due articoli, uno in italiano¹ e l'altro in tedesco², come usava all'epoca. Il lavoro di Fermi discuteva il comportamento di un gas monoatomico nell'assunzione che i singoli atomi soddisfacessero il Principio di esclu-

¹ E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Rendiconti Lincei», 145, 1926.

² E. Fermi, *Zur Quantelung des Idealen Einatomigen Gases*, «Zeitschrift für Physik», 36, 902, 1926.

sione di Pauli³. Pauli, per spiegare certe proprietà delle righe di emissione atomiche, aveva postulato che gli elettroni atomici possedessero un nuovo numero quantico (in seguito riconosciuto come lo spin) e che in uno stesso stato quantico non potesse stare più di un elettrone. Questo comportamento era profondamente diverso da quello dei fotoni che, viceversa, possono convivere in numero arbitrario nello stesso stato quantico. La situazione fu chiarita da Dirac⁴ che denominò la statistica delle particelle che obbediscono al Principio di Pauli «la statistica di Fermi» (poi ridenominata «statistica di Fermi-Dirac»). Come vedremo, la statistica di Fermi-Dirac ha importantissime conseguenze, dal collasso di una stella in una stella nana⁵ al comportamento degli elettroni nei metalli^{6,7}. Infatti molta della terminologia usata in questi settori fa riferimento a Fermi. Iniziamo con i seguenti termini.

Fermioni

Fu Dirac, in un una presentazione pubblica tenuta a Le Palais de la Découverte a Parigi, il 6 dicembre del 1945, a introdurre il nome di *fermioni* per le particelle che soddisfano il Principio di Pauli, e di bosoni per tutte le altre.

Gas di Fermi

È un insieme di un gran numero di particelle fermioniche non interagenti, caratterizzato dalla loro densità, la temperatura e l'insieme degli stati energetici disponibili. In questo gas, allo zero assoluto, l'energia totale è maggiore della somma delle energie dello stato fondamentale delle singole particelle a causa del principio di esclusione che, impedendo alle particelle di stare nello stesso stato quantico, crea una interazione o una pressione che tiene i fermioni lontani gli uni dagli altri e in movimento. Questa pressione stabilizza le stelle a neutroni (costituite per la massima parte da neutroni) o le stelle nane (con all'interno un gas di elettroni) contro la compressione dovuta alla gravità, e che tende a trasformare la stella in un buco nero. Questo fenomeno può però avvenire se la massa iniziale della stella risulta sufficientemente grande.

³ W. Pauli, *Über den Einfluß der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt*, «Zeitschrift für Physik», 31, 373, 1925.

⁴ P.A.M. Dirac, *On the Theory of Quantum Mechanics*, «Proceedings of the Royal Society», A 112, 661, 1926.

⁵ R.H. Fowler, *On dense matter*, «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», A 87, 114, 1926.

⁶ A. Sommerfeld, *Zur Elektronentheorie der Metalle*, «Naturwissenschaften», 15, 824, 1927.

⁷ R.H. Fowler, L.W. Nordheim, *Electron Emission in Intense Electric Fields*, «Proceedings of the Royal Society», A 119, 173, 1928.

Temperatura di Fermi

Nel contesto del gas di Fermi si definisce la temperatura di Fermi, sotto la quale la pressione deriva esclusivamente dal Principio di Pauli e il gas è detto degenerare. Questa temperatura dipende dalla massa dei fermioni e dalla densità degli stati energetici. Nel caso dei metalli è di molte migliaia di gradi Kelvin e quindi il gas di elettroni in un metallo a temperature ordinarie è un gas degenerare.

Energia di Fermi

La massima energia di un gas di fermioni a temperatura nulla è chiamata l'energia di Fermi.

Superficie di Fermi

Se si considera un gas di fermioni a temperatura nulla nello spazio degli impulsi, l'insieme degli stati energetici occupati forma un volume (*di Fermi*) la cui superficie, definita dal valore dell'energia di Fermi, viene detta superficie di Fermi. La superficie è una sfera (*di Fermi*) nel caso di fermioni liberi.

Vettore d'onda di Fermi

È il raggio della sfera di Fermi.

Liquido di Fermi

È noto anche con il nome di liquido di Landau-Fermi. Rappresenta un modello teorico in cui i fermioni che costituiscono il liquido non sono non interagenti, come per il caso del gas di Fermi, ma sono presenti delle interazioni reciproche. Il modello è più realistico di quello rappresentato dal gas di Fermi e spiega perché molte delle proprietà degli elettroni interagenti sono simili a quelle descritte dal gas di Fermi, mentre altre proprietà ne differiscano.

Livello di Fermi

Il livello di Fermi di un corpo rappresenta il potenziale elettrochimico per gli elettroni, ovvero il lavoro richiesto per aggiungere un elettrone al corpo stesso. Nel caso di un gas di elettroni non interagenti a temperatura zero coincide con l'energia di Fermi.

Quasi livello di Fermi

Il termine quasi livello di Fermi viene usato nella fisica dello stato solido quando si abbia una variazione della popolazione elettronica di equilibrio delle bande di conduzione e di valenza causata da una forza esterna, ad esempio l'applicazione di un potenziale elettrico. In queste situazioni non si può ricorrere al concetto di livello di Fermi ma si possono introdurre dei quasi livelli che facilitano la descrizione. I quasi livelli di Fermi sono anche denominati «imref» che è la parola «fermi» scritta in ordine invertito.

Arco di Fermi

Come abbiamo visto, l'energia di Fermi rappresenta la massima energia dei fermioni in un gas di Fermi a temperatura zero. Corrispondentemente la superficie di Fermi delimita la regione dello spazio degli impulsi che separa gli stati occupati dai fermioni (all'interno della superficie) e quella non occupata. Nel 1998⁸ si è scoperto che nei cuprati superconduttori ci sono dei segmenti in cui la superficie di Fermi è disconnessa. Queste zone sono dette archi di Fermi. Il fenomeno è tutt'ora sotto studio.

Fermi heap e Fermi hole

Letteralmente 'mucchio' e 'lacuna' di Fermi. È un fenomeno legato alla statistica di Fermi-Dirac che richiede che la funzione d'onda che descrive due fermioni cambi segno quando si scambiano tra loro tutti i numeri quantici dei due elettroni. La funzione d'onda complessiva ha una parte che descrive lo spin e una parte che descrive il moto orbitale dei due fermioni. Se la parte di spin non cambia segno per inversione, allora deve cambiare di segno la parte orbitale. Questo implica che la probabilità che i due fermioni siano vicini è piccola (hole). Nel caso opposto, cambia di segno la parte di spin e quindi la probabilità è massima quando i fermioni sono vicini (heap).

Punto di Fermi

La grafite in fogli è un materiale conduttore ma, quando la si arrotola in modo da formare un piccolo cilindro, il flusso di elettroni esterni viene inibito e la grafite diventa un semiconduttore. Si forma un punto di transizione tra la banda di valenza e quella di conduzione che è detto punto di Fermi.

⁸ M. Norman *et al.*, *Destruction of the Fermi surface in underdoped high-T_c superconductors*, «Nature», 392, 157, 1998.

Si parla di punto di Fermi anche in un contesto diverso (sebbene la spiegazione teorica sia simile). In un gas di Fermi, in presenza di un'interazione debole repulsiva, si ha una rottura della simmetria particella-antiparticella nel punto in cui l'energia della particella si annulla.

Integrale completo e incompleto di Fermi

Sono i tipici integrali dei momenti della distribuzione di Fermi-Dirac. Nel caso completo, l'integrazione va tra zero e infinito:

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{t^n}{e^{t-x} + 1} dt$$

Mentre nel caso incompleto, tra un limite inferiore arbitrario, b , e infinito:

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_b^\infty \frac{t^n}{e^{t-x} + 1} dt$$

Derivata e trasporto di Fermi-Walker

Se si considera una curva con vettore tangente V di tipo tempo, con derivata covariante a , la derivata di Fermi-Walker⁹ di un vettore X è definita dall'equazione:

$$\frac{D_F X}{dt} = \frac{DX}{dt} - \langle X, a \rangle V + \langle X, V \rangle a$$

L'annullarsi della derivata di Fermi-Walker permette di definire il corrispondente *trasporto* del vettore X lungo la curva con tangente V .

Coordinate di Fermi

Sono delle coordinate adattate a una linea geodetica di tipo spazio. Preso un punto P sulla geodetica, si possono scegliere delle coordinate tali che la

⁹ E. Fermi, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali», 31, 184, 306, 1922; A.G. Walker, *On small deformation of sub-spaces of a flat space*, «Proceedings of the London Mathematical Society», 42, 90, 1932.

distanza spaziale è espressa dal tensore metrico euclideo e i simboli di Christoffel si annullano¹⁰.

Il modello di Fermi, Pasta e Ulam

Nell'estate del 1953 Fermi, con i suoi collaboratori Pasta e Ulam¹¹, iniziò lo studio numerico dell'approccio all'equilibrio termico di una corda vibrante. La corda, approssimata da una catena lineare di masse connesse da molle, era sottoposta a forze anarmoniche di tipo cubico e quartico. Quello che gli autori si aspettavano era che il sistema andasse all'equilibrio termodinamico, come previsto dal teorema di equipartizione dell'energia. In particolare, eccitando uno dei modi possibili di vibrazione, gli autori si aspettavano che l'energia di eccitazione si distribuisse su tutti gli altri modi sino a dar luogo all'equilibrio termodinamico. Questo studio fu effettuato inizialmente sul computer MANIAC. I risultati furono sorprendenti: inizialmente tutto andava come previsto ma, dopo un migliaio di oscillazioni del periodo dello stato eccitato, il flusso di energia agli altri modi si invertiva e l'energia rifluiva nel modo eccitato inizialmente con una efficienza del 98%. Dunque il sistema non si stabilizzava all'equipartizione ma presentava dei quasi-modi di oscillazione. Questo lavoro ha dato origine a una linea di ricerca estremamente fruttuosa e si può affermare che ha dato inizio a una nuova era della fisica associata ai problemi non lineari.

Contributi importanti sono stati dati da Fermi nel campo delle particelle elementari, a partire dalla teoria del decadimento beta.

Teoria di Fermi del decadimento beta

Nel decadimento beta con un elettrone, un nucleo con Z protoni e numero di massa A si trasforma in un nucleo con $Z + 1$ protoni, stesso numero di massa A , un elettrone e un antineutrino. La teoria di Fermi del decadimento beta dei nuclei si basa su una analogia con quella dell'interazione elettromagnetica, ovvero postula una interazione proporzionale al prodotto di due correnti cariche: una, la corrente adronica, trasforma un neutrone in un protone, l'altra, leptonica, crea una coppia elettrone antineutrino. È chiama-

¹⁰ E. Fermi, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali», 31, 21, 1922.

¹¹ E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of the Nonlinear Problems*, I, Los Alamos Report LA-1940, 1955, later published in E. Segre (a cura di), *Collected Papers of Enrico Fermi*, vol. II, University of Chicago Press, Chicago 1965, p. 978; also reprinted in A.C. Newell (a cura di), *Nonlinear Wave Motion, Lecture Notes in Applied Mathematics*, vol. 15, AMS Providence, RI, 1974, also in D.C. Mattis (a cura di), *Many-Body Problems*, World Scientific, Singapore 1993.

ta anche interazione a quattro fermioni perché coinvolge quattro particelle di spin $1/2$. La costante di accoppiamento dell'interazione è una costante dimensionale, G_F , detta costante di Fermi. Il decadimento beta è una delle tante manifestazioni delle interazioni deboli, quindi la teoria di Fermi è la prima teoria delle interazioni deboli. Fermi fu anche il primo a utilizzare la teoria quantistica dei campi fermionici¹².

La costante di accoppiamento di Fermi

(Vedi anche Teoria di Fermi del decadimento beta) La costante di Fermi, G_F , può essere determinata sperimentalmente misurando la vita media di un neutrone libero. Il suo valore (in unità naturali, ovvero quelle in cui la costante di Planck e la velocità della luce sono pari a 1) è $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Nella teoria moderna delle interazioni deboli, G_F è correlata con la massa del bosone carico W , che viene scambiato dai fermioni interagenti.

Scala di Fermi

È l'energia associata alla radice dell'inverso della costante di Fermi e quindi alla scala di energia delle interazioni deboli.

Funzione di Fermi

È la funzione che compare nella distribuzione in energia dei raggi beta quando si includono le interazioni coulombiane tra l'elettrone e il nucleo del decadimento.

Campo fermionico

Un campo che descrive particelle con spin semintero. Il caso più semplice è quello di Dirac, di spin $1/2$ (in unità in cui la costante di Planck è uguale a 1) che descrive la funzione d'onda di un elettrone relativistico. La corrispondente teoria quantistica è una teoria a molte particelle che permette di descrivere la creazione e l'annichilazione delle stesse particelle.

¹² E. Fermi, *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi "beta"*, «La Ricerca Scientifica», 4, 491, 1933; E. Fermi, *Versuch einer Theorie der β -Strahlen*, «Zeitschrift für Physik», 88, 161, 1934; E. Fermi, *Tentativo di una teoria dei raggi β* , «Nuovo Cimento», II, 1, 1934.

Transizioni di Fermi

Sono le transizioni descritte dalla teoria di Fermi ovvero quelle in cui gli stati nucleari iniziali e finali hanno la stessa parità e momento angolare. Un tipo diverso di transizioni sono quelle di Gamow-Teller.

Modello di Fermi-Yang

Precursore delle teorie moderne delle interazioni fondamentali, è un modello in cui protone e neutrone sono elementari e i mesoni π sono pensati come composti da protone e neutrone¹³. La teoria si basa sul gruppo di simmetria dell'isospin SU(2). La generalizzazione al gruppo SU(3), ovvero basata su p , n e la particella strana Lambda è il modello di Sakata¹⁴ che a sua volta è il precursore del modello a quark di Gell Mann e Zweig¹⁵.

Fermi

Unità di misura della lunghezza pari a 1×10^{-15} metri. Il termine fu coniato dal fisico Robert Hofstadter in un articolo del 1956 su «Reviews of Modern Physics».

Nel campo della meccanica quantistica e della fisica atomica, possiamo ricordare i seguenti termini.

Risonanza di Fermi

Se si hanno due livelli vibrazionali simili e vicini in energia si produce un fenomeno di risonanza (di Fermi) per cui il modo vibrazione di energia maggiore acquista energia, mentre quello di energia inferiore la perde e contemporaneamente il modo meno intenso acquista intensità mentre quello più intenso la perde. Il fenomeno è una diretta conseguenza del fenomeno del mescolamento in meccanica quantistica ed è stato studiato da Fermi¹⁶.

¹³ E. Fermi, C.N. Yang, *Are Mesons Elementary Particles?*, «Physical Review», 76, 1739, 1949.

¹⁴ S. Sakata, *On a Composite Model for the New Particles*, «Progress of Theoretical Physics», 16, 6, 1956.

¹⁵ M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, «Physics Letters», 8, 214, 1964; G. Zweig, *An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, «CERN preprint 8182/Th 401», January 1964, unpublished.

¹⁶ E. Fermi, *Üben den Ramaneffekt des Kohlendyoxyds*, «Zeitschrift für Physik», 71, 250, 1931.

Teorema di Fermi-Watson

È un risultato del 1953, che permette di approssimare una matrice di transizione tra stati quantistici (in una parte diagonale e una piccola correzione, entrambe esprimibili in termini della matrice di diffusione elastica)¹⁷.

Regola d'oro di Fermi

Si tratta di una formula della Meccanica quantistica che permette di ricavare probabilità di transizioni atomiche o sezioni d'urto di diffusione all'interno della cosiddetta teoria perturbativa. La teoria perturbativa permette di calcolare grandezze misurabili come serie di potenze nella costante che regola l'interazione tra le particelle. Si ottiene quindi un risultato con una precisione via via più elevata con l'aumentare dei termini considerati della serie. Di solito con regola d'oro di Fermi si intende la formula al primo ordine perturbativo, perché in un suo lavoro¹⁸ Fermi la indica come «Regola d'oro n. 2». La regola d'oro n. 1 per Fermi era la formula al secondo ordine perturbativo.

Interazione di contatto di Fermi

È l'interazione tra l'elettrone e il momento di dipolo magnetico del nucleo presente quando c'è una densità finita di spin dell'elettrone sul nucleo, ovvero in orbitali s ¹⁹.

Fermi plateau

È l'intervallo di energie dove la perdita di energia di una particella che attraversa un mezzo smette di crescere all'aumentare dell'energia della particella.

Modello di Thomas-Fermi

Si tratta di un modello semiclassico dell'atomo in cui ciascun elettrone si muove in un potenziale centrale che rappresenta l'attrazione del nucleo e

¹⁷ E. Fermi, *Lectures on Pions and Nucleons*, «Nuovo Cimento», suppl. 2, 17, 1955; K.M. Watson, *Some General Relations between the Photoproduction and Scattering of π Mesons*, «Physical Review», 95, 22, 1954.

¹⁸ E. Fermi, *Nuclear Physics*, A course given at the University of Chicago, University of Chicago Press, Chicago 1950.

¹⁹ E. Fermi, *Üben die magnetischen Momente der Atomkerne*, «Zeitschrift für Physik», 60, 320, 1930.

l'effetto repulsivo medio degli altri elettroni. Il modello permette di determinare la distribuzione della densità di elettroni negli atomi pesanti utilizzando le conseguenze della statistica di Fermi-Dirac²⁰.

Screening di Thomas-Fermi

Il potenziale che emerge dall'approssimazione di Thomas-Fermi è un potenziale schermato, ovvero si riduce a distanze dell'ordine dell'inverso del vettore d'onda di Fermi. Quindi gli elettroni in un metallo schermano il potenziale generato da una carica esterna.

Nel campo della fisica nucleare sono stati molti i contributi di Fermi e non solo nel campo della teoria.

Modello nucleare del gas di Fermi

È un modello del nucleo atomico in cui i nucleoni (protoni e neutroni) sono assimilati a un gas di Fermi (vedi Gas di Fermi). L'energia media per nucleone deriva così dal Principio di Pauli.

Moto di Fermi

È il moto dei nucleoni all'interno del nucleo.

Età di Fermi

È una grandezza, delle dimensioni di un'area, introdotta da Fermi nello studio della diffusione dei neutroni nei moderatori. Rappresenta la distanza quadratica media che un neutrone percorre rallentando e perdendo una determinata quantità di energia.

Fermio, Fm

Elemento chimico di numero atomico 100, è l'ottavo elemento della serie degli attinidi. Il fermio fu scoperto da un gruppo di scienziati guidati da Albert Ghiorso nel 1952 studiando il fallout prodotto dalla detonazione della prima bomba a idrogeno. Il corallo, contaminato a ground zero in un atollo delle isole Marshall nel Pacifico, fu spedito a Berkeley e

²⁰ L.H. Thomas, *The calculation of atomic fields*, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 23, 542, 1927; E. Fermi, *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*, «Accademia dei Lincei», 6, 602, 1927.

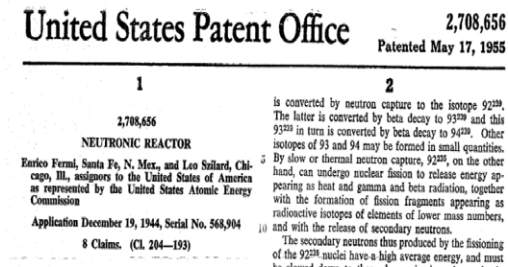
analizzato. L'isotopo prodotto allora era il ^{255}Fm , con una vita media di circa 20 ore. La scoperta fu tenuta segreta fino al 1955 a causa delle tensioni della guerra fredda. L'isotopo più stabile è il ^{257}Fm con una vita media di circa 100.5 giorni.

Il reattore neutronico di Fermi-Szilard

Nel dicembre del 1944 Fermi e Szilard depositarono il brevetto (US 2,708,656) con il disegno del primo reattore a neutroni.

I seguenti due termini ricordano la facilità con la quale Fermi riusciva a calcolare l'ordine di grandezza dei problemi con i quali aveva a che fare o che gli venivano sottoposti.

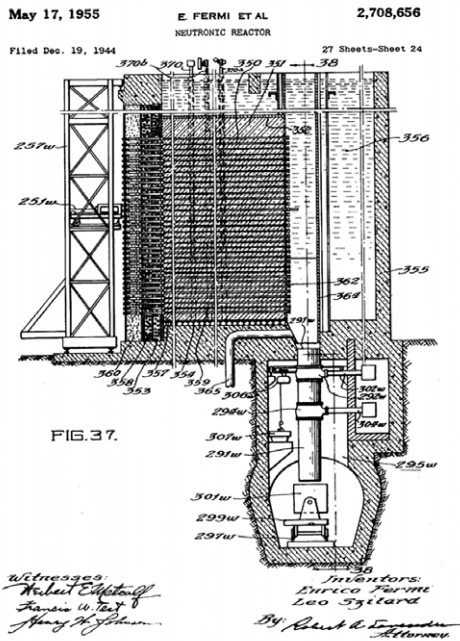
Fig. 1 – Il brevetto di E. Fermi e L. Szilard.



Il problema di Fermi

Fermi amava risolvere dei problemi sulla base di dati scarsi o inesistenti, basandosi su delle ipotesi ragionevoli e sfruttando l'analisi dimensionale. Inoltre proponeva problemi di questo tipo anche ai suoi studenti. L'idea era che, prima di affrontare un qualunque problema in maniera seria, fosse necessario fare una stima degli ordini di grandezza. Uno degli esempi più famosi è quello della stima della potenza della prima bomba atomica esplosa nel *Trinity test*. La stima di Fermi fu basata sull'osservazione della distanza

Fig. 2 – Particolare del brevetto di reattore di Fermi-Szilard.



percorsa da alcuni pezzetti di carta che fece cadere durante l'esplosione. La potenza stimata da Fermi fu circa 10 kilotoni contro i 20 effettivi.

Il paradosso di Fermi

Questo paradosso nasce da una stima effettuata da Fermi della probabilità di contatti tra la terra e popolazioni extraterrestri. Il paradosso nasce dal fatto che secondo la stima di Fermi, la Terra dovrebbe essere stata colonizzata o visitata da intelligenze extraterrestri, ma non ci sono evidenze che questo sia accaduto. I dati empirici su cui si basava il calcolo di Fermi sono i seguenti: il Sole è una stella giovane e ci sono miliardi di stelle più vecchie di vari miliardi di anni; alcune di queste stelle dovrebbero avere pianeti abitabili in cui, se la Terra è un pianeta tipico, dovrebbe essersi sviluppata una vita intelligente; alcune di queste civiltà dovrebbero avere sviluppato i viaggi interstellari. Il risultato di questa analisi era che la nostra galassia doveva essere stata completamente colonizzata nel giro di qualche decina di milioni di anni!

I risultati ottenuti da Fermi nei vari settori della Fisica sono stati così tanti e importanti che numerose istituzioni, strumenti di ricerca e scoperte sono state intitolate a suo nome. Qui ricordiamo in particolare i seguenti.

Istituto Enrico Fermi

L'Istituto per gli Studi Nucleari (Institute for Nuclear Studies) di Chicago fu fondato nel 1945 come parte dell'Università di Chicago. Nel 1955 fu ridenominato Istituto Enrico Fermi per gli studi Nucleari (Institute Enrico Fermi for Nuclear Studies) in riconoscimento degli anni trascorsi da Fermi presso quell'Università e dei risultati raggiunti nel settore nucleare. Finalmente, nel 1968 questo Istituto è stato ridenominato Istituto Enrico Fermi (Enrico Fermi Institute, EFI).

Fermilab

Noto anche come FNAL, abbreviazione per Fermi National Accelerator Laboratory. Il Laboratorio, fondato nel 1967 e intitolato a E. Fermi, si trova a Batavia, in Illinois, vicino a Chicago. Il laboratorio, il più importante negli Stati Uniti per quanto riguarda gli esperimenti di fisica delle particelle elementari, ha ospitato dal 1983 al 2011 il collider protoni antiprotoni Tevatron dove nel 1995 è stato scoperto il quark top. Il laboratorio continua a ospitare numerosi esperimenti con fasci di protoni, muoni e neutrini e studi di fattibilità di futuri acceleratori. Dal 2007 è diretto dalla Fermi Research Alliance, una impresa

congiunta dell'Università di Chicago, dell'Illinois Institute of Technology e dell'University Research Association.

Centro Fermi

Il Centro nasce nel 1999 con la trasformazione dello storico Istituto di Fisica sito in Via Panisperna a Roma, nel Museo della Fisica e Centro Studi e Ricerche Enrico Fermi. Il Centro ha una propria autonomia ed è sottoposto alla vigilanza del MIUR. Il Centro svolge attività di ricerca nel campo della fisica e promuove progetti interdisciplinari e cooperazioni internazionali²¹.

Enrico Fermi Nuclear Generating Station

Si tratta di una centrale nucleare installata sulle rive del lago Erie vicino a Monroe in Michigan. Si tratta di due unità di cui la prima ha iniziato la sua attività nel 1963, mentre la seconda nel 1988.

Centrale Nucleare Enrico Fermi

È una centrale nucleare installata a Trino Vercellese, in provincia di Vercelli. Fu installata nel 1964 ed è stata operativa sino al 1990, quando fu chiusa a seguito del referendum antinucleare del 1987.

Fig. 3 – Il Laboratorio Fermilab a Batavia, Illinois.



Fig. 4 – Il collisionatore TEVATRON al Fermilab.



²¹ Vedi contributo di Luisa Cifarelli in questo volume.

RA-1 Enrico Fermi

Il RA-1 è il primo reattore di ricerca costruito in Argentina nel 1957. È stato usato per la produzione di radioisotopi a scopo medico e industriale ed è servito per l'addestramento del personale delle due prime centrali nucleari argentine.

Fermi Large Area Telescope

È il principale strumento del satellite Fermi Gamma Ray Space Telescope. Lanciato nel 2008, è una collaborazione internazionale finanziata da diverse agenzie scientifiche di Stati Uniti, Francia, Italia, Giappone e Svezia. Si tratta di un telescopio a raggi gamma di alta energia, nel range da 20 MeV a oltre 300 GeV.

Fermi bubbles

Sono due grandi regioni, sopra e sotto il centro galattico, di emissione di raggi gamma scoperte nel 2010 dal Fermi Gamma Ray Space telescope e confermate dall'esperimento PLANCK. Queste regioni coincidono a bassa latitudine con la velatura già osservata dall'esperimento WMAP.

FERMIAC

Si tratta di un calcolatore analogico, detto anche «carrello Montecarlo», che fa uso del metodo Montecarlo per l'integrazione numerica, sviluppato da Fermi per calcolare il percorso dei neutroni in vari sistemi nucleari. Il metodo Montecarlo fu usato per la prima volta da Fermi in questa circostanza, ma mai pubblicato. Fu sviluppato successivamente da Ulam e von Neumann.

Il nome di Fermi risulta associato anche ad alcuni oggetti della moderna tecnologia. Ad esempio:

Fig. 5 – Il calcolatore analogico FERMIAC. [Bradbury Museum, Los Alamos]



Nvidia Fermi

Si tratta della undicesima generazione di un processore grafico della Nvidia che costituisce l'introduzione alla microarchitettura Fermi (chip GF). È stato lanciato nel 2010.

Filtro di Fermi

È un filtro usato nei processori grafici che fa uso della distribuzione di Fermi-Dirac (vedi Statistica di Fermi-Dirac).

Fermi Linux

È il nome generico delle distribuzioni Linux rilasciate dal Fermilab. A Fermi sono stati dedicati anche alcuni premi quali:

Enrico Fermi Award

È un premio rilasciato dal Dipartimento dell'energia (DOE) degli Stati Uniti a scienziati che abbiano contribuito allo sviluppo, uso o produzione dell'energia. Lo scienziato che lo riceve ottiene un contributo di 50000 Dollari US, un certificato di attestazione e una medaglia d'oro con l'effigie di Fermi. Il premio è stato rilasciato per la prima volta nel 1956 a John von Neumann.

Premio Enrico Fermi

Istituito nel 2001 dalla Società Italiana di Fisica (SIF) in occasione del centenario della nascita di Fermi. Viene rilasciato ogni anno a soci che abbiano onorato la fisica con le loro scoperte.

PARTE I

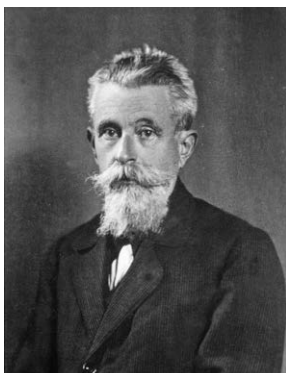
ENRICO FERMI, GLI ANNI FIORENTINI

ENRICO FERMI DOCENTE
ALLA REGIA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori, Stefano Selleri

Per avere un'idea del periodo trascorso da Enrico Fermi a Firenze come docente, è interessante fornire un quadro dell'ambiente universitario fiorentino di allora, anche per capire com'era strutturata la Regia Università degli Studi di Firenze negli anni accademici 1924/25 e 1925/26 e dare inoltre un breve excursus storico delle sue origini.

Fig. 1 – Giulio Chiarugi [Castelletto di Chiusdino (Siena), 28 gennaio 1859 – Firenze, 17 marzo 1944], fu il primo Rettore, per un anno, della Regia Università degli Studi di Firenze.



Il nucleo dell'Università di Firenze, lo Studium Generale, nacque nel 1321, con i corsi di Diritto, sia Civile che Canonico, di Medicina, di Filosofia e di «altre *scientie*»; tuttavia la vita dello Studium Fiorentino fu difficile e subì lunghi periodi di cessazione delle attività, periodi i quali «costringevano i rampolli delle più altolocate famiglie fiorentine ad iscriversi ad altre Università»¹. Ad esempio l'episodio della peste nera nel 1348 rappresentò una cesura importante. Una data fondamentale nella storia dello Studio è rappresentata dal 1388, anno nel quale fu emanato uno Statuto in tre libri, contenente il complesso delle prescrizioni cui l'Istituzione avrebbe dovuto

¹ S. Rogari, *L'Università di Firenze*, in Amedeo Belluzzi ed Emanuela Ferretti (a cura di), *La Sede della Sapienza a Firenze. L'Università e l'Istituto Geografico Militare a San Marco*, IGM, Firenze 2009, p. 7.

attenersi. E tuttavia la sua storia continuò a non essere lineare, dal momento che le vicende politiche della città influirono su di essa in maniera pesante tanto da interrompere l'insegnamento per alcuni anni.

Nel 1429 Niccolò da Uzzano progettò la costruzione di una Casa della Sapienza, in parte ultimata nel 1434, ma il suo uso alla fine non fu destinato all'Università. Le traversie dello Studium Fiorentino comunque non finiscono qui. Nel 1472 si deliberò di trasferire l'Università da Firenze a Pisa, pare per impulso dello stesso Lorenzo de' Medici; a Firenze rimase solo il Collegio Teologico. È un fatto significativo: la vivacità culturale di una città come Firenze, centro dell'Umanesimo e del Rinascimento, mal si conciliava con una struttura organizzata al modo in cui lo era un'Università. A Firenze in quel periodo fiorirono infatti le Accademie, l'Accademia Platonica di Marsilio Ficino, con il suo incomparabile lavoro di traduzione dei classici greci, e l'Accademia Fiorentina.

L'Università tornò a Firenze soltanto con la nascita dello Stato unitario. Nel 1859 venne infatti fondato il Regio Istituto di Studi Superiori, Pratici e di Perfezionamento, che ebbe la fisionomia di alta scuola di specializzazione a carattere scientifico e professionale, diretta quindi ai laureati di altre università. In questo erano previste inizialmente tre sezioni (Filosofia e Filologia, Scienze Naturali e Medicina e Chirurgia, a cui si affiancò ben presto la scuola di Farmacia), che nel giro di un ventennio assunsero la denominazione di Facoltà. A esse si aggiunse solo nel 1924 la formazione della Facoltà di Giurisprudenza; fino a quel momento infatti gli studi giuridici si svolgevano al di fuori dell'Istituto, nella Scuola di Giurisprudenza e Notariato e presso la Scuola di Scienze Sociali e Politiche "Cesare Alfieri", scuola che rimase autonoma fino al 1936, quando divenne Facoltà e fu inglobata nella Regia Università. Sempre nello stesso anno gli studi di matematica entrarono a far parte della facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali.

Il Regio Istituto si iscriveva ovviamente nell'ottica di Firenze capitale e aveva lo scopo di conferire prestigio culturale alla città che si era meritata quell'alto onore. La sede fu il palazzo del rettorato in piazza San Marco, quello costruito, come già si è detto, da Niccolò da Uzzano; questa volta però la sua destinazione fu quella che era stata nelle intenzioni del suo fondatore. Le ristrettezze finanziarie e la necessità di potenziare le cattedre per far sì che l'Istituto mantenesse il carattere di centro di alta cultura, soprattutto dopo che Firenze aveva perso il suo ruolo di capitale politica, portarono alla convenzione del 1872, per opera della quale anche gli enti locali, Comune e Provincia, contribuivano al mantenimento dell'Università. Il Regio Istituto di Studi Superiori si trasformò in Regia Università degli Studi a seguito della riforma, nel 1923, del ministro dell'istruzione Giovanni Gentile². Es-

² Regio Decreto 30 settembre 1923, n. 2102 (in «Gazzetta Ufficiale», 11 ottobre, n. 239) – Ordinamento dell'istruzione superiore: con esso l'università poté godere di personalità giuridica e autonomia amministrativa e didattica.

sa comprendeva quattro Facoltà: Lettere e Filosofia, Medicina e Chirurgia, Scienze Matematiche Fisiche e Naturali e Giurisprudenza, e aveva circa mille studenti. I due organi direttivi della neonata Università, che già esistevano, mutarono il loro nome. L'organo di direzione didattica da Consiglio Accademico, composto dal Sovrintendente e dai direttori delle sezioni, prese il nome di Senato Accademico; questo era composto da sei membri ovvero, oltre che dal Rettore, dai quattro Presidi della Facoltà di Medicina e Chirurgia, della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, della Facoltà di Lettere e Filosofia e della Facoltà di Giurisprudenza, e dal Direttore della Scuola di Farmacia. Nel 1924/25 un settimo membro fu costituito dal Soprintendente, scaduto d'ufficio, del già Regio Istituto di Studi Superiori, Pratici e di Perfezionamento, che affiancò il Rettore Giulio Chiarugi per tutto il 1925. L'organo di direzione amministrativa mutò il nome da Consiglio Direttivo a Consiglio di Amministrazione e la sua composizione fu determinata proprio da quella convenzione del 1872, che resta un *unicum* nella storia delle università come inizialmente resta un *unicum* la presenza di questo organo, che solo in seguito entrerà stabilmente nella struttura di governo di quasi tutte le università italiane. Inizialmente nel Consiglio Direttivo dell'Istituto erano presenti tre rappresentanti del Governo, due del Comune e uno della Provincia e non erano presenti docenti, che entreranno a farne parte successivamente. Il Soprintendente dell'Istituto (rappresentante del Governo o della Provincia) sarà poi sostituito dal Rettore affiancato da due docenti rappresentati del Collegio dei professori³.

I docenti alla Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Gli studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria a Firenze si riferivano al corso di laurea in Matematica e al corso di laurea in Fisica e Matematica della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, di cui in questa sezione viene descritto il corpo docente.

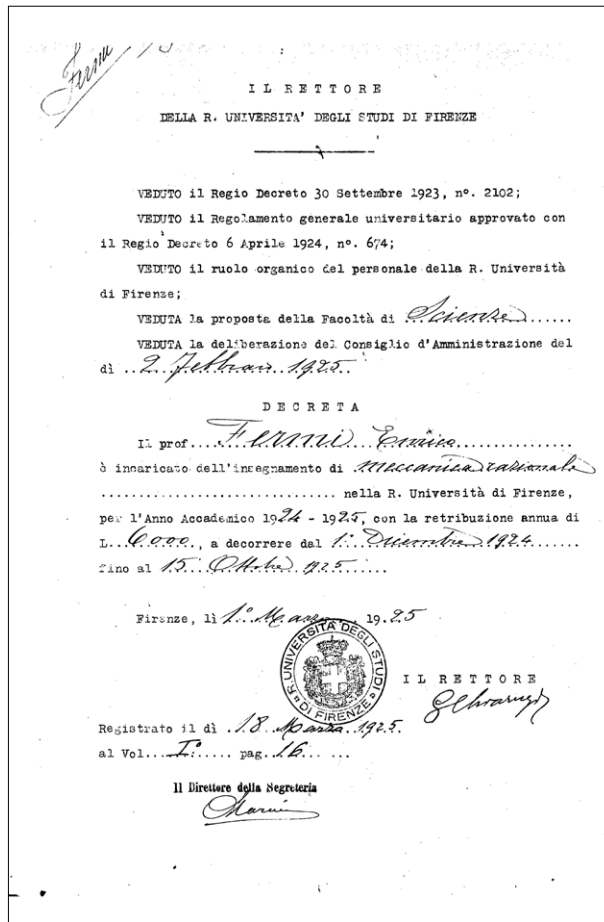
Gli insegnanti della Facoltà erano 16, di cui 7 professori stabili, 5 non stabili e 4 incaricati. Fra questi vi erano Antonio Garbasso, professore stabile di Fisica Sperimentale e incaricato di Fisica Superiore, Giorgio Abetti, professore non stabile di Astrofisica e direttore dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Francesco Tricomi, che a soli 28 anni era stato nominato professore non stabile di Analisi Algebrica e Infinitesimale e incaricato di Analisi Superiore. Nell'anno accademico 1925/26, in seguito al trasferimento a Torino di Tricomi, l'incarico di Analisi Matematica Algebrica fu assegnato a Giovanni Sansone. Fra questi docenti, in qualità di incaricato, c'era anche il

³ Per un approfondimento della storia degli Studi superiori a Firenze vedi *Storia dell'ateneo Fiorentino. Contributi di studio*, vol. I-II, Edizioni F. & F., Parretti Grafiche, Firenze 1986; *L'Università degli Studi di Firenze 1924-2004*, Olschki, Firenze 2004.

giovane Enrico Fermi, che a soli 23 anni fu chiamato dal direttore dell'Istituto di Fisica Antonio Garbasso. Nella Facoltà di Scienze vi erano anche 29 liberi insegnanti con effetti legali. Oltre a questi vi erano 2 professori emeriti e un professore onorario.

Il prof. Enrico Fermi, di Roma, era insegnante incaricato di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica, e allo stesso tempo era elencato fra i liberi insegnanti con effetti legali per la Fisica Matematica.

Fig. 2 – Decreto rettorale della Regia Università degli Studi di Firenze con cui Enrico Fermi fu incaricato dell'insegnamento di Meccanica Razionale per l'anno accademico 1924/25⁴.



⁴ Archivio Storico dell'Università di Firenze, Soprintendenza del Regio Istituto di Studi Superiori, filza n. 544, anno 1924, fasc. 10c «Personale insegnante».

Fig. 3 – Istituto di Fisica ad Arcetri, da sinistra a destra: Franco Rasetti, Rita Brunetti, dietro a Nello Carrara, Enrico Fermi.



Nell'orario ufficiale della Facoltà, pubblicato nell'Annuario del 1924/25, si trova che il prof. Enrico Fermi insegnava Meccanica Razionale al terzo anno dei corsi di laurea in Fisica, in Matematica e in Fisica e Matematica, dalle 9 alle 10 nei giorni di lunedì, mercoledì e venerdì, in piazza S. Marco 2. Inoltre Fermi insegnava anche Fisica Matematica al quarto anno degli stessi corsi di laurea, dalle 10 alle 11 negli stessi giorni. Nell'anno accademico successivo, al posto di Fisica Matematica, Enrico Fermi insegnava, al quarto anno degli stessi corsi di laurea, Fisica Teorica, dalle 15 alle 16 nei giorni di lunedì, mercoledì e venerdì, sempre in piazza San Marco 2. Fermi, oltre a esaminare gli studenti dei suoi insegnamenti, spesso faceva parte di commissioni di esami di altri corsi come ad esempio Analisi Matematica, Geometria Descrittiva e Astrofisica.

Nell'Annuario per l'anno accademico 1925/26, della Regia Università degli Studi di Firenze, si possono trovare le pubblicazioni di tutti docenti. In particolare si trovano elencati i seguenti articoli del prof. Enrico Fermi:

- E. Fermi, *Sopra la teoria dei corpi solidi*, «Periodico di Matematiche», n. 5, 1925, pp. 264-274.
- E. Fermi, F. Rasetti, *Ueber den Einfluss eines wechselnden magnetischen Feldes auf die Polarisation des Resonanzlichtes*, «Zeitschrift für Physik», vol. 33, n. 1, 1925, pp. 246-250.
- E. Fermi, *Una relazione tra le costanti delle bande infrarosse delle molecole triatomiche*, «Rendiconti Lincei», vol. 1, 1925, pp. 386-387.
- E. Fermi, *Sopra l'intensità delle righe multiple*, «Rendiconti Lincei», vol. 1, 1920, pp. 120-124.
- E. Fermi, *Problemi di chimica nella fisica dell'atomo*, «Periodico di Matematiche», n. 6, 1926, pp. 19-26.
- E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Rendiconti Lincei», vol. 3, 1926, pp. 145-149.

Per l'insegnamento del corso di Meccanica Razionale, dopo Enrico Fermi e fino all'a.a. 1970/71, anno di nascita della Facoltà di Ingegneria, i docenti che si sono succeduti sono: Enrico Persico, dall'a.a. 1926/27 all'a.a. 1928/29, Gilberto Bernardini, dall'a.a. 1929/30 all'a.a. 1930/31, Bruto Caldonazzo, dall'a.a. 1931/32 all'a.a. 1955/56, Giorgio Sestini, dall'a.a. 1956/57 all'a.a. 1969/71. Dall'a.a. 1965/66 all'a.a. 1970/71 viene raddoppiata la cattedra di Meccanica Razionale con l'incarico affidato a Demore Quilghini.

Ordine degli studi dei corsi di laurea in Fisica e Matematica ed in Matematica, a cui si riferiva il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria

In questa sezione si prende brevemente in esame l'ordine degli studi dei corsi di laurea in Fisica e Matematica ed in Matematica, a cui si riferivano gli studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria, dedotto dall'annuario per l'a.a. 1924/25, anno del primo incarico di docenza di Fermi a Firenze.

L'ordine degli studi prevedeva il seguente piano:

Anno I

Analisi Matematica (Parte I) e relativi esercizi – prof. Francesco Tricomi
 Geometria Analitica e Proiettiva (con esercizi) – prof. Edgardo Ciani
 Fisica Sperimentale – prof. Antonio Garbasso
 Chimica Generale ed Inorganica – prof. Luigi Rolla
 Disegno – prof. Raffaello Brizzi (solo per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

Anno II

Analisi Matematica (Parte II) e relativi esercizi – prof. Francesco Tricomi
 Geometria Descrittiva (con esercizi) – prof. Edgardo Ciani
 Fisica Sperimentale – prof. Antonio Garbasso
 Esercizi di Chimica – prof. Luigi Rolla (solo per Fisica e Matematica e per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

Disegno – prof. Raffaello Brizzi (solo per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

Anno III

Meccanica Razionale – prof. Enrico Fermi

Fisica Superiore – prof. Antonio Garbasso (solo per Fisica e Matematica)

Analisi Superiore – prof. Francesco Tricomi

Astrofisica – prof. Giorgio Abetti

Esercizi di Fisica – prof. Antonio Garbasso

Chimica Fisica con esercizi – prof. Luigi Rolla (solo per Fisica e Matematica)

Anno IV

Fisica Matematica – prof. Enrico Fermi

Fisica Superiore – prof. Antonio Garbasso

Geometria Superiore – prof. Edgardo Ciani

Esercizi di Fisica – prof. Antonio Garbasso (solo per Fisica e Matematica)

Materia facoltativa a scelta tra Matematiche Complementari, Chimica Organica, Mineralogia e Disegno (solo per Fisica e Matematica)

Agli studenti che avrebbero poi frequentato la Scuola di Ingegneria e che frequentavano il biennio di Scienze Matematiche e Fisiche come propedeutico veniva espressamente consigliato, al secondo anno (e non al terzo) di seguire il corso di Meccanica Razionale tenuto dal prof. Enrico Fermi.

Si evidenzia che negli anni successivi all'anno accademico 1924/25 si agguingono come 'consigliati' gli esami di Mineralogia e di Geologia e come 'obbligatorio' l'esame di Meccanica Razionale.

Fig. 4 – Francesco Tricomi (Napoli, 5 maggio 1897 – Torino, 21 novembre 1978) è stato un matematico italiano, notissimo per i suoi studi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto, sulle funzioni speciali e sulle serie ortogonali. Nel 1925 ottenne una cattedra a Firenze, ma si trasferì subito dopo a Torino, chiamato da Giuseppe Peano. Qui tenne la cattedra di Analisi Infinitesimale fino al suo collocamento a riposo. [Per cortesia dell'Unione Matematica Italiana]



Fig. 5 – Edgardo Ciani [Rocca San Casciano (Forlì), 7 ottobre 1864 – 14 settembre 1942], laureato nel 1886 a Pisa, insegnò in varie università fino a che non venne chiamato, nel 1925, alla neo-costituita sezione matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Firenze, ove con Giovanni Sansone operò per l'organizzazione dell'Istituto di Matematica (foto a sinistra: uno dei testi di Geometria scritti da Ciani prima di essere chiamato a Firenze). Qui rimase sino al collocamento a riposo nel 1935. Ebbe come allievi Federigo Enriques (Livorno, 5 gennaio 1871 – Roma, 14 giugno 1946; foto al centro) e Guido Fubini (Venezia, 19 gennaio 1879 – New York, 6 giugno 1943; foto a destra).

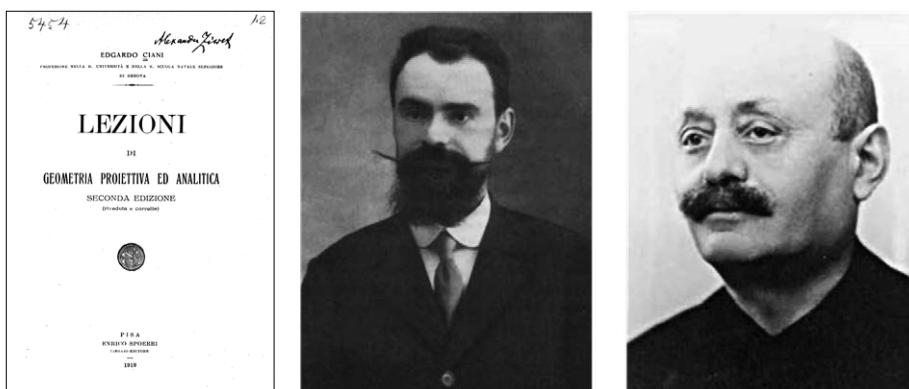


Fig. 6 – Antonio Garbasso (Vercelli, 16 aprile 1871 – Firenze, 14 marzo 1933) Laureato in fisica all'Università di Torino nel 1892, si perfezionò in Germania con Heinrich Hertz e Hermann von Helmholtz. Fu professore di Fisica Matematica e di Fisica Sperimentale presso varie Università e, dal 1913 al 1933, all'Università di Firenze, dove contribuì a far potenziare l'Istituto di Fisica di Arcetri, facendo chiamare molti dei più brillanti ricercatori della fisica italiana. Fu prima sindaco e poi podestà di Firenze, e senatore del Regno d'Italia. Diresse la Società Italiana di Fisica e fu Presidente dell'Accademia dei Lincei.

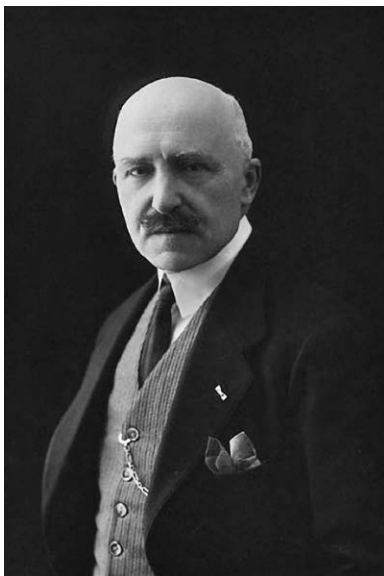
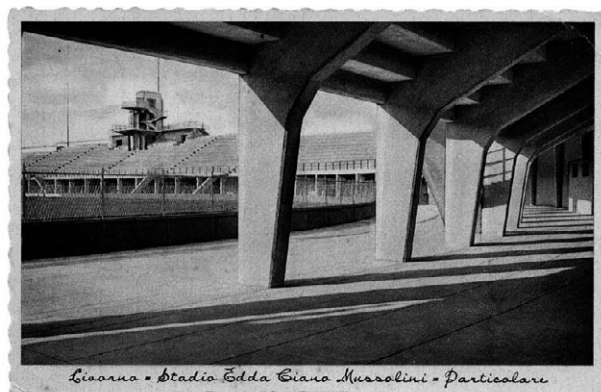


Fig. 7 – Strumentazione del laboratorio di Luigi Vittorio Rolla (Genova, 21 maggio 1882 – 8 novembre 1960), professore di Chimica Generale e Inorganica alla Regia Università degli Studi di Firenze. Luigi Rolla nel 1924 ritenne (con il collega L. Fernandes), in base a misure spettroscopiche, di avere individuato l'elemento chimico 61, che chiamò Florenzio – derivato di Florentia, nome latino di Firenze – ma la scoperta non fu confermata. L'elemento radioattivo 61 (Promezio), preparato artificialmente anni dopo, non esiste in natura perché troppo instabile. [Per cortesia di Piero Baglioni]



Fig. 8 – Raffaello Brizzi [Montecatini Terme (Pistoia), 4 aprile 1883 – 23 febbraio 1946], professore alla cattedra di Architettura presso l'Accademia di Belle Arti di Firenze, è tra i fondatori della nuova Regia Scuola Superiore di Architettura di Firenze, dove insegna Composizione Architettonica e della quale diviene preside dal 1932 fino alla morte. Tra le sue opere il Palazzo Comunale a Montecatini Terme (in collaborazione con L. Righetti) e lo Stadio Comunale di Livorno, all'epoca dedicato a Edda Ciano Mussolini [Collezione F. Giannini], ora intitolato ad Armando Picchi⁵.



⁵ E. Insabato, C. Ghelli (a cura di), *Guida agli archivi di architetti e ingegneri nel Novecento in Toscana*, Edifir Edizioni, Firenze 2007.

Fig. 9 – Giorgio Abetti (Padova, 5 ottobre 1882 – Firenze, 24 agosto 1982) si laureò in Fisica a Padova nel 1904. Lavorò in Germania, agli osservatori di Berlino e di Heidelberg, e negli Stati Uniti, agli osservatori di Yerkes e di Monte Wilson. Diresse l'Osservatorio di Arcetri a Firenze dal 1922 al 1957. Progettò la costruzione della prima torre solare italiana ad Arcetri⁶ (in figura, a destra), ispirandosi a quella ideata a Mount Wilson. Le sue ricerche più importanti riguardano le stelle doppie, la cromosfera solare e la fisica del Sole.



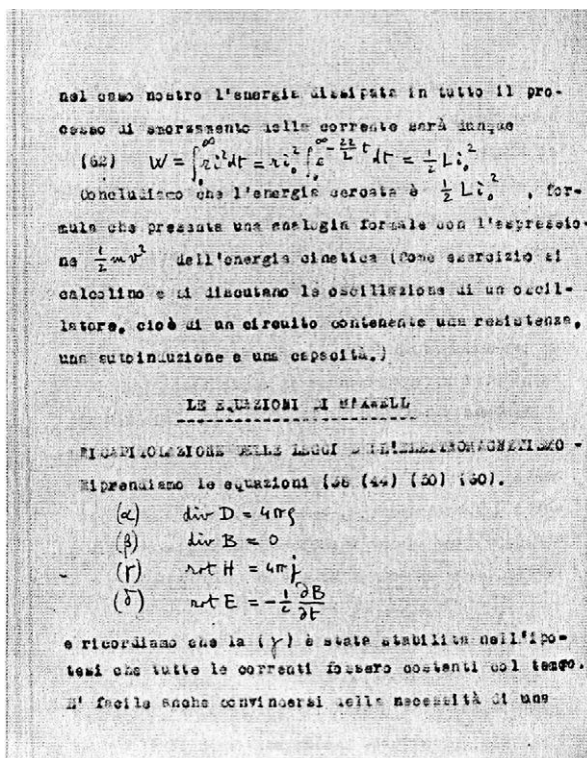
Il programma del corso di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica

Il programma del corso di Meccanica Razionale, tenuto da Enrico Fermi al terzo anno dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica ed in Matematica – di cui nella seconda parte di questo libro è riprodotta una riedizione delle dispense a cura di Bonanno Bonanni e Paolo Pasca, studenti di Fermi a tale corso – comprendeva: *Elementi della teoria, Cinematica del punto e del corpo rigido, Statica e dinamica del punto, Statica e dinamica dei corpi rigidi, Principio dei lavori virtuali, Dinamica dei sistemi, Cenni sulla statica e dinamica dei sistemi continui.*

Per quanto riguarda il corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi al quarto anno dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica ed in Matematica, il programma era il seguente: *Campi vettoriali, Elementi della teoria del potenziale e delle funzioni armoniche, Elettrostatica dei dielettrici, Campi magnetici, Elettromagnetismo ed elettrodinamica, Equazioni di Maxwell, Propagazione della luce in un dielettrico e in un conduttore, Dispersione, Irradiazione dell'energia elettromagnetica, Masse elettromagnetiche, Cenni sulle teorie spettroscopiche, Cenni sulla teoria della relatività.*

⁶ G. Abetti, *Progetto della torre solare per l'osservatorio di Arcetri*, «Rivista d'ottica e meccanica di precisione», 1921.

Fig. 10 – Prima pagina del capitolo sulle equazioni di Maxwell del dattiloscritto del libro *Elettrodinamica* di Enrico Fermi a cura di W. Joffrain⁷. Secondo Joffrain si tratterebbe della copia originale degli appunti, con le parti manoscritte forse proprio da Enrico Fermi⁸.



Gli studenti di Enrico Fermi alla Regia Università degli Studi di Firenze

In questa sezione sono presentati i risultati di una ricerca effettuata presso l'Archivio Storico dell'Università di Firenze, relativa agli studenti di Enrico Fermi, sia del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria sia dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica e in Matematica. I dati sono stati ricavati dagli annuari per gli anni accademici 1924/25, 1925/26, e dai registri della carriera scolastica degli studenti delle sezioni di Scienze Fisiche e Naturali e di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Sulla base di questi documenti sono state elaborate le tabelle riepilogative riportate di seguito.

⁷ E. Fermi, *Elettrodinamica*, a cura di W. Joffrain, cit.

⁸ W. Joffrain, *Un inedito di Enrico Fermi: Elettrodinamica*, «XVII Conference on Physics and Astronomy History», Como, 15-19 maggio 1998, pp 1-11.

Nelle Tabelle 1 e 2 è riportato l'elenco degli studenti del corso Meccanica Razionale di Enrico Fermi che rispettivamente hanno e non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria⁹. Nelle Tabelle 3 e 4 sono invece riportati gli studenti del corso di Fisica Matematica di Enrico Fermi che rispettivamente hanno e non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico. Si osserva che su un totale di 63 studenti (17 del corso di Fisica Matematica e 46 del corso di Meccanica Razionale), ben 28 (di cui 25 di Meccanica Razionale) fanno riferimento al biennio propedeutico.

Come curiosità, in tutte le tabelle, oltre alla votazione ottenuta agli esami, sono riportate anche le scuole di provenienza e le destinazioni degli studenti. Da queste informazioni si può osservare che gli studenti fiorentini provenivano dal Liceo Scientifico Leonardo da Vinci¹⁰, dal Liceo Classico Dante¹¹, dal Liceo Classico Galileo¹² e dal Liceo Classico Michelangelo¹³. Si ricorda che, fino alla *Legge Codignola* 910/69, gli studenti che avevano frequentato gli Istituti Tecnici non potevano accedere direttamente all'Università.

Alcuni degli studenti di Fermi si ritrovano nell'Albo degli Ingegneri della Provincia di Firenze, come riportato nella Tabella 5, costruita sulla base dei dati presenti sulle versioni cartacee degli elenchi disponibili presso l'Ordine degli Ingegneri della Provincia di Firenze, disponibili – per il periodo compreso tra il 1926 e il secondo conflitto mondiale – solo per gli anni 1928, 1929, 1931, 1937, 1941.

⁹ Fino all'anno accademico 1933/34, anno in cui con il RD 2044/1935-XIV venne stabilito il nuovo ordinamento della didattica, era previsto un esame per il superamento del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria presso l'Università di Firenze.

¹⁰ Nel settembre 1923 veniva istituito a Firenze il primo Liceo Scientifico. Il Liceo ebbe la prima sede in via della Colonna, nei locali della soppressa Scuola Normale Complementare Carducci. Nel 1924 si spostò nei locali dell'ex Scuola Normale Tornabuoni alle Cure nel viale Regina Vittoria (l'attuale viale Don Minzoni) e fu intitolato a Leonardo da Vinci. Negli anni Cinquanta la Provincia di Firenze provvide alla costruzione di un nuovo edificio che è l'attuale sede del Liceo.

¹¹ Il Liceo Ginnasio Dante si trova a Firenze, in via Puccinotti 55, affacciato su piazza della Vittoria, ed è una delle scuole più antiche della città. La sua fondazione, col nome di Liceo Fiorentino, risale al 30 settembre 1853, per decreto del granduca Leopoldo II. Nel 1859 esso ebbe sede nel palazzo Borghese in via del Palagio del Podestà (oggi via Ghibellina), nel 1862 si trasferì nel palazzo Da Cepparello in via del Corso. Nel 1865 divenne Liceo Dante, in occasione del sesto centenario della nascita di Dante Alighieri e trovò la sua sede attuale solo nel 1921.

¹² Nel 1775 gli Scolopi acquistarono l'edificio di via Martelli (sede attuale del Liceo-Ginnasio Galileo) e trasferirono lì la loro scuola, che ebbe immediato sviluppo. Nel palazzo gli Scolopi rimasero anche dopo la formazione del Regno d'Italia, ma spostarono altrove la scuola quando, nel 1878, cedettero una parte dell'edificio come sede di un Ginnasio Regio che prese il nome di Galileo, al quale nel 1884 fu aggiunto anche il Liceo.

¹³ Il Liceo Classico Michelangelo si trova in via della Colonna. Fu fondato nel 1898 con sede nei locali del Convento di Santa Maria Maddalena.

Tab. 1 – Studenti del corso di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi a Firenze che hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Meccanica Razionale.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	Destinazione	voto finale
1924/25	De Giorgi	Vincenzo	Liceo Dante	Politecnico di Torino	30
1924/25	Grillo	Eugenio	Istituto Tecnico Galileo	Politecnico di Torino	21
1925/26	Berti	Costantino	Istituto Tecnico Siena	Politecnico di Torino	27
1925/26	Bonanni	Bonanno	Liceo Dante	Politecnico di Torino	30
1925/26	Braccini	Antonio	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	25
1925/26	Brizzi	Emilio	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	24
1925/26	Brunetti	Tito	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	26
1925/26	Bruscaglioni	Raffaello	Liceo Galileo	Politecnico di Torino	24
1925/26	Cammeo	Angiolo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	30
1925/26	Carini	Silvio	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	27
1925/26	Comba	Lorenzo	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Roma	30
1925/26	Croci	Luigi	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	25
1925/26	De Giorgi	Giorgio	Liceo Galileo	Politecnico di Torino	24
1925/26	Frangioni	Fernando	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Pisa	28
1925/26	Jozsef	Adalberto	Liceo Alba Julia (Romania)	Politecnico di Torino	30
1925/26	Le Divelec	Giampietro	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Roma	25
1925/26	Lochoff	Boris	Istituto Tecnico Galileo	Istituto Nautico di Livorno	-
1925/26	Masciadri	Cesare	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	28
1925/26	Materassi	Leonetto	Istituto Tecnico Pisa	Scuola di Appl.ne Pisa	25
1925/26	Pasca	Paolo	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Padova	24

1925/26	Perinelli	Renzo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Roma	30
1925/26	Piperno	Ugo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	27
1925/26	Pratesi	Alberto	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	27
1925/26	Simoncini	Alvaro	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Padova	20
1925/26	Stefanelli	Giuseppe	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Pisa	30

Tab. 2 – Studenti del corso di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi a Firenze che non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Meccanica Razionale.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	Destinazione	voto finale
1924/25	Conti	Mario	Liceo Galileo		24
1924/25	De Seras	Luigi	Istituto Tecnico Galileo		-
1924/25	Fabroni	Nestore	Istituto Tecnico Galileo		-
1924/25	Fortini	Luigi	Istituto Tecnico Galileo	Scuola di Appl.ne Roma	-
1924/25	Masini	Mario Raffaello	Liceo Michelangelo		-
1924/25	Puccini	Guglielmo	Istituto Tecnico Galileo		-
1924/25	Rossi	Corrado	Istituto Tecnico Galileo		30
1924/25	Sanpaolesi	Pietro	Liceo Dante	Università di Pisa	-
1924/25	Socci	Clotilde	Istituto Tecnico Galileo		25
1924/25	Tarabusti	Renzo	Istituto Tecnico Galileo		-
1924/25	Teicher	Burech	Ginnasio in Polonia		-
1925/26	Bacci	Ideale	Istituto Tecnico Galileo		20
1925/26	Bianconcini	Francesco	Liceo Galileo		-
1925/26	Calamai	Giulio	Istituto Tecnico Galileo		28

1925/26	Gennai	Antonio	L. Classico Galilei Pisa	-
1925/26	Gianangeli	Gualtiero		-
1925/26	Jolles	Kirsch	L. Classico Leopoli (Polonia)	-
1925/26	Nuterini	Bianca	Istituto Tecnico Arezzo	22
1925/26	Rossi	Bernardino	Istituto Tecnico Trento	-
1925/26	Seippa	Italo	Liceo Scientifico L. da Vinci	21
1925/26	Villani	Flora	Istituto Tecnico Galileo	30

Tab. 3 – Studenti del corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi a Firenze che hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Fisica Matematica.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	Destinazione	voto finale
1924/25	Del Guercio	Alfonso	Politecnico di Milano		28
1924/25	Ricci	Roberto	Istituto Tecnico Galileo		30
1925/26	Pepi	Dino	Liceo Michelangelo	Politecnico di Torino	20

Tab. 4 – Studenti del corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi a Firenze che non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria (in questo caso la colonna «destinazione» manca perché non contenente informazioni); il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Fisica Matematica.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	voto finale
1924/25	Fiorilli	Erberto	Istituto Tecnico Milano	-
1924/25	Mancinelli	Renato	Istituto Tecnico Galileo	30
1924/25	Paggi	Goffredo	Istituto Tecnico Pisa	-
1924/25	Socci	Clotilde	Istituto Tecnico Galileo	24
1924/25	Talei	Gianni	Ist. Tec. Livorno	-

1925/26	Bacci	Ideale	Istituto Tecnico Galileo	-
1925/26	Conti	Mario	Liceo Galileo	30
1925/26	Fabroni	Nestore	Istituto Tecnico Galileo	-
1925/26	Masini	Mario Raffaello	Liceo Michelangelo	-
1925/26	Puccini	Guglielmo	Istituto Tecnico Galileo	-
1925/26	Rado	Nicolino	Istituto Tecnico Galileo	25
1925/26	Reggiani	Luigi	Istituto Tecnico Galileo	-
1925/26	Tarabusti	Renzo	Istituto Tecnico Galileo	-
1925/26	Villani	Flora	Istituto Tecnico Galileo	-

Tab. 5 – Gli studenti di Fermi a Firenze che si ritrovano nell’Albo degli Ingegneri della Provincia di Firenze: la quarta colonna riporta l’anno in cui per la prima volta il nome è presente sull’Albo. Dal confronto con le tabelle precedenti, si osserva che per alcuni studenti non risulta sostenuto l’esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria all’Università di Firenze.

anno accademico	cognome	Nome	primo anno su albo	corso	corso di laurea
1924/25	Fabroni	Nestore	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924/25	Fortini	Luigi	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924/25	Grillo	Eugenio	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924/25	Sanpaolesi	Piero	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925/26	Braccini	Antonio	1937	Meccanica Razionale	Matematica
1925/26	Brizzi	Emilio	1937	Meccanica Razionale	Matematica
1925/26	Brusca- glioni	Raffaello	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925/26	Croci	Luigi	1931	Meccanica Razionale	Matematica
1925/26	De Giorgi	Giorgio	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925/26	Fabroni	Nestore	1937	Fisica Matematica	Fisica e Matematica

1925/26	Materassi	Leonetto	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925/26	Simoncini	Alvaro	1931	Meccanica Razionale	Matematica
1925/26	Stefanelli	Giuseppe	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica

I primi esami di Enrico Fermi docente universitario

Dalle tabelle precedenti, considerando gli studenti che hanno seguito il corso di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica nell'a.a. 1924/25, tralasciando quelli che hanno seguito i corsi nell'a.a. 1925/26, si è andati a ricercare, per ognuno, la scheda cartacea del catalogo dell'Archivio per recuperare la posizione archivistica del fascicolo e controllare i verbali degli esami; inoltre per trovare una conferma dell'esattezza della data è stato fatto un riscontro sui volumi dei Registri della carriera, dove sono riportati in sintesi tutti gli atti di carriera degli studenti.

Tab. 6 – Primi esami fatti dal prof. Enrico Fermi a Firenze nel corso di Meccanica Razionale e Fisica Matematica.

anno accademico	cognome	Nome	Corso	data	voto
1924/25	De Giorgi	Vincenzo	Meccanica Razionale	16 luglio 1925	30
1924/25	Socci	Clotilde	Fisica Matematica	16 luglio 1925	24
1924/25	Sampaolesi	Pietro	Meccanica Razionale	16 novembre 1925	respinto
1924/25	Conti	Mario	Meccanica Razionale	23 luglio 1925	24
1924/25	Rossi	Corrado	Meccanica Razionale	23 luglio 1925	30
1924/25	Mancinelli	Renato	Fisica Matematica	23 luglio 1925	30
1924/25	Del Guercio	Alfonso	Fisica Matematica	28 ottobre 1925	28
1924/25	Grillo	Eugenio	Meccanica Razionale	16 novembre 1925	21
1924/25	Ricci	Roberto	Fisica Matematica	16 novembre 1925	30
1924/25	Socci	Clotilde	Meccanica Razionale	17 novembre 1925	25

Da questa ricerca si può dedurre e ipotizzare la soddisfazione di Fermi di avere dato il voto 30 al primo esame di Meccanica Razionale alla fine del corso a Vincenzo De Giorgi e un altro 30 nel successivo appello di luglio, a Mario Conti. Per Fisica Matematica il primo esame è sostenuto dall'unica donna che ha frequentato entrambi i corsi nell'anno accademico 1924/25, Clotilde Socci, anche se con voti non eccelsi, ma sempre nell'appello estivo anche per questa materia viene dato il voto di 30 a Renato Mancinelli.

Possiamo notare che nell'a.a. 1925/26 ci sono altre due donne che però sostengono solo l'esame di Meccanica Razionale, Bianca Nuterini e Flora Villani.

Fig. 11 – Due dei primi verbali d'esame firmati dal prof. Enrico Fermi a Firenze, quello di Fisica Matematica di Clotilde Socci del 16 luglio 1925, e quello di Meccanica Razionale di Mario Conti del 23 luglio 1925. In entrambi i verbali la seconda firma è del prof. Francesco Tricomi (Fig. 4).

Mod. 11.
R. ISTITUTO DI STUDI SUPERIORI PRATICI E DI PERFEZIONAMENTO
FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE - FISICHE E NATURALI

Processo verbale dell'Esame di *Fisica Matematica*
sostenuto oggi dal signor *Socci Clotilde*

ESAMINATORI	VOTAZIONE sull'Esame	VOTAZIONE per la Lode	OSSERVAZIONI
<i>Prof. Enrico Fermi</i>	<i>26</i>		
<i>Prof. Francesco Tricomi</i>	<i>26</i>		
<i>Flora Villani</i>	<i>26</i>		
	<i>30</i>		

A seguito di tali risultati il candidato suddetto è stato *approvato*
con *ventisei* su *tre* voti
Firenze, li *16 luglio* 1925

LA COMMISSIONE
E. Fermi
Tricomi
Flora Villani

Mod. 11.
R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
SEZIONE DI SCIENZE FISICHE E NATURALI

Processo verbale dell'Esame di *Meccanica Razionale*
sostenuto oggi dal signor *Conti Mario*

ESAMINATORI	VOTAZIONE sull'Esame	VOTAZIONE per la Lode	OSSERVAZIONI
<i>Prof. E. Fermi</i>	<i>8</i>		
<i>F. Tricomi</i>	<i>8</i>		
<i>R. Tricomi</i>	<i>8</i>		
	<i>26</i>		

A seguito di tali risultati il candidato suddetto è stato *approvato*
con *ventisei* su *tre* voti
Firenze, li *23 luglio* 1925

LA COMMISSIONE
E. Fermi
Tricomi
R. Tricomi

Alcuni studenti di Enrico Fermi in evidenza

Questa sezione è dedicata ad una selezione di studenti che hanno seguito i corsi tenuti da Enrico Fermi negli anni accademici 1924/25 e 1925/26 presso la Regia Università degli Studi di Firenze.

Fig. 12 – Bonanno Bonanni (Carrara, 25 aprile 1906 – dato non disponibile) in una foto sul registro della Scuola di Ingegneria di Torino, dove si è laureato a Torino nel 1929. Bonanno Bonanni – insieme a Paolo Pasca (Roma, 28 luglio 1904 – dato non disponibile), laureatosi nel 1930 in Ingegneria Civile presso la Scuola di Ingegneria di Padova dopo essersi iscritto inizialmente al Politecnico di Milano ed essere passato temporaneamente all’Università di Firenze – ha raccolto le Lezioni di Meccanica Razionale che Enrico Fermi ha tenuto alla Regia Università degli Studi di Firenze dal 1924 al 1926 e che vengono riprodotte nella seconda parte di questo libro. [Per cortesia dell’Archivio Storico Studenti del Politecnico di Torino]



Fig. 13 – Giuseppe Stefanelli (Firenze, 10 giugno 1905 – 18 ottobre 2009) in una foto dell’agosto 1926 insieme a due amici. Giuseppe Stefanelli frequentò a Firenze il biennio di avviamento all’ingegneria, durante il quale sostenne, tra gli altri, l’esame di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi, di cui nell’immagine di destra si riporta il verbale. Dopo essersi laureato in Ingegneria a Pisa, fu professore ordinario di Meccanica Agraria e Presidente dell’Accademia dei Georgofili dal 1977 al 1986. [Per cortesia di Paolo Blasi]



MAR 11 1926

R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

PIROLTA DI CORSO GASTONEGGIO – FISICHE E MATEMATICHE

Processo verbale dell’Esame di Meccanica Razionale
sostenuto oggi dal signor Stefanelli Giuseppe

ESAMINATORI	VOTAZIONE sull’Esame	VOTAZIONE per la Lode	OSSERVAZIONI
Prof. Enrico Fermi	10/10		
Giuseppe Albetti	10/10		
Paolo Pasca	10/10		

A seguito di tali risultati il candidato suddetto è stato approvato con lode
con lode

Firenze, 11 Luglio, 1926

LA COMMISSIONE
E. Fermi
Giuseppe Albetti
Paolo Pasca

Fig. 14 – Ugo Piperno (Firenze, 24 febbraio 1908 – Milano, 31 marzo 1996), dopo il biennio propedeutico di studi a Firenze nel 1924/26, si laureò in Ingegneria Elettrotecnica presso il Politecnico di Torino a ventuno anni. Lavorò alla Autelco, società di telefoni ed apparecchi di precisione, con varie cariche. La società venne acquisita da GTE nel 1963 e fusa con la parte radio della Magneti Marelli (già diventata in precedenza GTE) diventando in Italia GTE-Telecomunicazioni (nella foto l'Ing. Piperno, a sinistra, riceve l'Ambrogino d'Oro dal Comune di Milano, nel 1973). Piperno fu uno dei pionieri della produzione di fibre ottiche in Italia e Amministratore Delegato del Consorzio STS per le trasmissioni da satellite.



Fig. 15 – Una curiosità: Tito Tommaso Maria Brunetti (Firenze, 18 dicembre 1905 – Piacenza, 13 luglio 1954), dopo il biennio propedeutico di studi a Firenze nel periodo 1924/26, si laureò presso il Politecnico di Milano. Figlio di Giovanni Brunetti – che insegnò diritto civile all'Università di Firenze e fu Preside della Facoltà di Giurisprudenza – sposò la figlia di Ruppert di Baviera, Principe ereditario della Corona di Baviera. Nella foto Tito Tommaso Maria Brunetti è con la moglie, la principessa Editha Marie Gabrielle Anna di Baviera e con le tre figlie.



Fig. 16 – Leonetto Materassi (Firenze, 27 settembre 1905 – 20 aprile 1980) laureatosi in Ingegneria a Pisa, supera l'esame di Stato per l'abilitazione alla professione di Ingegnere a Bologna nel 1930. Fra il 1934 ed 1941 è attivo a Firenze con una sessantina di edifici in vari quartieri, soprattutto a Campo di Marte, Gavinana e Legnaia. Nel 1938 circa progetta tutta la nuova strada, via Francesco Berni, aperta parallelamente a viale Aleardo Aleardi¹⁴. Tra i suoi vari altri interventi a Firenze, ricordiamo il restauro del Palazzo Anselmi Ristori, operato negli anni 1975/76 (via Strozzi angolo via dei Sassetti, in figura), che le fotografie degli anni Sessanta mostrano in uno stato di grave degrado.



Fig. 17 – Piero Sanpaolesi (Rimini, 8 gennaio 1904 – Firenze, 10 marzo 1980), storico dell'architettura e restauratore. Laureatosi in Ingegneria a Pisa nel 1929 e in Architettura a Firenze nel 1936, prese servizio nel 1937 presso la Soprintendenza alle Belle Arti di Firenze, e nel 1943 fu nominato Soprintendente ai monumenti e alle gallerie di Pisa. Libero docente dal 1941 in Caratteri Stilistici e Costruttivi dei Monumenti, nel 1946 ricevette un incarico d'insegnamento presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa e nel 1954 presso quella di Architettura di Firenze, dove nel 1960 fu chiamato come professore ordinario di Restauro dei Monumenti e dove fondò e diresse l'Istituto di Restauro dei Monumenti, divenendo poi preside della Facoltà. Tenne anche corsi presso le Facoltà di Architettura delle Università di Istanbul (dal 1959) e di Teheran (dal 1963): in Iran eseguì anche restauri, tra i quali quello del mausoleo Oljoitou di Soltanieh.



¹⁴ G. Isola, M. Cozzi, F. Nuti, G. Carapelli, *Edilizia in Toscana fra le due guerre*, Edifir-Edizioni, Firenze 1994, p. 229.

Fig. 18 – Due immagini dal libro (la copertina e la macchina di Linde) di Manlio Mandò e Giulio Calamai, *Lezioni di Fisica Generale. I fondamenti della Termologia*, Libreria Universitaria, Bologna 1968. Giulio Calamai (Firenze, 15 giugno 1906 – 9 luglio 1984). Laureatosi in Matematica presso l'Università di Firenze nel 1929, fu assistente incaricato prima presso la cattedra di Analisi Matematica della medesima Università e poi, dal 1934 al 1935, presso l'Osservatorio di Arcetri. Dal 1945 al 1947 fu professore incaricato di Fisica Sperimentale, e di Fisica Teorica per i corsi integrativi. Nel 1964 ottenne la libera docenza in Ottica. Successivamente fu nominato Astronomo Capo presso l'Osservatorio di Arcetri ed ebbe l'incarico dell'insegnamento di Fisica II fino al raggiungimento dei limiti di età.

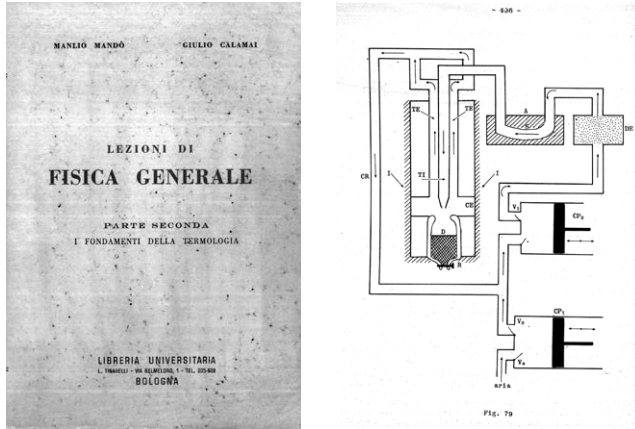


Fig. 19 – Raffaello Brusciaglioni (Firenze, 13 aprile 1907 – 6 agosto 1976) laureato in Ingegneria al Politecnico di Torino nel 1929, si specializzò in Ottica ad Arcetri. Dopo un breve periodo ad Arcetri entrò nello Stabilimento ottico San Giorgio di Genova-Sestri dove divenne prima, giovanissimo, dirigente nel 1940 e, nel 1943, direttore. Fu poi alla Ducati ed alla Marelli di Sesto San Giovanni¹⁵.



¹⁵ V. Ronchi, *Raffaello Brusciaglioni 1906-1976*, «Atti della Fondazione Giorgio Ronchi», Anno LV, n. 1, 2000, pp. 55-62.

Fonti dell'Archivio Storico dell'Università di Firenze

Presso l'Archivio Storico dell'Università di Firenze sono conservate, e sono state consultate per la stesura del presente lavoro, le seguenti fonti:

Regio Istituto di Studi Superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Sezione di Scienze Fisiche e Naturali. Registro della Carriera scolastica degli studenti. Voll. VI, VII, VIII

Regia Università degli Studi di Firenze, Sezione di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Avviamento all'Ingegneria. Registro della Carriera scolastica degli studenti. Voll. I, II, III.

Regia Università degli Studi di Firenze, Annuari per l'anno accademico 1924-1925, Tipografia Galletti e Cocci, Firenze 1925.

Regia Università degli Studi di Firenze, Annuari per gli anni accademici 1925-1929, (5 v.), Firenze, Stab. Tip. Già Chiari, succ. C. Mori, Firenze 1926-1930.

Sono inoltre disponibili le schede e i fascicoli di ogni studente contenenti i documenti amministrativi relativi all'iscrizione, ai verbali di esame e di laurea. Alcuni fascicoli risultano danneggiati dall'alluvione di Firenze del 4 novembre 1966 e non sono completi.

RICORDI DI FERMI*

Nello Carrara

Nell'estate del 1953 ricevetti la visita, inaspettata ma straordinariamente gradita, di una persona che non rivedevo ormai da circa trenta anni. Si trattava di una cara, intelligente, colta Signora, la madre di un mio antico compagno di studi universitari, che fu per me, nella mia giovane età e durante il periodo goliardico, quasi una seconda Madre: la signora Rasetti.

La signora Rasetti, che avevo perduto da gran tempo di vista, perché aveva seguito il suo illustre figlio Franco nelle molte peregrinazioni per il mondo, era ritornata da poco definitivamente in Italia, dopo lunghissima permanenza in America.

Ella aveva uno scopo nel venirmi a cercare: la signora Fermi stava compilando un libro sulla vita del marito e, mentre non le mancavano naturalmente notizie dal periodo romano in poi, ne era sprovvista per il periodo pisano e fiorentino. Essendo io stato compagno di studi di Fermi e di Rasetti sia a Pisa sia a Firenze, avrei dunque potuto essere una buona fonte per le informazioni mancanti.

Ricordammo insieme quel lontano periodo della nostra vita; ulteriori ricordi affiorano poi l'estate scorsa a Pozzuolo Umbro, dove i Rasetti hanno una bella proprietà, e dove ebbi la ventura di trovare Franco in persona.

Promisi alla signora Rasetti di farle pervenire quelle notizie, e quelle fotografie, di cui potevo disporre; ma la mia fu una promessa da marinaio.

La prematura e dolorosa scomparsa del mio antico compagno di studi, mi induce a raccogliere e ad esporre i miei ricordi, così che non vada completamente perduta anche questa traccia, sia pure modesta e tenue, del suo passaggio fra noi.

Dopo brevissima permanenza a Pisa, come studente del primo anno di Fisica ed alunno della Scuola Normale Superiore, fui chiamato, nel marzo del 1918, in servizio militare; eravamo in guerra, la prima guerra mondiale. Ritornai agli studi assai tardi, iscritto al terzo anno; trovai la scuola popolata da ufficiali di vario grado, antichi scolari che, come me, avevano dovuto

* Archivio di Stato di Firenze, Fondo Nello Carrara, Relazione tenuta al Rotary Club di Firenze il 16 maggio 1955. Pubblicato su concessione del Ministero dei Beni e delle Attività culturali e del Turismo. Divieto di ulteriori riproduzioni o duplicazioni con qualsiasi mezzo. Le figure sono state introdotte dai curatori della presente pubblicazione.

Fig. 1 – Adele Galeotti Rasetti (Narni, 8 gennaio 1870–Pozzuolo Umbro, 30 ottobre 1972) (seconda in piedi da sinistra) nella classe di pittura con le compagne di studio. Sulla sinistra Giovanni Fattori. La foto è del 1898 circa. [Per cortesia della Fondazione Franco Rasetti]



Fig. 2 – La villa a Pozzuolo Umbro – frazione del comune di Castiglione del Lago (Perugia) – della famiglia Rasetti. [Per cortesia di Stefano Malvagia]



Fig. 3 – Nello Carrara alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1920. [Per cortesia di Eugenio Carrara]



interrompere gli studi a causa della guerra, ed alcuni giovinetti in borghese, che noi, forti delle nostre divise e dei nostri galloni, considerammo inizialmente con supremo disprezzo e superiorità.

Ben presto però dovemmo accorgerci che fra loro ve ne era qualcuno meritevole di particolare considerazione. E ben presto si strinse fra tutti noi una cara e simpatica amicizia, cementata dalla consapevolezza di appartenere ad una scuola illustre, e dal comune appellativo di «sgobboni», che ci veniva gratificato dagli altri studenti.

Fondata da Napoleone nel 1813 come succursale della *Ecole Normale Supérieure* di Parigi, la Scuola Pisana ha sede nel bel Palazzo Vasariano dei Cavalieri di Santo Stefano.

Gli studenti, per esservi ammessi, dopo la maturità classica o scientifica, debbono sostenere difficili prove. In seguito frequentano i normali corsi universitari, e debbono regolarmente sostenere e superare gli esami con una media non inferiore al 27; debbono inoltre seguire alcuni corsi speciali, complementari nella Scuola. E in compenso hanno l'alloggio e il vitto gratuiti nello stesso Palazzo; hanno a disposizione una meravigliosa biblioteca; godono dei vantaggi che porta la vita in comune in un severo ambiente di studi.

L'ambiente era allora veramente severo, molto più di quanto non lo sia ora; scale immense, tetre e buie; camere, per noi normalisti, vaste, fredde, francescanamente ammobiliate; cibo monotono e scarso duravano le restrizioni di guerra – ; severissimi e inaccessibili i professori: Bianchi, Bertini, Maggi, Puccianti, Nasini, D'Achiardi e via dicendo, nomi illustri, di fama mondiale.

Ma la nostra giovinezza e la nostra gaiezza temperavano l'austerità dell'ambiente, e, raggiunto fra di noi l'affiatamento, le nostre menti si allenarono insieme agli studi e alle burle.

Cominciammo così: davanti al nostro Palazzo, a fronte della meravigliosa scalinata d'accesso, si erge la mole della gigantesca statua a Cosimo I (ai piedi della quale chioccola l'acqua da una graziosa fontana). Non ricordo bene a chi venne in mente di adornare la nuda testa del Granduca con un adeguato copricapo: una notte decidemmo di fare una prima scalata della statua per prenderne le misure. L'impresa risultò tutt'altro che facile. Vista dal basso, la statua sembrava accessibile, ma per salire fino alla testa occorrevano doti di agilità non comuni. Solo in due superammo il cimento: io ed un altro ragazzo press'a poco della mia statura, che non presentava alcuna particolare caratteristica per farsi notare. Insieme arrivammo in cima nelle più strane posizioni e con adeguate contorsioni svolgemmo il nostro compito. Quasi una settimana durò la fabbricazione di un piumato e variopinto cilindro, che richiese spese, non indifferenti per le nostre tasche. E finalmente, i medesimi ardentissimi poterono notte tempo coronare l'opera. Il successo fu notevole; la statua così adornata richiamò l'attenzione del pubblico; avemmo l'onore di vederla citata sui giornali, con paternali dirette ai soliti ignoti. Fino a che una squadra di spazzini, provvisti di scale e attrezzi, fu inviata dal Comune a togliere l'indegno copricapo.

Il mio collaboratore nell'epica impresa era stato proprio Fermi. Quel Fermi che avevo già avuto modo di apprezzare come vorace mangiatore di casta-

Fig. 4 – Luigi Puccianti (Pisa, 11 giugno 1875–Pisa, 9 giugno 1952) (costruì uno spettroscopio ad alta sensibilità, con il quale studiò l'assorbimento di raggi infrarossi di molti composti, ponendo in correlazione gli spettri con le strutture molecolari).



Fig. 5 – Il monumento a Cosimo I dei Medici in piazza dei Cavalieri a Pisa in un'immagine del 1920 circa. [Collezione Giannini] Alle sue spalle il palazzo della Carovana (o dei Cavalieri) – già quartier generale dell'Ordine dei cavalieri di Santo Stefano – sede storica della Scuola Normale Superiore di Pisa.



Pisa - Monumento a Cosimo I De' Medici in piazza dei Cavalieri (P. Francavilla sec. XVII)

gnaccini, necessaria integrazione alla nostra parca mensa. Quel Fermi che già mi aveva intimidito in aula col suo incredibile sapere.

Il compito di chiarire alle nostre menti il mistero dell'analisi infinitesimale era affidato ad un valente professore, ex normalista, dalla cui bocca uscivano con incredibile velocità teoremi e spruzzi di saliva. Un giorno, al termine di una lezione particolarmente faticosa per l'insegnante e per noi, Fermi si alzò, e con la sua caratteristica, strascicata voce, espresse il parere che tutto quanto era stato detto, avrebbe potuto essere presentato sotto un aspetto assai più semplice. Il professore lo prese in parola e lo invitò ad esporre l'argomento secondo il suo punto di vista. Per il timore che tutti noi avevamo per i luminari della scienza, il gesto di Fermi apparve di una audacia inconcepibile: ma il Fermi, in un glaciale silenzio di attesa, fece una brillantissima lezione, riscuotendo la completa approvazione del difficile professore e lasciando in noi un senso di reverente sgomento.

Il Fermi non era uno scolaro come gli altri: non studiava alcuna lezione, e non ne aveva bisogno; andava per conto suo. Mentre noi eravamo costretti ad affannarci per poter seguire gli insegnanti, egli si occupava già dei problemi più attuali della Fisica. Chi di noi conosceva a fondo quel misterioso personaggio della termodinamica, che va sotto il nome di entropia? Nessuno; ma Fermi aveva già da dire qualche cosa di nuovo sul suo conto.

Uno dei principali svaghi di noi normalisti, cui si erano frattanto

aggiunti alcuni altri simpatici e valenti studenti, erano le escursioni invernali sulle Alpi Apuane. Facevano parte del gruppo quasi sempre un aspirante filosofo, anche lui attualmente in America, De' Negri, qualche ragazzo della tribù dei Pontecorvo, sempre Rasetti, qualche volta Fermi. Tutti riconoscevano la superiore preparazione alpinistica di Rasetti, il quale si prendeva in ogni caso l'iniziativa, e i cui ordini erano legge: Rasetti era fino da allora un uomo straordinario; dotato di grandissima intelligenza e di straordinaria memoria, conosceva una enorme quantità di cose; la sua cultura e i suoi interessi andavano dalla fisica ai coleotteri, di cui aveva una fra le migliori collezioni di tutta Italia: dalla chimica all'arte, alla letteratura. Alto, magro, con un mento prominente, che denotava la sua straordinaria forza di volontà, estremamente preciso nelle sue cose, nella sua attività, nei suoi movimenti, sguardo acutissimo e penetrante, spirito caustico molto temibile, egli si faceva notare di primo acchito. Quanto Fermi passava inosservato, tanto Rasetti con la sua rumorosa, crosciante, petulante risata su tutto e su tutti, richiamava immediatamente l'attenzione. È stata una mia singolare ventura aver potuto passare un periodo della mia vita, purtroppo assai breve, con questi due uomini eccezionali, Fermi e Rasetti.

Le Alpi Apuane, nonostante la loro modesta altezza, presentano notevoli difficoltà; irte, dirupate, coperte d'inverno di lastroni di ghiaccio, vogliono vedere l'uomo in faccia. La soddisfazione delle difficoltà superate, i meravigliosi panorami che si presentano a chi ne raggiunga i vertici, sul mare ad ovest e sulle montagne altrove, ne costituiscono il fascino. Estremamente pericolose le eventuali cadute. Ed ecco che noi, riconoscendo l'opportunità di placare la divinità della montagna, facevamo precipitare a valle di tanto in tanto qualche masso, con un complicato rito propiziatorio. Logicamente la caduta del masso avrebbe fatto accrescere l'entropia dell'universo, che così soddisfatta, speravamo ci avrebbe risparmiato. E poiché mai nulla di spiacevole accadde, possiamo concludere che i rituali sacrifici dell'entropia furono veramente efficaci.

Fu proprio in occasione di quelle escursioni e di questi sacrifici propiziatori, che Fermi ci iniziò alle sue nuove e straordinarie idee in proposito all'entropia.

Come si sa, l'entropia, nello svolgimento dei fenomeni naturali, ha il vizio di crescere sempre; nulla può accadere nel mondo fisico senza che l'accrescimento dell'entropia sia massimo; l'ac-

Fig. 6 – Da sinistra a destra: Franco Rasetti, Nello Carrara e Enrico Fermi in una escursione sulle Alpi Apuane nel 1920. [Per cortesia di Eugenio Carrara]



crescimento dell'entropia è criterio per distinguere i fenomeni che possono realmente manifestarsi dagli altri; caratterizza i fenomeni irreversibili.

Consideriamone uno dei più semplici; un recipiente pieno di un qualsiasi gas, ad una determinata temperatura e pressione. Un secondo recipiente, inizialmente vuoto, viene posto in comunicazione col primo. Una parte del gas passa allora dal primo al secondo e, dopo un tempo conveniente, il gas si distribuisce nei due recipienti, assumendo una diversa pressione. Questo processo è irreversibile, perché mai si è potuto constatare che il gas, distribuito nei due recipienti, spontaneamente si raccolga in uno solo; e durante questo processo l'entropia aumenta.

La legge di distribuzione delle velocità fra le molecole del gas, proposta dal Maxwell, la teoria cinetica dei gas che ne consegue elaborata dal Boltzmann, permettono la formulazione matematica dell'entropia; e, ammettendo che il gas evolva spontaneamente da stati meno probabili a stati più probabili, l'entropia risulta proporzionale al logaritmo della probabilità di stato.

Rimaneva tuttavia una lacuna: il valore assoluto dell'entropia in uno stato non è conoscibile, ma soltanto si possono valutare le sue variazioni nel passaggio da uno stato ad un altro: come se si sapessero contare gli scalini che separano il quindicesimo piano di un grattacielo dal sedicesimo, ma non si potesse conoscere il principio della scala.

Pur con queste limitazioni, la dottrina dell'entropia aveva risolto gran numero di questioni della fisica e della chimica; la conoscenza del valore assoluto dell'entropia, del principio della scala, avrebbe tuttavia permesso progressi straordinariamente importanti.

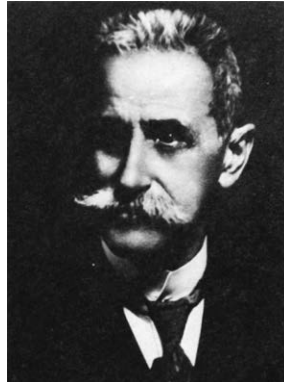
Questo, la determinazione del valore assoluto dell'entropia, era il problema che mulinava nella mente del giovane Fermi, non ancora ventenne, che con noi mangiava il castagnaccio, saliva sulla statua di Cosimo I, faceva sacrifici all'entropia sulle Alpi Apuane; mentre noi dovevamo limitarci allo studio scolastico, e per noi durissimo, sulle dispense e sui libri, da lungo tempo abbandonati per il servizio militare.

Piccolo di statura, magro, di colore piuttosto oscuro, folti i capelli, il naso minuto, un impertinente dentino di latte in bella mostra, il capo teso in avanti, la profondità del pensiero di Fermi appariva solo dagli occhi, dalla interiorità del suo sguardo.

Uno degli studi più ostici era il corso di meccanica razionale del simpatico ed illustre professore Maggi, quello che non facevamo in tempo a salutare, incontrandolo per via, perché riusciva a precederci. Un lungo baffo brizzolato, drizzato in alto, il sinistro; un lungo baffo volto in basso, il destro, il vivacissimo e asciutto professore ci iniziava ai misteri delle sue figure materiali, riempiendo lavagne di formule e rifuggendo nel modo più assoluto da qualsiasi ausilio grafico, che secondo noi, sarebbe stato invece efficacissimo: la supposta retta, la retta precedentemente indicata, la retta in discorso, invece della retta a , della retta b , della retta c , e di un conveniente disegno alla lavagna, accrescevano per noi le difficoltà della difficile materia. Fermi non aveva bisogno di alcuna meditazione, egli sapeva già tutto; Rasetti imparava tutto senza sforzo e, con

la sua prodigiosa memoria, era in grado di ripetere in qualunque momento qualunque pagina del testo, a cominciare dalla prefazione, compresi i segni di interpunzione: «la presente edizione virgola sollecitamente allestita virgola per servir di guida virgola ai nostri giovani virgola». Le virgole e le lingue stranierere erano il debole del prof. Maggi, che, conoscendo perfino il russo, si diceva avesse dimenticato l'italiano, tanto involute ci apparivano le sue esposizioni.

Fig. 7 – Gian Antonio Maggi (Milano, 19 febbraio 1857–Milano, 12 giugno 1937), studente di Kirchhoff a Berlino, tenne la cattedra di Meccanica Razionale a Pisa per circa un trentennio.



Ed un bel giorno arrivammo finalmente all'attesissimo teorema del gatto. Il gatto, comunque venga lasciato cadere, ricade sempre sulle zampe. «*Le chat retombe toujours sur ses pattes*»: questione grave, che aveva affaticato la celebre scuola dei meccanici francesi, perché apparentemente in contrasto con uno dei principi più solidi della meccanica razionale, il principio della conservazione della quantità di moto areale.

Fig. 8 – Sequenza della caduta di un gatto ripresa nel 1894 da Étienne-Jules Marey (Beaune, 5 marzo 1830–Parigi, 15 maggio 1904). Marey inventò il *cronofotografo*, uno strumento, tra i precursori del cinema ma ideato per indagini scientifiche e non per l'intrattenimento, in grado di fissare le varie fasi di un movimento a scopo di studio.

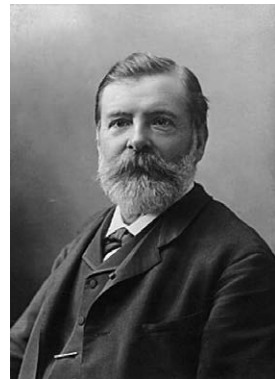
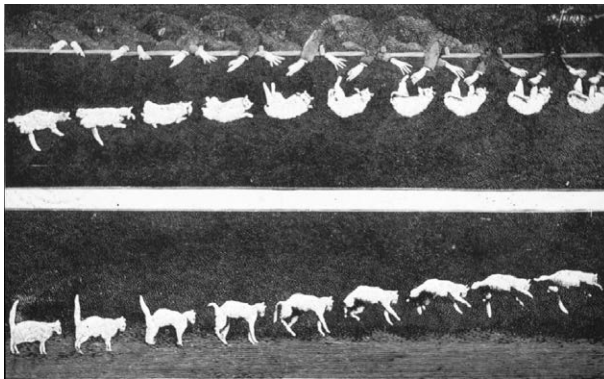
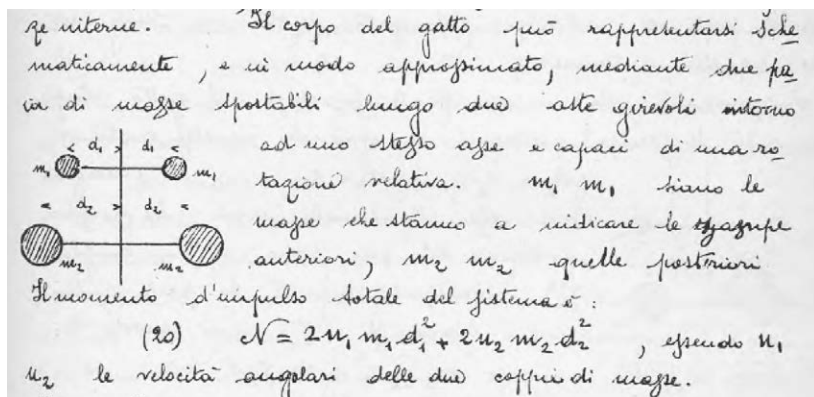


Fig. 9 – Schema di un gatto secondo Max Abraham¹. Max Abraham (Danzica, 23 marzo 1875–Monaco di Baviera, 16 novembre 1922) fu un fisico e matematico tedesco, tra i primi a occuparsi della teoria della relatività; lavorò in concerto con Tullio Levi-Civita e Albert Einstein, operando soprattutto in Italia.



Da eccellenti fisici sperimentali, Fermi, Rasetti ed io decidemmo di tentare la prova; e di tentarla in lezione, proprio durante l'attesa lezione del teorema del gatto. Rinuncio a descrivere il pandemonio che successe quando, terminata la esposizione del teorema, l'innocente bestiola fu lanciata nell'aula. Va tuttavia ricordato che il professore fu, in quell'occasione, come del resto ne eravamo certi, di grande spirito e comprensione. D'altronde era noto nell'ambiente goliardico pisano, e credo anche ai professori, che, capitano Rasetti, era stata fondata una ristrettissima società, la «Società Antiprossimo», il cui nome era tutto un programma. In quel periodo ovunque, nella scuola e nei salotti, si faceva gran parlare della teoria della relatività di Einstein. Chi la portava alle stelle e chi la considerava parto di una fantasia malata: il tempo non è assoluto ma relativo; diverso nei vari sistemi di riferimento: le dimensioni degli oggetti appaiono diverse a seconda dello stato di moto dell'osservatore; la velocità della luce invariante. Particolarmente interessava nei salotti sapere se, viaggiando a velocità prossime a quelle della luce, il corso della nostra vita sarebbe accelerato o ritardato; se, per mezzo di Einstein sarebbe stato possibile disporre dell'elisir di lunga vita. Avvenne così che il prof. Maggi si trovò in obbligo di manifestare la sua opinione, ciò che egli fece con una «esposizione compendiosa dei principi scientifici della teoria della relatività generale». Fermi era già padrone di questa sottile e profonda teoria. Ed io ricordo le lezioni che egli ne fece, nell'aula di fisica, essendo seduti, nei banchi degli scolari, gli stessi professori. E da quel giorno Fermi fu quelli che sopra gli altri come aquila vola. Ma, nonostante la potenza del suo volo, egli rimase, allora e sempre, il caro compagno, semplice e buono,

¹ *Meccanica razionale. Appunti presi alle lezioni del Prof. Max Abraham*, G. Tenconi, Milano 1910-1911, pp. 218-221.

che partecipava alla nostra vita, alle nostre birbonate, al quale sempre potevamo ricorrere, certi del suo aiuto.

Mentre la «Società Antiprossimo» iniziava la sua attività, di cui una delle prime manifestazioni fu il lancio del gatto – e una delle successive il lancio di pezzetti di sodio metallico durante i giorni di pioggia ai piedi dei passanti, per goderne le subitanee reazioni alla improvvisa fiammata provocata dal sodio al contatto con l'acqua – i membri della medesima società erano alle prese non solo con la teoria della relatività ma anche con la teoria dei quanti, che insieme con la prima, anzi più della prima, stava sconvolgendo la fisica dalle fondamenta. È molto probabile che di nostra iniziativa non avremmo neppure pensato alla possibilità di affrontare una teoria così nuova e misteriosa, se non ci avesse stimolato la consapevolezza che per Fermi si trattava di affari di ordinaria amministrazione.

I quanti sono davvero qualche cosa di misterioso; de Broglie, l'iniziatore della meccanica ondulatoria e Premio Nobel nel 1941 scriveva «per conto mio ero ventenne quando ho cominciato ad occuparmene, è dunque un quarto di secolo che medito su di essi; ebbene, debbo umilmente confessarlo, che se sono giunto nel corso di queste meditazioni a capire un po' meglio qualcuno dei loro aspetti, io non so davvero che cosa realmente nasconda la maschera che ne copre il volto. Mi pare tuttavia che una cosa possa essere affermata: nonostante l'ampiezza e l'importanza dei progressi compiuti dalla fisica negli ultimi secoli, finché i fisici ignoravano l'esistenza dei quanti, nulla potevano comprendere dell'intima e profonda natura dei fenomeni fisici, perché senza quanti non ci sarebbe né luce né materia, e, se è lecito parafrasare un testo evangelico, si può dire che nulla di quello che è stato fatto è stato fatto senza di essi».

Soltanto oggi possiamo misurare l'estensione della rivoluzione compiuta dai quanti. La fisica classica ci mostrava l'universo simile ad un gigantesco meccanismo, suscettibile di essere descritto con assoluta precisione, localizzando le sue parti nello spazio e la loro modificazione nel tempo; meccanismo la cui evoluzione poteva essere rigorosamente prevista in base a un certo numero di dati sulla sua situazione iniziale.

La teoria della relatività, pur rimaneggiando profondamente queste idee, le aveva però sufficientemente rispettate e non sconfessava il determinismo classico. Non così la teoria dei quanti, che, non permettendo di rappresentare con continuità nello schema dello spazio e del tempo, l'evoluzione di fenomeni naturali, obbliga a modificarne completamente il concetto.

L'origine della teoria dei quanti si trova nelle ricerche compiute da Max Planck sulla teoria dell'irraggiamento del corpo nero. I metodi della fisica classica, applicati a questo problema, conducevano a conclusioni non solo in contrasto con l'esperienza, ma addirittura assurde (Rayleigh) senza alcuna speranza di giungere ad un risultato accettabile.

Appariva la necessità di introdurre nella fisica punti di vista affatto nuovi, Planck ebbe allora l'idea geniale di enunciare un postulato interamente estraneo alle concezioni classiche, che è il seguente: la materia non può emettere energia raggianti che per quantità finite, proporzionali alla frequenza:

il fattore di proporzionalità è una costante universale delle dimensioni di un'azione meccanica. È la celebre costante h di Planck. Partendo da questo postulato, paradossale secondo la fisica classica, Planck giunse a scrivere una legge dell'irraggiamento termico, cui è legato il suo nome.

Il confronto mostrò che la teoria di Planck è perfettamente in accordo con l'esperienza; e a poco a poco ne apparve l'importanza fondamentale non solo nel problema particolare dell'irraggiamento del corpo nero, ma in qualunque campo.

Fu l'introduzione dei quanti ad esempio che permise la risoluzione completa dei problemi spettroscopici e consentì di svelare il segreto della costituzione atomica e molecolare. I primi metodi per questa introduzione si debbono al Bohr e successivamente al Sommerfeld. A dir vero essi sapevano piuttosto di magia o di stregoneria, più che di scienza vera e propria: ma, con la successiva elaborazione della meccanica quantistica e ondulatoria, le regole di quantizzazione appaiono oggi sotto una luce ben diversa.

Allora però, verso il 1920, la benemerita «Società Antiprossimo» si trovava di fronte ai primi incerti e farraginosi inizi di un così brillante avvenire della teoria dei quanti e la nostra introduzione nei suoi misteri apparve estremamente faticosa.

Non così per Fermi, il quale accoppiava ad una abilità matematica eccezionale una altrettanto eccezionale intuizione dei fenomeni fisici. E non solo Fermi era perfettamente al corrente delle nuove idee, ma già stava maturando nella sua mente la possibilità di servirsene, per risolvere il problema che personalmente lo assillava, quello della determinazione del valore assoluto dell'entropia.

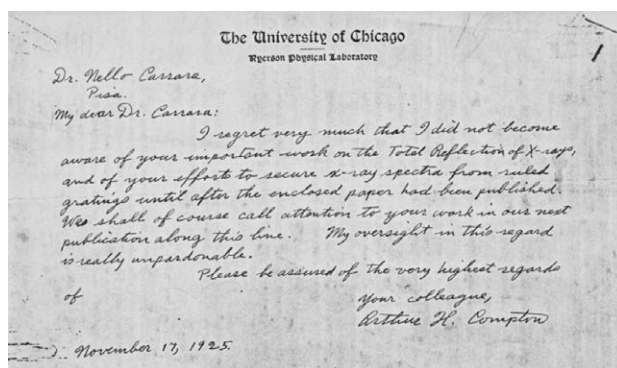
Egli pensava che, essendo le leggi spettroscopiche esaurientemente spiegate «quantizzando» i moti degli elettroni negli atomi, fosse necessario quantizzare anche i moti delle molecole nei gas. L'entropia allora, legata direttamente alla velocità delle molecole, dovrà contenere il quanto d'azione h e vi sono ragioni per prevedere che la divergenza fra l'entropia calcolata nel modo classico e quella calcolata secondo le moderne vedute quantistiche sarà sensibile specialmente verso le forti pressioni, le basse temperature, cioè per gli stati fortemente condensati o, come disse Fermi, negli stati degenerati.

Non è il caso di addentrarci nello sviluppo assai difficile della teoria del Fermi; basterà affermare che non solo egli poté arrivare alla determinazione del valore assoluto dell'entropia, ma ad accorgersi che la regola semplice del Sommerfeld per quantizzare un sistema non vale quando il sistema stesso contenga particelle identiche, com'è ad esempio il caso dell'elio, il cui atomo contiene due elettroni fra loro indistinguibili: qui spuntava in germe il principio di esclusione del Pauli.

Mentre Fermi era perduto dietro a queste elevate speculazioni teoriche, io andavo elaborando il mio lavoro di tesi di laurea: un lavoro sperimentale su un argomento allora di grande attualità: lo studio della diffrazione dei raggi X mediante i cristalli. Si trattava di ripetere e discutere difficili esperienze di Friedrich, di Knipping e di Bragg, di cui tutti allora parlavano. Oggi, che si

possono acquistare spettrografi a raggi X così come si compra un microscopio, non ci si può rendere conto delle difficoltà cui andava incontro un inesperto ragazzo, di fronte ad esperienze così nuove e sconcertanti. Tutto era da fare: dai tubi per raggi X agli apparecchi per la loro alimentazione; dai dispositivi per cristalli, ai cristalli stessi. Col consiglio e con preziosi suggerimenti, mi fu di grandissimo aiuto il nostro comune maestro, prof. Puccianti, abilissimo sperimentatore, uomo di acuto ingegno e di vasta cultura, che non posso ricordare se non con la più profonda commozione, perché mi fu paterno amico fino ai suoi ultimi giorni. Anche Fermi mi assisteva in queste ricerche, e, se il suo aiuto mi fu prezioso per la parte teorica, fu invece nullo per la parte sperimentale propriamente detta, per la quale pareva non avesse alcuna particolare disposizione. Questa impressione, che conservo ben viva nel ricordo, doveva essere clamorosamente smentita, perché Fermi si dimostrò grandissimo, non solo come teorico, ma anche come uomo di laboratorio.

Fig. 10 – Lettera del novembre del 1925 di Arthur H. Compton – Premio Nobel per la Fisica nel 1927 – a Nello Carrara: «Mio caro Dr. Carrara, mi dispiace molto di non aver saputo dei suoi importanti lavori sulla riflessione totale dei raggi X, e dei suoi sforzi per accertare lo spettro dei raggi X tramite reticoli di diffrazione, fino a dopo la pubblicazione del lavoro che le allego. Ovviamente citeremo il suo lavoro nel nostro prossimo articolo sull'argomento. La mia svista in questo caso è stata imperdonabile. La prego di accettare i migliori omaggi da parte del suo collega Arthur H. Compton». [Per cortesia di Eugenio Carrara]



La nostra giornata era davvero piena di avventure: avventure scientifiche, avventure goliardiche. Rasetti, che pure seguiva il mio lavoro di tesi e mi consolava nelle numerose difficoltà, aveva messo singolarmente a profitto della «Società Antiprossimo» le sue molteplici conoscenze chimiche. Egli aveva elaborato sostanze estremamente pestifere, di cui fu deciso l'impiego il giorno in cui venimmo a sapere che un intero collegio di graziose ragazze sarebbe salito sul campanile pendente. Mentre le disgraziate salivano, una dietro l'altra, la scala a chiocciola che corre lungo la torre, fu gettata nell'interno una delle più poderose ed efficienti bombe Rasetti. Un odore tremendo riempì il campanile; alcune ragazze si sentirono male, alcune addirittura svennero: l'avvenimento ebbe l'onore della cronaca.

Ad avventure del genere, faticose e pericolose, seguivano periodi di riposo dedicati alla attenta lettura e al commento del *Corriere dei Piccoli*, in casa Rasetti. Tutto valeva a farci ridere; e fra le risate emergeva in modo particolare quella di Rasetti; tutto appariva straordinariamente divertente.

Di pari passo si sviluppava l'attività sportiva: alle escursioni in montagna si alternavano gite in bicicletta nei dintorni di Pisa; e per poco una di queste non ebbe conseguenze spiacevoli. Andavamo verso Navacchio di passo turistico, navigando in un mare di fango per le recenti piogge, con scassatissime biciclette prese a nolo. Erano momenti politicamente assai inquieti e gli studenti, in modo particolare, erano malvisti: l'attraverso di alcuni paesi già ci era stato motivo di inquietudine, e finalmente passando per la piazzetta di non ricordo più quale località, fummo salvi solo perché la bicicletta di Fermi non aveva parafranghi. La vista di Fermi, mutato in una maschera di fango, volse in riso e innocua derisione le gravi minacce che ci erano state rivolte.

Potrei continuare a lungo con la descrizione di queste avventure. Ma il tempo passa. Presa finalmente la laurea con piena soddisfazione e scelto come assistente dal mio professore, dopo breve tempo doveti nuovamente abbandonare studi ed amici perché richiamato in servizio militare. La guerra era finita, ma il nostro paese non era tranquillo. Mi aspettava un servizio davvero poco divertente.

Nel lasciare i miei amici, in particolare ben ricordo di aver detto rivolto a Fermi: quando ritornerò e avrai avuto il Premio Nobel, non mi guarderai mica dall'alto in basso!

Ma quando ritornai, ormai libero da obblighi militari, Fermi non era più a Pisa; appena laureato era stato chiamato all'Università di Firenze.

Là potei continuare a frequentarlo, favorito dal fatto che sono fiorentino e che i miei genitori e la mia casa paterna sono a Firenze.

Nella nuova destinazione Fermi continuava a meditare sui problemi riguardanti l'entropia. Se nel calcolo dell'entropia è la legge dei quanti che domina e non la meccanica classica, tutto l'edificio teorico corrente, nel quale era stato inquadrato fino allora il comportamento dei gas ignorando il concetto di discontinuità del Planck, avrebbe dovuto essere corretto; si poteva pensare che, con la quantizzazione, i risultati sarebbero stati diversi e più conformi all'esperienza specialmente alle basse temperature, alle forti pressioni, ossia in stato di degenerazione.

Una regola importantissima era stata enunciata in quel tempo dal fisico Pauli, in aggiunta alle regole di Bohr e Sommerfeld, e cioè che quando in un atomo esiste un elettrone, il cui moto è definito da quattro numeri quantici, è escluso che a un altro elettrone corrispondano i medesimi numeri: questo principio di esclusione affermava dunque che in un atomo un solo elettrone può stare in una determinata condizione quantica. Pauli dimostrò che la sistematica degli spettri è dominata da questo principio: e non solo quella degli spettri atomici, ma anche quella degli spettri molecolari.

E il Fermi compì l'ardito passo di estendere la regola all'insieme delle molecole costituenti la massa gassosa ed elaborò sulla base della regola di Pauli, una nuova statistica dei moti molecolari che da lui ha preso il nome.

Le conseguenze della statistica di Fermi non tardarono ad essere sempre più numerose ed importanti. Nella sua luce furono risolti problemi famosi sui calori specifici dei gas e dei metalli; furono completamente chiarite la legge di Wiedmann e Franz sul rapporto fra conducibilità termica ed elettrica, la legge di Richardson dell'emissione termoelettronica, l'effetto Volta, l'effetto Peltier, la conduzione elettrica dei metalli e dei semiconduttori e così via; i modernissimi diodi a cristallo di silicio e di germanio, e i transistor, che costituiscono l'ultima novità dell'elettronica, e tanto avvenire sembrano avere in ogni campo della moderna civiltà, derivano dalla statistica di Fermi.

Due sono oggi le statistiche che dominano la fisica: quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac; l'una valevole tipicamente per i fotoni, l'altra per gli elettroni. La meccanica ondulatoria ha stabilito un criterio generale per conoscere quale delle due debba essere applicata. Un insieme di particelle uguali possono obbedire all'una o all'altra statistica. Si tratta di considerare una certa funzione, detta funzione d'onda, che dipende dalle coordinate dello spazio e dal momento angolare o spin delle particelle. Per le particelle che, come i fotoni, seguono la statistica di Bose, la funzione d'onda è simmetrica, per quelle invece che, come gli elettroni, seguono la statistica di Fermi, la funzione è antisimmetrica. Questo risultato è di straordinaria importanza in quanto ha consentito di raggiungere profonde informazioni sulla struttura dei nuclei atomici, e, fra l'altro, ha permesso di escludere nei nuclei stessi, la presenza degli elettroni.

Fig. 11 – L'Istituto Nazionale di Elettroacustica fondato da Mario Corbino in Via Panisperna a Roma in una cartolina del 1943. [Collezione Giannini]



Fig. 12 – La Società Italiana di Fisica, che aveva fondato nel dopoguerra la Scuola Internazionale di Fisica di Villa Monastero a Varenna, organizzò nel settembre del 1949 – in occasione del 150° anniversario dell'invenzione della pila – un Convegno internazionale sui Raggi cosmici, a cui partecipò Enrico Fermi (presentato dal programma come «grande fisico italo-americano»), al suo primo rientro in Italia. [Collezione Giannini]



Come ho detto, Fermi elaborava queste nuovissime teorie a Firenze, nella quiete del laboratorio dell'Istituto di Fisica di Arcetri, fondato da un altro illustre fisico umanista della vecchia scuola, il Garbasso, nel luogo stesso dove Galileo aveva svelato per primo le vie dell'Universo.

La permanenza di Fermi a Firenze fu breve. Chiamato a Roma alla Cattedra di Fisica Teorica da Corbino, rapidamente ascese a fama internazionale. Dopo la sua partenza da Firenze, le nostre strade si separarono e solo raramente ebbi occasione di rivederlo. L'ultima volta, mi incontrai con lui durante il Congresso Voltiano sui raggi cosmici nel 1949 a Como. Allora egli mantenne la promessa e, nonostante il Premio Nobel e il resto, ebbe con me la familiarità degli antichi tempi.

Ritornò anche l'estate scorsa in Italia, a Varenna, per tenere un corso di Lezioni alla Scuola Internazionale organizzata dalla Società Italiana di Fisica. Non andai a Varenna, perché da lungo tempo la mia attività si svolge in altre direzioni. Tuttavia, non volendo rinunciare ad un nuovo incontro con lui, pregai la signora Rasetti di combinare una riunione in Valdarno, dove parenti della signora Fermi posseggono una villa assai prossima alla nostra. La riunione non poté avvenire, perché Fermi, già sofferente per i primi e

Fig. 13 – ‘Il Frassine’, la villa a Rignano sull’Arno frequentata da Enrico Fermi. Della villa in Valdarno ne parla anche Laura Fermi nel libro *Atomi in famiglia* (Arnoldo Mondadori Editore, Verona 1954, pp. 66-67). [Collezione Giannini]



pur gravi sintomi del male, dopo un breve soggiorno in alta Italia, fece direttamente ritorno in America.

Pochi mesi dopo, seppi che Fermi era stato sottoposto ad un grave atto operativo, poi la notizia ferale della immatura fine.

Vi leggo quanto mi scrisse in tale occasione la signora Rasetti.

«La morte, dovuta ad un embolo, fu pietosa con lui, risparmiandogli gli ultimi tempi della malattia che sono i più atroci, l'unica consolazione che abbiamo avuto è stata il sapere che non ha sofferto molto, dormendo quasi sempre sotto l'influsso di uno speciale calmante. Segrè che andò a visitarlo prima e stette qualche giorno con lui, disse che Fermi e la moglie erano perfettamente informati della malattia e che ne parlavano con uno stoicismo incredibile. Discorsi degni – scrisse Segrè – dei dialoghi di Platone».

Non sono certo la persona più qualificata per render conto delle successive grandi scoperte di Fermi; ho già detto che i campi in cui si svolsero le nostre attività furono diversi. Mi proverò tuttavia a darne un cenno, sia pure fugacissimo.

Se la statistica di Fermi escludeva che l'interno dei nuclei atomici potesse alloggiare elettroni, tuttavia era un fatto sperimentale che nelle trasformazioni radioattive i nuclei espellono proprio elettroni, dotati di alta velocità, i cosiddetti raggi beta. Era dunque naturale che l'attenzione di Fermi fosse richiamata da questa apparente contraddizione fra la sua statistica e i fatti sperimentali accertati. Per di più, mentre i fenomeni atomici e subatomici sono

dominati dai quanti, l'emissione beta sembra sottrarvisi, in quanto si riscontra che le velocità delle particelle beta, sono distribuite in modo continuo, sino ad un certo valore massimo. Pauli aveva già suggerito che l'emissione beta potesse essere dovuta ad un processo nucleare nel quale un protone si trasforma in neutrone, emettendo appunto un elettrone – la particella beta –. Ma, per rispettare il principio della conservazione dell'energia, egli era stato costretto ad ammettere che insieme con l'elettrone venisse espulsa un'altra particella, neutra e di massa trascurabile, e perciò irrilevabile negli esperimenti. Fermi, ripreso il suggerimento di Pauli, seppe dargli forma quantitativamente e fornire solide argomentazioni a favore dell'esistenza della nuova particella che prese poi, in tutto il mondo scientifico, su sua proposta, la denominazione di «neutrino».

In quello stesso periodo di tempo, a Parigi i coniugi Joliot e Curie riuscivano a produrre artificialmente alcuni nuclei radioattivi, bombardando con particelle nuclei di elementi leggeri. Fermi, illuminato da questa possibilità, e pensando che i neutroni, sprovvisti di carica elettrica, dovessero risultare ben più efficaci, mosse all'attacco dei nuclei atomici sottoponendoli a bombardamento neutronico. Scoprì così nel 1934 la radioattività artificiale, in collaborazione con i ragazzi di Corbino, cioè con quel gruppo di valentissimi giovani, fra cui Rasetti, Amaldi, Segrè, che Corbino aveva saputo riunire nel suo Istituto romano. Ad arricchire la preziosa raccolta di risultati che rapidamente essi ottennero col bombardamento neutronico, si aggiunse poi la casuale scoperta della molto maggiore efficacia dei neutroni lenti. Negli anni successivi Fermi e i suoi collaboratori si dedicarono alla estensione dei risultati conseguiti, finché nel 1939 Fermi, ottenuto il Premio Nobel, si trasferì stabilmente in America alla Columbia University. Già avevano lasciato l'Italia Rasetti e Segrè e Pontecorvo. Non si può a questo punto tacere la profonda amarezza nella constatazione di un così grave dissanguamento del nostro Paese, che tuttora continua, e rivolgere un invito alla ricerca dei mezzi adeguati per porvi riparo.

Nel 1939, dopo la scoperta di Hahn e Strassmann della scissione dell'uranio, sulla base di uno dei più importanti risultati ottenuti da Fermi col bombardamento a mezzo di neutroni lenti, Fermi rivolse la sua attenzione sull'assorbimento e sulla emissione di neutroni nel corso della scissione o fissione. Da qui sorse l'idea del processo a catena e della pila atomica, costruita a Chicago nel 1942.

Finita la seconda guerra mondiale, Fermi si dedicò allo studio dei mesoni. La sua ultima scoperta fu che i nuclei di idrogeno bombardati con mesoni veloci, passano ad uno stato eccitato, equivalente ad un aumento della loro massa; meravigliosa conferma della equivalenza della materia e della energia.

Il rimpianto per la perdita di uno scienziato di così alto valore, il cui nome va affiancato a quelli di Galileo e di Newton, di colui che per primo ha messo a disposizione dell'uomo una grandiosa fonte di energia non derivante dal Sole, è stato universale; ma, nel rimpianto si insinua una sottile inquietudine.

tudine: egli ha contribuito alla ideazione e alla realizzazione della bomba atomica, che avrebbe potuto essere usata contro il suo stesso Paese.

«Noi chiniam fronte al massimo Fattor, che volle in lui del creator suo spirito più vasta orma stampare»².

Fig. 14 – La richiesta di brevetto del 1934 per la scoperta della radioattività artificiale di Enrico Fermi, Edoardo Amaldi, Cesare D'Agostino, Bruno Pontecorvo, Franco Rasetti, Emilio Segrè e Giulio Cesare Trabacchi.

REGISTRO *144* NUM. D'ORDINE *148* Mod. V-1

7793 MINISTERO DELLE CORPORAZIONI
1934 UFFICIO DELLA PROPRIETÀ INTELLETTUALE

L'anno *1934* il giorno *26* del mese di *ottobre* alle ore *19.15*
L'Ing. ~~Letterio Labocetta~~ p.s. dei Sigg.ri
Enrico FERMI, Edoardo AMALDI, Oscar D'AGOSTINO
Bruno PONTECORVO, Franco RASSETTI, Emilio SEGRÈ Giulio Cesare TRABACCHI
a Roma

ha presentato a me sottoscritto _____


1. Domanda di attestato di privativa industriale
per un trovato avente per titolo: "Metodo per accrescere il rendimento del
procedimento per la produzione di radioattività artificiale mediante
il bombardamento con neutroni".

2. Descrizione in triplo _____
3. ~~DESCRIZIONE~~ Lettera d'incarico
4. ~~DESCRIZIONE~~ Lettera d'incarico
5. ~~DESCRIZIONE~~ Lettera d'incarico
6. Vaglia postale di L. 380 N. 17 emissione dall'Ufficio di Roma
in data 26.10.1934 XII
7. Marca da bollo da L. 5.---
8. ~~DESCRIZIONE~~ Lettera d'incarico

La domanda, la descrizione, i disegni, i valori della ~~marca~~ sono stati firmati da 1
richiedenti e da me controfirmati col timbro d'ufficio.
Per gli effetti di legge il richiedente ha dichiarato di eleggere domicilio in
questa città, via S. Basilio N. 50
Copia del presente verbale è stata da me sottoscritta e consegnata alla parte interessata

Il richiedente
pe. Navarra

IL SEGRETARIO
Office



² A. Manzoni, *Il cinque maggio*, vv. 32-36.

LA STATISTICA DI FERMI ALLE RADICI DELL'ELETTRONICA DEI SEMICONDUTTORI

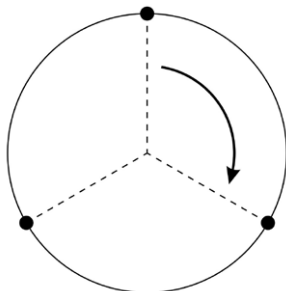
Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini

Enrico Fermi fu un fisico. Uno dei più grandi. Ma con lo spirito di un ingegnere. Amava le cose concrete, le macchine, i meccanismi. Forse non era un grande riparatore di elettrodomestici, come ci testimonia la moglie nella brillante biografia *Atomi in famiglia*¹, ma sicuramente diffidava delle astrattezze, di certe «fumisterie teutoniche», come all'inizio gli apparve la nascente meccanica quantistica. E questa fu la sua forza.

Forse all'inizio controvoglia, ma poi afferrò profondamente la nuova Fisica dei quanti, con tutte le sue implicazioni più controintuitive. E non per il gusto della disquisizione filosofica, ma per trovarne immediate applicazioni pratiche. E che applicazioni! Nientemeno che il primo reattore nucleare.

Ma la Fisica Nucleare non fu l'unico suo interesse. Anzi, soprattutto all'inizio della carriera, non c'era argomento di Fisica che non lo interessasse. Una voracità insaziabile, anche se limitata alla sola Fisica, come notavano scherzosamente la moglie e gli amici. E il suo primo grande contributo, in effetti, non fu di Fisica Nucleare, ma di statistica. Un argomento per certi versi piuttosto esoterico. Come contare gli stati possibili degli atomi in un gas perfetto. Una questione che in Fisica quantistica non così ovvia come sembra. Fermi stesso fa un esempio illuminante. Prendiamo un ipotetico sistema di tre particelle, disposte sui tre vertici di un triangolo equilatero come mostrato in Fig. 1.

Fig. 1 – Tre particelle sui tre vertici di un triangolo equilatero.



¹ L. Fermi, *Atoms in the Family. My life with Enrico Fermi*, The University of Chicago Press, Chicago 1954.

Se le particelle fossero distinguibili, ad esempio fossero tre palline, una rossa, una verde, una blu, le possibili configurazioni sarebbero tre, ovvero le tre rotazioni di 120° . Ma se le palline sono indistinguibili, ogni rotazione di 120° riporta il sistema nella condizione iniziale. Non ci sono tre stati possibili, ma solo uno. La questione è una di quelle profonde che fanno girare la testa. Le proprietà di un sistema fisico (le tre palline) non sono più intrinseche agli oggetti che lo compongono, ma legate a una qualità che ha a che fare con l'osservatore. Per un vedente le configurazioni sono tre, per un cieco una sola! C'è ovviamente qualcosa che non va. Un rompicapo per filosofi. Ma Fermi aborrisce la filosofia e quindi affrontò la cosa con il piglio dell'ingegnere: vediamo come tutto ciò ha a che fare con i valori dei calori specifici. Ebbene, se ne infischio dei paradossi filosofici e risolse il problema di termodinamica. Questo era Enrico Fermi. All'epoca un giovane assistente all'Università di Firenze.

Ne scrisse quindi una memoria in italiano² e in tedesco³, che lo avrebbe fatto entrare nella storia. Ma non subito. Troppo scarna, un linguaggio troppo pratico. I fisici dell'epoca non lo capirono subito. Il grande teorico inglese P.A.M. Dirac la lesse, ma non ne fu impressionato. Gli sembrò solo una particolare applicazione, niente di fondamentale. In realtà era la soluzione al problema a cui stava lavorando da molti mesi. Non ci è dato sapere se qualcosa dell'articolo di Fermi si sedimentò in un angolo remoto del cervello di Dirac, ma comunque siano andate le cose, pochi mesi dopo, Dirac formula la sua famosa statistica⁴, valevole non certo solo per una gas perfetto, ma per qualunque particella di spin $1/2$, tra cui gli elettroni.

La formulazione di Dirac era, come al suo solito, elegante, generale e completa, ma era chiaramente basata sulle stesse idee di Fermi. Lo scienziato italiano scrisse quindi una lettera, cortese ma ferma, in cui rivendicava la sua scoperta. L'inglese lo ammette di buon grado: si ricordava dell'articolo del collega, ma non l'aveva collegato al suo lavoro. Almeno non consapevolmente.

Il fatto che la statistica Fermi-Dirac si applichi agli elettroni, ha un'immediata enorme valenza applicativa. È la chiave per la comprensione della conduzione nei metalli e, di lì a poco, anche dei semiconduttori. Uno studente di elettronica di oggi incontra la statistica di Fermi-Dirac nella sua prima settimana di studio, prima ancora di qualunque dispositivo. Fermi, a tutti gli effetti, può essere considerato uno dei padri fondatori dell'elettronica dei semiconduttori.

² E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Atti dell'Accademia dei Lincei», vol. 3, 1926, pp. 145-149.

³ E. Fermi, *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases*, «Zeitschrift für Physik», vol. 36, nn. 11-12, 1926, pp. 902-912.

⁴ P.A.M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, «Proceedings of the Royal Society (London)», vol. A112, 1926, pp. 281-305.

Anche se, dopo quello storico lavoro sulla statistica, di fatto non se ne occupò più. Fu infatti Alan Wilson quattro anni dopo⁵ ad applicare la statistica di Fermi-Dirac ai semiconduttori. Tutt'altro che sorprendente è il fatto che Wilson elaborò la teoria che attualmente usiamo per la conduzione nei semiconduttori, durante un soggiorno all'Università di Lipsia, presso il gruppo di Werner Heisenberg. Ovvero in uno dei tre-quattro centri di ricerca dove stava prepotentemente nascendo la Fisica quantistica.

Wilson definì il concetto di banda proibita, donatore e accettore, ma non quello di lacuna, evidentemente un po' troppo azzardato. Solo Heisenberg osò parlare esplicitamente di lacuna, ovvero di un 'buco' che si comporta come una particella. Per tutti gli anni trenta i semiconduttori rimasero dei materiali esotici, dalle proprietà erratiche. Il grande Wolfgang Pauli, caustico e sprezzante, come era sua abitudine, sconsigliava agli amici di occuparsene⁶: «Sui semiconduttori è meglio non lavorare proprio, è un pasticcio, chissà poi se esistono veramente!».

Malgrado lo scetticismo dello scienziato austriaco, poco dopo la seconda guerra mondiale, William Shockley, John Bardeen e Walter Brattain, presso i laboratori Bell, inventarono il primo triodo a semiconduttore, il transistor. E fu un trionfo. In qualche decennio i semiconduttori cambiarono il mondo. Ma Fermi rimase molto distante da questi sviluppi. Non era affascinato dalle meraviglie della microelettronica, quanto piuttosto dalle applicazioni dei computer. I suoi ultimi due lavori, prima della scomparsa prematura, sono di computazione⁷.

Fermi prenotava ore di calcolo della potente macchina MANIAC per investigare problemi non lineari di Fisica. Un campo che sarebbe diventato di grande moda una ventina d'anni dopo. Era così consapevole dell'importanza dei computer nel progresso scientifico, che, quando nell'estate del 1954, durante il suo ultimo viaggio in Italia, gli fu chiesto come spendere una cospicua cifra che il comune di Pisa avrebbe messo a disposizione per la ricerca scientifica, non suggerì la costruzione di un reattore nucleare o di un acceleratore di particelle, ma la progettazione di un computer⁸.

Fu così che nacque il primo computer italiano, la CEP (Calcolatrice Elettronica Pisana). Un capolavoro di ingegneria elettronica, che gettò le basi dell'informatica italiana e dei successi commerciali di Olivetti come produttore di macchine calcolatrici.

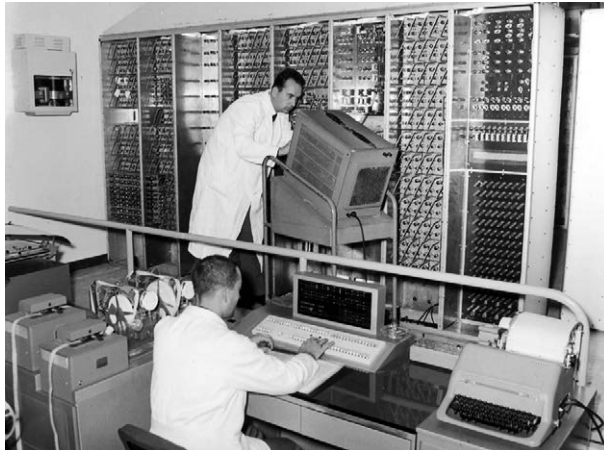
⁵ A.H. Wilson, *The Theory of Electronic Semi-Conductors*, «Proceedings of the Royal Society (London)», vol. A133, 1931, pp. 661-677.

⁶ G. Busch, *Early history of the physics and chemistry of semiconductors-from doubts to fact in a hundred years*, «European Journal of Physics», vol. 10, n. 4, 1989, p. 254.

⁷ E. Fermi, N. Metropolis, *Numerical Solution of a Minimum Problem*, «Document LA-1492», November 1952; E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of the Nonlinear Problems*, Document LA-1940, May 1955.

⁸ In una lettera datata 11 agosto 1954 indirizzata al Rettore dell'Università di Pisa, Enrico Fermi scrive: «Interrogato circa le varie possibilità di impiego di tale somma, quella di costruire in Pisa una macchina calcolatrice elettronica mi è sembrata, tra le altre, di gran lunga la migliore». La lettera è conservata negli archivi dell'Università di Pisa.

Fig. 2 – La CEP (Calcolatrice Elettronica Pisana) inaugurata nel novembre 1961 alla presenza del Presidente della Repubblica Giovanni Gronchi.



Fermi morì nel novembre del 1954, prima di poter vedere realizzato il suo suggerimento. Due anni dopo, nel 1956, ai tre inventori del transistor fu conferito il Premio Nobel. Come di consueto i premiati fecero la loro *Nobel Lecture* al cospetto delle autorità. Uno dei tre, John Bardeen, salutò, introdusse l'argomento e poi mostrò una formula⁹: la funzione di Fermi, proprio quella elaborata dall'italiano a Firenze nel 1926 e ripresa da Dirac pochi mesi dopo. Enrico Fermi è a tutti gli effetti consacrato padre fondatore dell'elettronica dei semiconduttori.

Fig. 3 – Da sinistra a destra, John Bardeen [Madison (Wisconsin, USA), 23 maggio 1908 – Boston (Massachusetts, USA), 30 gennaio 1991], Walter H. Brattain [Amoy (Cina), 10 febbraio 1902 – Seattle (Washington, USA), 13 ottobre, 1987] e William B. Shockley [Londra (Regno Unito), 13 febbraio 1910 – Stanford (California, USA), 12 agosto 1989], vincitori nel 1956 del Premio Nobel per la Fisica per il loro lavoro sul transistor.



⁹ Bardeen Nobel Lecture 1956, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1956/bardeen-lecture.pdf.

Fig. 4 – La prima pagina della *Nobel Lecture* di John Bardeen (1956). Bardeen è stato il solo ad aver vinto due Premi Nobel per la Fisica, il primo nel 1956 (per il transistor), il secondo nel 1972 (per la superconduttività).

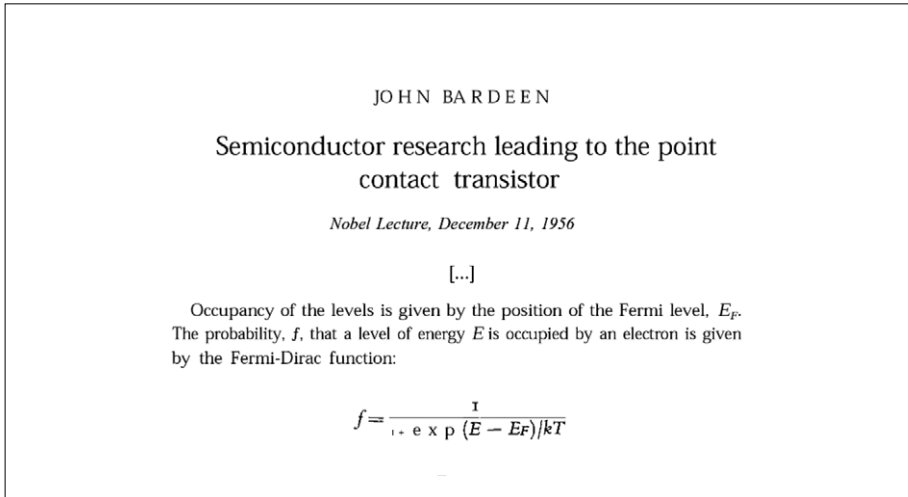


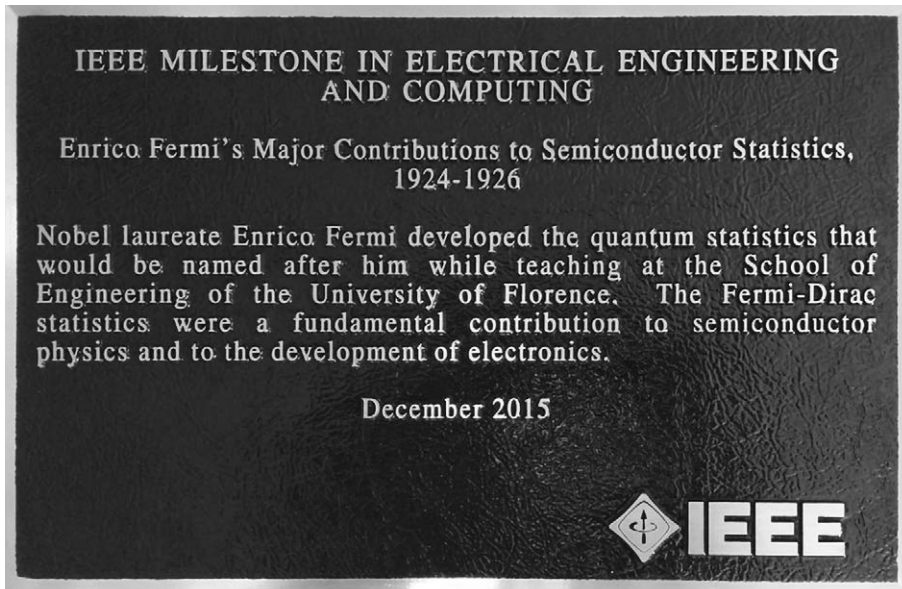
Fig. 5 – Articolo di R. Casalbuoni comparso nel 2016 sul quotidiano «La Stampa» per celebrare i 90 anni dalla pubblicazione della statistica di Fermi-Dirac¹⁰.



¹⁰ R. Casalbuoni, *Un Fermi che ti aspetti. Il suo "gas perfetto" segnò l'alba dell'elettronica*, «La Stampa», 3 febbraio 2016.

Il nome di Fermi è ormai per tutti legato alle città di Roma (dove operò lo straordinario gruppo dei ‘ragazzi di via Panisperna’) e di Chicago, Illinois, USA dove fu costruita la prima ‘pila atomica’. Ma è stato nel suo breve periodo fiorentino che Enrico Fermi elaborò la fondamentale statistica oggi nota con i nomi di Fermi e Dirac. Proprio per questo nel 2015 l’IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*) ha collocato presso la Scuola di Ingegneria dell’Università di Firenze una targa¹¹ che ricorda l’eccezionale contributo alla scienza che Enrico Fermi dette quando era un giovane docente dell’Università di Firenze.

Fig. 6 – La *IEEE Milestone* dedicata a Enrico Fermi presso la Scuola di Ingegneria dell’Università di Firenze.



¹¹ G. Manes, G. Pelosi (edited by), *Enrico Fermi's IEEE Milestone in Florence. For his Major Contribution to Semiconductor Statistic, 1924-1926*, Firenze University Press, Florence 2015; E. Del Re, G. Pelosi, *Fermi Milestone is dedicated at the University of Florence*, «IEEE Region 8 News», vol. 19, 2016, pp. 1-3.

IL PRIMO CONCORSO DI FISICA TEORICA

Paolo Rossi

Un'importante premessa

Per raccontare come si giunse nel 1926 al primo concorso di Fisica Teorica italiano bisogna fare un piccolo passo indietro, descrivendo ciò che accadde nel concorso per professore straordinario di Fisica Matematica richiesto dall'Università di Cagliari nel 1925. La commissione era così costituita:

- Giovanni Guglielmo (1853-1935), fisico sperimentale, Preside della Facoltà di Cagliari;
- Tullio Levi-Civita (1873-1941), ordinario di Meccanica Razionale a Roma;
- Roberto Marcolongo (1862-1943), ordinario di Meccanica Razionale a Napoli;
- Carlo Somigliana (1860-1955), ordinario di Fisica Matematica a Torino;
- Vito Volterra (1860-1940), ordinario di Fisica Matematica a Roma.

Impossibile quindi immaginare per l'epoca una commissione più autorevole, sia accademicamente sia scientificamente.

I candidati furono Sante Luigi Da Rios (1881-1965), Enrico Fermi (1901-1954), Giovanni Giorgi (1871-1950), Mario Pascal (1896-1949), Enrico Persico (1900-1969), Francesco Sbrana (1891-1959), Rocco Serini (1886-1964), Angelo Tonolo (1885-1962).

Abbiamo voluto sottolineare i dati anagrafici dei commissari e dei concorrenti in quanto l'età media dei primi (circa 64 anni) li rendeva esponenti di una generazione che nel suo complesso, almeno in Italia, aveva vissuto con qualche difficoltà di natura culturale l'irrompere nel mondo della Fisica delle nuove e rivoluzionarie teorie apparse nei primi decenni del XX secolo.

A sua volta l'età media dei concorrenti (oltre 36 anni) rendeva i venticinquenni Fermi e Persico dei veri e propri *outsider* dal punto di vista anagrafico.

Ad eccezione di Giorgi (laureato in ingegneria civile) e di Fermi e Persico (laureati in Fisica) tutti gli altri candidati erano laureati in matematica. Vale comunque la pena di notare che all'epoca Fermi era incaricato di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica a Firenze e dal gennaio 1925 possedeva la libera docenza in Fisica Matematica, mentre Persico era assistente di Volterra alla cattedra di Fisica Matematica di Roma.

Si deve sottolineare che, mentre spesso i ternati avevano la possibilità di essere chiamati in altre sedi, nel caso specifico non essendoci in Italia altre cattedre scoperte di Fisica Matematica, soltanto il primo vincitore aveva la possibilità di andare in cattedra.

Dai verbali risulta che la commissione riconobbe all'unanimità che due candidati, Fermi e Giorgi, risultavano decisamente superiori a tutti gli altri e pertanto il vincitore doveva essere scelto tra loro due. Quanto al terzo posto, sempre all'unanimità si stabilì che dovesse essere conteso tra Persico e il migliore del gruppo dei 'matematici', tra i quali comunque emergeva Serini.

Ci fu una chiara spaccatura nella commissione quando si trattò di individuare il criterio prevalente con cui doveva essere attribuito il primo posto. I voti dei singoli commissari non sono a verbale, e si conosce soltanto l'esito finale della votazione, che vide prevalere Giorgi con tre voti, mentre a Fermi ne furono attribuiti due, di cui uno certamente di Levi-Civita e l'altro molto probabilmente di Volterra. Determinante fu quindi la scelta dell'unico fisico sperimentale presente in commissione, il Preside Guglielmo. Il terzo posto fu poi unanimemente attribuito a Serini.

Merita osservare che, ad eccezione di Da Rios (che divenne insegnante e preside nei licei) e di Pascal (morto precocemente) tutti gli altri concorrenti nel giro di pochi anni ottennero comunque una cattedra universitaria.

L'azione di Corbino

L'esito del concorso scompaginò i piani di Orso Mario Corbino, già dal 1918 direttore dell'Istituto di Fisica della Sapienza, che quasi sicuramente, nel caso di una vittoria di Fermi, avrebbe poi cercato di farlo trasferire prima possibile a Roma, ma che non osava chiedere il bando di una cattedra di Fisica Matematica per la Sapienza a fronte del rischio (evidentemente non infondato) che Fermi anche in questo caso non risultasse come primo vincitore.

Ma nella visione di Corbino, che aveva capito benissimo la direzione in cui si stava muovendo la Fisica a livello internazionale, e che era anche consapevole che Fermi era forse l'unico giovane fisico italiano in grado di muoversi rapidamente e con successo in tale direzione, assicurarne la presenza a Roma era un elemento cruciale per l'obiettivo di rendere l'Istituto fisico della Sapienza una delle istituzioni di ricerca all'avanguardia nel panorama non soltanto italiano.

A quel punto l'idea di Corbino fu di chiedere che venisse istituita a Roma, per la prima volta in Italia, una cattedra di Fisica Teorica. Secondo quanto scrive Edoardo Amaldi, l'operazione di Corbino riuscì per la lungimiranza dei grandi matematici Guido Castelnuovo, Tullio Levi-Civita e Vito Volterra, che acconsentirono alla messa a statuto della nuova disciplina e all'assegnazione ad essa di una cattedra messa a concorso. I tre matematici (tutti comunque in un modo o nell'altro professionalmente interessati ai nuovi sviluppi teorici della Fisica), nella consapevolezza che la 'nuova' Fisica Teo-

rica avrebbe non poco faticato a trovare un proprio spazio nel contesto della Fisica Matematica, si presero la non banale responsabilità di permettere la creazione di una cattedra che portava la nuova disciplina fuori dall'ambito matematico in cui, nella tradizione accademica italiana, si erano fino a quel momento collocate le ricerche ad essa riconducibili.

Una tale scelta non mancò certo di suscitare reazioni negative nel mondo accademico, se ancora nel 1939 Carlo Somigliana scriveva testualmente per il capitolo *Fisica matematica* dei volumi dedicati a *Un secolo di progresso scientifico italiano (1839-1939)*:

L'incalzare dei nuovi problemi portò, poco dopo la fine della guerra mondiale, ad un fatto saliente: la separazione dalla Fisica matematica delle ricerche sulla costituzione della materia e della radiazione, le quali – sia perché intimamente legate all'esperienza, sia perché il loro convulso e ancora labile sviluppo impone l'uso di procedimenti poco consoni alla tradizione e allo spirito fisico-matematico – si organizzarono in una nuova disciplina, ordinariamente detta 'fisica teorica'. Questa dolorosa mutilazione non è però forse definitiva, e già da alcuni chiari segni appare la possibilità di sistemazione del materiale raccolto in teorie pienamente conformi alla mentalità fisico-matematica¹.

Il concorso del 1926

Ottenuto il bando e costituita la commissione, i lavori concorsuali si svolsero a Roma in quattro sedute nei giorni 1, 8 (due sedute, mattutina e pomeridiana) e 9 novembre del 1926.

La commissione era così costituita:

- Michele Cantone (1857-1932), ordinario di Fisica Sperimentale a Pavia dal 1898, poi a Napoli dal 1904;
- Orso Mario Corbino (1876-1937), ordinario di Fisica Sperimentale a Messina dal 1905, poi a Roma dal 1908;
- Antonio Garbasso (1871-1933), ordinario di Fisica Sperimentale a Genova dal 1903, poi a Firenze dal 1913;
- Gian Antonio Maggi (1856-1937), ordinario di Analisi infinitesimale a Messina dal 1886, poi di Meccanica Razionale a Pisa dal 1895 e infine di Fisica Matematica a Milano dal 1924;
- Quirino Majorana (1871-1957), ordinario di Fisica Sperimentale al Politecnico di Torino dal 1914, poi a Bologna dal 1922.

¹ C. Somigliana, *Fisica matematica*, in *Un secolo di progresso scientifico italiano (1839-1939)*. Pubblicazione della S.I.P.S. in occasione del I centenario di attività sociale, Società italiana per il progresso delle scienze, Roma 1939.

Anche questa volta ci troviamo quindi di fronte ai più autorevoli esponenti nazionali della propria disciplina (in questo caso la Fisica Sperimentale). L'età media era intorno ai 60 anni, ma almeno i tre più giovani (Q. Majorana, Garbasso e Corbino) avevano effettuato anche ricerche pienamente collocabili entro le linee di sviluppo della Fisica contemporanea.

I concorrenti furono soltanto quattro: Carlo del Lungo (1867-1950), Aldo Pontremoli (1896-1928), Enrico Persico ed Enrico Fermi. Vale subito la pena di notare che in questo caso il vero *outsider*, non soltanto anagrafico, era Del Lungo, non soltanto cinquantenne a fronte di tre di età compresa tra i 25 e i 30 anni, ma anche scientificamente lontano dalle problematiche più recenti della Fisica Teorica, essendosi al più occupato della teoria cinetica dei gas (con una serie di articoli sul «Nuovo Cimento» tra il 1916 e il 1918). Gli altri tre candidati erano invece tutti in qualche modo legati a Corbino, che era anche stato il relatore di Persico e Pontremoli.

Nella prima seduta della commissione Garbasso fu nominato Presidente e Corbino Relatore. Furono poi esaminati i titoli di Del Lungo, per giungere presto all'unanime conclusione che il suddetto non potesse essere preso in considerazione agli effetti del concorso, per la non conformità dei lavori presentati all'indirizzo preso dalla Fisica Teorica.

Nella seconda seduta furono esaminati i titoli di Fermi e di Persico, e la commissione unanime stabilì che «Fermi è altamente meritevole di coprire la cattedra di Fisica Teorica messa a concorso, e ritiene di poter fondare su di lui le migliori speranze per l'affermazione e lo sviluppo futuro della Fisica Teorica in Italia» e che «egli è oggi il più preparato e il più degno per rappresentare il nostro Paese in questo campo di così alta e febbrile attività scientifica mondiale». La commissione comunque riservò un giudizio positivo anche per Persico, notando che «Persico rivela con la sua attività scientifica un perfetto possesso dello strumento matematico, una singolare chiarezza di mente, ingegno penetrante e una pregevole attitudine a impostare e risolvere i problemi trattati con equilibrata proporzione tra i mezzi impiegati e l'entità e il carattere dei risultati da raggiungere».

Nella terza seduta furono esaminati i titoli di Pontremoli, e il giudizio fu che «Pontremoli dimostra coi suoi titoli larga e varia cultura, anche nei campi della Fisica Teorica moderna, ottima preparazione matematica, vivace ingegno, fervida fantasia e grande passione per la ricerca scientifica». Seguirono le votazioni per la formulazione della graduatoria. Con la prima votazione si stabilì che tutti e tre i candidati fossero inclusi. Ci fu poi unanimità nel considerare Fermi al primo posto, mentre emerse un disaccordo sull'ordine in cui collocare Persico e Pontremoli, per cui Garbasso propose di procedere con la votazione. Fermi si classificò al primo posto con voto unanime, mentre per il secondo posto tre voti andarono a Persico e due a Pontremoli, che poi, come già di fatto informalmente convenuto, si vide attribuito all'unanimità il terzo posto.

Nella quarta seduta il relatore Corbino lesse la relazione redatta da Garbasso che fu poi approvata e inviata al Ministero.

Le immediate conseguenze

I Consigli delle Facoltà interessate presero rapidamente atto degli esiti del concorso, per cui Fermi e Persico furono subito chiamati rispettivamente a Roma e a Firenze, e presero servizio ufficialmente il 1 gennaio 1927. Come sappiamo Fermi rimase a Roma fino al 1938, quando colse l'occasione del conferimento del Premio Nobel per trasferirsi con la famiglia in America, mentre Persico al termine dello straordinariato nel 1930 passò all'Università di Torino, dove rimase fino al 1950 per poi concludere la carriera a Roma.

Nel caso di Pontremoli, che a Milano era già incaricato del corso di Fisica Complementare, la sua chiamata su una cattedra di Fisica Teorica trovò ostacoli accademici e burocratici, mentre il corso milanese di Fisica Teorica gli fu comunque affidato per incarico per l'anno accademico 1927/28. Ma Pontremoli non poté portare a conclusione nemmeno questo incarico, perché il 25 maggio 1928 perì nel Mare di Barents nel tragico epilogo della spedizione Nobile cui aveva deciso di partecipare.

La diffusione in Italia della nuova meccanica quantistica

Mentre in Italia si svolgevano queste vicende accademiche, nel mondo (e in particolare in Germania) era in corso quella straordinaria rivoluzione dei fondamenti stessi della Fisica che va sotto il nome di 'meccanica quantistica', nelle forme (poi dimostrate equivalenti) della meccanica delle matrici di Heisenberg, Born e Jordan (1925) e della meccanica ondulatoria di E. Schrödinger (1926). Ciò non ebbe alcuna immediata influenza sulla decisione di bandire una cattedra di Fisica Teorica e neppure sull'andamento del concorso (è ragionevole anzi supporre che la maggior parte dei protagonisti non fosse nemmeno particolarmente consapevole della portata di quanto stava accadendo), ma non v'è dubbio che, per una sorta di 'astuzia della ragione', il concorso e le successive chiamate giocarono un ruolo cruciale nella relativamente rapida diffusione in Italia delle nuove idee fisiche.

Già nel suo corso di Fisica Complementare del 1926/27, nel mese di giugno del 1927 Pontremoli in tre lezioni presentò agli studenti la meccanica di Heisenberg e quella di Schrödinger, mentre la meccanica ondulatoria comparve nelle lezioni di Fisica Teorica di Fermi a Roma e in quelle di Persico a Firenze nell'anno accademico 1928/29 (ma si noti che Puccianti a Pisa ne parlava agli studenti già nel corso di Fisica Superiore dell'anno precedente).

Non a caso la penetrazione nelle altre principali sedi fu un po' più lenta, sia a livello didattico (a Bologna con Dalla Noce, a Torino ovviamente con Persico, a Napoli con Carrelli, e ancora più tardi a Padova e Palermo con Pincherle e Wick), sia soprattutto a per quanto riguardò la ricerca, dove i più significativi risultati a livello teorico fino alla seconda guerra mondiale si concentrarono ancora una volta a Roma (con Fermi, Majorana, Wick),

Firenze (con Racah) Milano (con Gentile jr) e Torino (con Wataghin), proprio le sedi delle prime cattedre di Fisica Teorica.

Il secondo concorso di Fisica Teorica

Un elemento che permette di sottolineare ulteriormente il carattere di eccezionalità del primo concorso di Fisica Teorica è la distanza temporale che intercorre con il secondo concorso, che si svolse ben dieci anni dopo, nel 1937, e vide vincitori per l'appunto:

- Gian Carlo Wick (1909-1992), che fu subito chiamato a Palermo, ma passò l'anno dopo a Padova, nel 1940 si trasferì a Roma, per tenere il corso lasciato da Fermi, e nel 1946 lasciò l'Italia per gli Stati Uniti;
- Giulio Racah (1909-1965), che fu chiamato a Pisa, ma poi 'dispensato' nel 1938 in conseguenza delle leggi razziali;
- Giovanni Gentile jr (1906-1942), che prese servizio a Milano, dove morì di setticemia nel corso della guerra.

Prima ancora del concorso, onde evitare a Gentile una spiacevole 'concorrenza', la cattedra di Fisica Teorica di Napoli fu attribuita 'per chiara fama' a Ettore Majorana (1906-1938?), che tenne il corso per meno di un anno accademico.

A seguito di questi avvenimenti alla fine del 1946, subito prima del terzo concorso (1947) l'unico cattedratico di Fisica Teorica ancora in servizio in Italia era Enrico Persico, in quel momento ancora (per poco tempo) a Torino e in procinto di partire per un triennio in Canada.

Bibliografia

Annuari dell'Università degli Studi di Pisa.

«Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», Sezione I, Istruzione superiore. Registri delle lezioni delle Università di Bologna, Firenze, Napoli, Padova e Roma.

AA.VV., *Dizionario biografico degli italiani, ad vocem*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma 1960.

L. Gariboldi, *Il primo concorso di Fisica Teorica: il caso di Aldo Pontremoli* (preprint).

S. Graffi, *Considerazioni sulla grandezza e decadenza dei concorsi universitari in Italia*, «Quaderni di storia», 71 (2010), pp. 77-110.

C. Somigliana, *Fisica matematica*, in *Un secolo di progresso scientifico italiano (1839-1939). Pubblicazione della S.I.P.S. in occasione del I centenario di attività sociale*, Società italiana per il progresso delle scienze, Roma 1939.

Apparato iconografico

Fig. 1 – Giovanni Giorgi. Fu l'ideatore del sistema di unità di misura che porta il suo nome.



Fig. 2 – Enrico Persico sugli sci a Roccaraso in una foto del 1923. [Dal libro G. Battimelli, *L'eredità di Fermi. Storia fotografica dal 1927 al 1959 dagli archivi di Edoardo Amaldi*, Editori Riuniti, Roma 2003]



Fig. 3 – Enrico Fermi in una foto del 1926. [Archivio Amaldi]



Fig. 4 – Aldo Pontremoli perì nel 1928 nel corso della spedizione polare di Umberto Nobile del dirigibile Italia. Nella foto a sinistra Aldo Pontremoli (a destra) nel 1928 durante i preparativi della spedizione. Nella foto a destra le spedizioni al Polo Nord. [Dal libro di G.P. Giordana, *Vita di Aldo Pontremoli*, A.F. Formiggini Editore, Roma 1933]



1928 – Preparativi per la spedizione: MALMGREN e PONTREMOLI



Le spedizioni al Polo Nord - Dal libro di Behounek per cortesia della Casa ed. Bemporad.

LAURA ED ENRICO FERMI A 'IL FRASSINE'

Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi

‘Villa Il Frassine’, o ‘Villa Zabban’, è una bella costruzione, situata sulle colline fiorentine nei dintorni di Rignano sull’Arno, non lontano da Firenze, circondata da ampi poderi coltivati a olivo e vigna.

Fig 1. – Una immagine di ‘Villa Il Frassine’ (un’altra immagine è presente nel lavoro di Nello Carrara pubblicato in questo libro) e la sua localizzazione nel territorio di Rignano sull’Arno (Firenze). È riportata anche la localizzazione di ‘Villa Il Focardo’ che apparteneva ai parenti di Albert Einstein.



La villa ha visto soggiornare, nella prima metà del novecento, esponenti della comunità ebraica, che sono divenuti, in seguito figure di grande rilievo per la cultura italiana. Infatti i proprietari, Giulio¹ e Giorgina Zabban², consigliere e vicepresidente de La Fondiaria³, lui, e scrittrice e traduttrice, lei, diventarono figure di riferimento per i figli di Amelia Pincherle Moravia Rosselli⁴, quando, dopo la crisi matrimoniale e la conseguente separazione dal marito, Amelia si trasferì da Roma a Firenze nel 1903. Gli Zabban, non avendo avuto figli, furono ‘lo zio Giù e la zia Gi’ dei fratelli Aldo⁵, Carlo⁶ e Nello Rosselli⁷. Testimonianze dell’importanza di questo rapporto tra i coniugi Zabban e Amelia e i suoi figli si trovano nell’epistolario conservato nell’archivio della Fondazione Rosselli⁸.

Il padre di Laura Capon⁹, Augusto Capon¹⁰, era cugino dei fratelli Pincherle, dei quali, Carlo¹¹, sarà il padre di Alberto Moravia¹². Laura a sua volta era nipote di Giulio Zabban. Le intersezioni dei vari rami di queste genealogie ebraiche di provenienza veneziana sono riportate nella figura 2.

La villa fu pertanto frequente meta di soggiorni estivi anche da parte della famiglia di Laura Capon prima e, da parte di Laura e Enrico Fermi, dopo il loro matrimonio¹³.

Riportiamo nel seguito alcuni ricordi, presenti nelle memorie di Laura Fermi¹⁴. Nell’estate del 1928, dopo il matrimonio di Laura con Enrico, la villa sarà meta di un loro viaggio avventuroso da Roma a Rignano, sulle strade collinari della Cassia a bordo di una Peugeot Bebé, color giallo uovo, di Enrico. Dopo il paese di Radicofani, l’auto si fermò in una nuvola di vapore: si era rotta la cinghia della ventola di raffreddamento del motore. «Ma

¹ Giulio Zabban (1864-1933).

² Giorgina Pardo Roques (1869-1958).

³ La Fondiaria, compagnia di assicurazioni divenuta nella seconda metà del ‘900 una importante società finanziaria italiana.

⁴ Amelia Pincherle (Venezia, 1870 – Firenze, 1954).

⁵ Aldo Rosselli [Vienna (Impero Austro-Ungarico), 1895 – Carnia (Italia), 1916].

⁶ Carlo Rosselli [Roma, 1899 – Bagnoles de l’Ornes (Francia), 1937].

⁷ Nello Rosselli [Roma, 1900 – Bagnoles de l’Ornes (Francia), 1937].

⁸ <http://www.archiviorosselli.it/>.

⁹ Laura Fermi [Roma, 1901 – Chicago (Illinois, USA), 1977].

¹⁰ Augusto Capon [Venezia, 1872 – Auschwitz (Polonia), 1943].

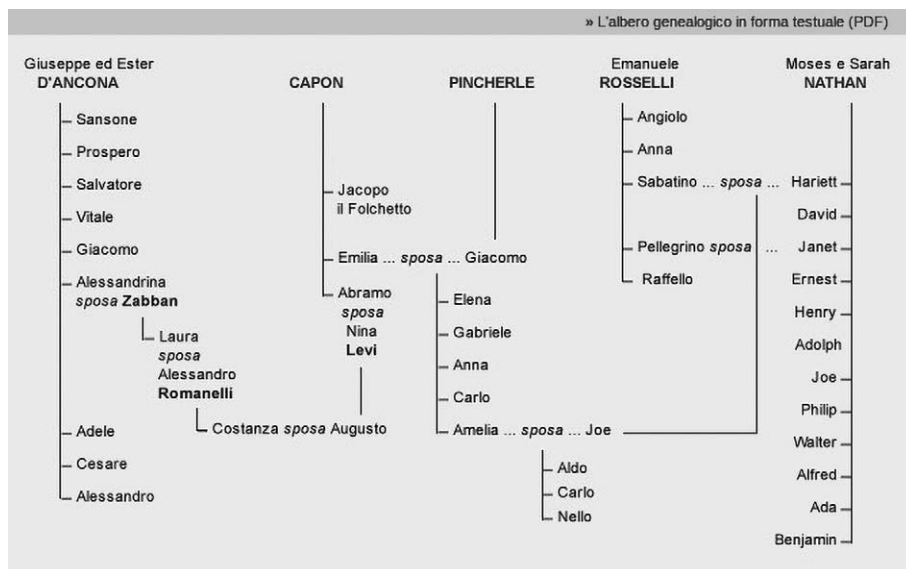
¹¹ Carlo Pincherle (Venezia, 1863 – Roma, 1944).

¹² Alberto Moravia (Roma, 1907 – 1990), uno dei maggiori scrittori italiani del secondo novecento. Il suo libro *Il conformista*, pubblicato a Milano dalla Bompiani nel 1951, è ispirato dalla vicenda dei fratelli Rosselli.

¹³ A cinque chilometri dalla ‘Villa Il Frassine’, si trova ‘Villa Il Focardo’, acquistata nel 1936 da Robert Einstein, cugino di Albert, che viveva in Italia dal 1913. Nell’estate del 1944, la moglie e le figlie di Robert furono uccise dalle truppe naziste, in quanto ebrei e membri della famiglia Einstein. Robert, sopravvissuto in quanto rifugiato nei campi intorno alla villa, si suiciderà l’anno seguente (F. Palla, *Il pianoforte di Einstein*, «Il Colle di Galileo», vol. 5, n. 2, 2016, p. 9).

¹⁴ Laura Fermi, *Atomi in famiglia*, Arnoldo Mondadori Editore, Verona 1954.

Fig. 2 – Alberi genealogici delle famiglie Capon, D’Ancona, Nathan, Pincherle, Rosselli. [Archivio Rosselli, <http://www.archiviorosselli.it>]



Enrico, che non è mai a corto di risorse, si sfilò la cintura dei calzon, l'applicò attorno al ventilatore, ne strinse la fibbia e mi rivolse un ghigno pieno d'orgoglio. Quella sera dormimmo alla villa»¹⁵.

Dove, nelle estati successive, durante le vacanze a Rignano, nella camera con la finestra aperta sulla valle dell'Arno, Laura aiuterà Enrico nella stesura di un testo di Fisica per i Licei. La camera disponeva solo di un piccolo tavolo appena sufficiente per il manoscritto, ma Enrico non aveva bisogno di consultare nessun libro solo la sua memoria. E così quel piccolo sarà sufficiente anche quando Enrico scriverà libri più impegnativi, sempre senza o con pochissimo materiale di supporto. Il numero di pagine al giorno che Fermi scriveva era contingentato, sei se aiutato da Laura, quattro se lavorava da solo, per lasciare ai coniugi il tempo di unirsi, a mezzogiorno, agli altri ospiti in villa, e di partecipare alle discussioni di politica e a quelle sulle ultime notizie dei giornali. La sera, poi, Fermi si intratteneva con lo zio Giulio, il quale era molto interessato al nuovo nipote. Gli argomenti delle loro discussioni spaziavano dai problemi dell'agricoltura a quelli della fisica, per finire invariabilmente su quelli della finanza, di cui lo zio si occupava e di cui il nipote si interessava iniziando a porsi il problema dei primi investimenti¹⁶.

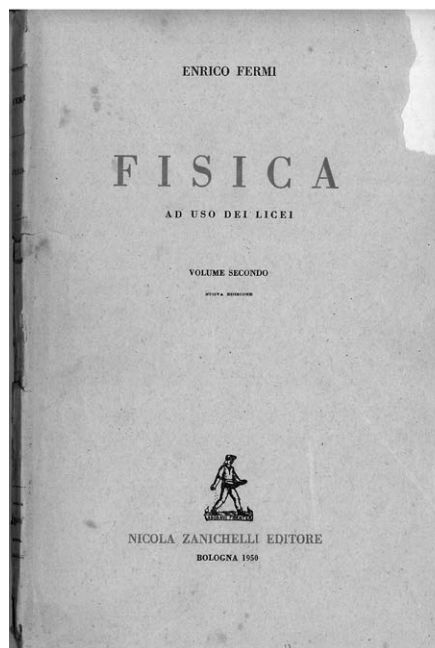
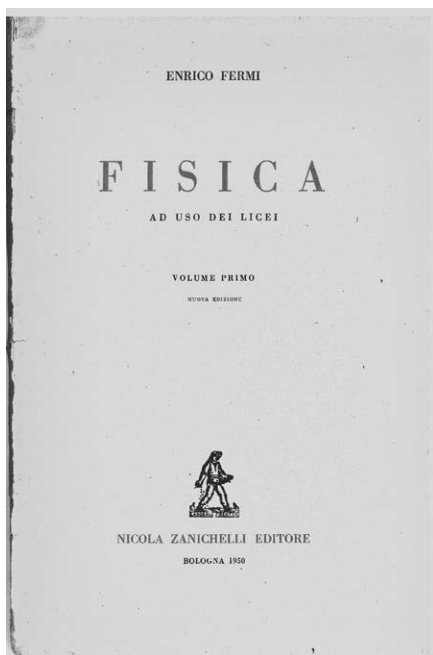
¹⁵ Ivi, p. 66.

¹⁶ Ivi, p. 73.

Nell'autunno del 1929, alla villa, Enrico ricevette il primo pacco di frontespizi del libro di fisica. Il tavolino della nostra camera era troppo piccolo per quella gran mole di pagine. Le portammo sull'ampio tavolo della stanza d'andito, sul quale, fino a pochi anni prima, erano schierati tutte le sere i candelieri che gli ospiti si portavano in camera da letto: candelieri alti, di bronzo; candelieri bassi, di ferro smaltato; candelieri d'argento, a un braccio, a due, a tre bracci. [...] Su quel tavolo dunque, Enrico, armato di uno stampino, si diede a firmare frontespizi alla luce del fioco lumino elettrico installato di recente. Con ritmo baldo e regolare lo stampino batteva il cuscinetto dell'inchiostro e poi il frontespizio. Io voltavo le pagine firmate e le contavo ad alta voce, con gioia: ognuna di esse valeva tre lire e venti centesimi. Dunque il libro, scritto in prosa mediocre e non un capolavoro, servì al suo scopo, di aumentare cioè le entrate della famiglia per molti anni¹⁷.

Il libro, *Fisica ad uso dei licei*, pubblicato da Zanichelli nel 1929, in due volumi richiederà il lavoro di due estati successive.

Fig. 3 – Il frontespizio dei due volumi di Enrico Fermi *Fisica ad uso dei licei* (Zanichelli, Bologna 1929).



¹⁷ Ivi, p.74 e 75.

Le storie dei 'nipoti' degli Zabban poi si separeranno. Nel 1938, dopo l'emanazione in Italia delle leggi razziali, Laura e Enrico emigreranno negli Stati Uniti. Il padre, Augusto Capon (vedi Fig. 4) ammiraglio della Marina Militare Italiana, Croce di guerra nella prima guerra mondiale, invece rimase a Roma, fedele a Mussolini fino all'ultimo per amor di patria. Sarà arrestato il 16 ottobre 1943 nella operazione di rastrellamento del ghetto di Roma, deportato nel campo di sterminio di Auschwitz e subito, all'arrivo, avviato alle camere a gas, per la sua inabilità al lavoro.

Fig. 4 – Augusto Capon. [Digital Library della Fondazione Centro di Documentazione Ebraica Contemporanea, Milano]



La storia di Amelia e dei fratelli Rosselli è patrimonio della storia della cultura italiana. Aldo Rosselli morirà nel corso della prima Guerra mondiale, nel 1916. Carlo e Nello Rosselli saranno eminenti figure combattenti dell'antifascismo socialista. Carlo, condannato al confino, riuscì a fuggire in Francia. Sarà raggiunto da Nello nel 1937, ma una sera i due fratelli non faranno ritorno a Bagnoles de l'Orne, in Normandia, dove risiedevano, assassinati su mandato del governo italiano dalla Cagoule, un'organizzazione fascista francese. Amelia, venti anni dopo la morte di Aldo, rivivrà la stessa tragedia e lascerà l'Italia volontariamente, dichiarando di non voler rientrare finché fosse durato il fascismo. L'esilio la porterà in Francia, Svizzera, Gran Bretagna e Stati Uniti per rientrare a Firenze il 2 luglio 1946.

Fig. 5 – Carlo e Nello Rosselli a Bagnoles de l'Orne nel giugno 1937. [Archivio Rosselli. ASFI-R-16444. Su concessione del Ministero per i Beni e le Attività Culturali e del Turismo/ Archivio di Stato di Firenze, con espressa avvertenza del divieto di ulteriore riproduzione o duplicazione con qualsiasi mezzo]



Bibliografia

- L. Fermi, *Atomi in famiglia*, Arnoldo Mondadori Editore, Verona, 1954.
G. Cecini, *I soldati ebrei di Mussolini*, Mursia, Milano, 2008.
A. Moravia, *Lettere ad Amelia Rosselli con altre lettere familiari e prime poesie (1915-1951)*, a cura di S. Casini, Bompiani, Milano, 2010.

UNA PARTITA A TENNIS E TANTI RICORDI

Carlo Franchetti

La moglie di Enrico Fermi, Laura Capon, era sorella di mia madre Paola e quindi per noi quattro suoi figli Fermi era lo zio Enrico: lui aveva contemporaneamente le caratteristiche di essere 'zio d'America' e di essere anche un personaggio molto famoso. Nessuno di noi quattro l'aveva mai visto e spesso domandavamo: «quando finalmente lo incontreremo?». Nell'estate del 1945, alla fine della guerra, la mia famiglia era tornata a Gozzano dove risiedeva: mio padre era un chimico impiegato presso la Bemberg, allora un'importante fabbrica di seta artificiale. Gozzano è un paese della provincia di Novara di circa 5000 abitanti che si trova a un km dalla sponda sud del lago d'Orta a 350 metri di altezza; quando è sereno si vedono bene le Alpi, in particolare il monte Rosa.

Dopo la fine della guerra Enrico Fermi tornò in Italia due volte: nel 1949 a Como per il congresso voltiano sui raggi cosmici e nell'estate del 1954 a Varenna, sul lago di Como, dove tenne delle lezioni. Per quanto ricordi nessuno di noi incontrò Fermi nel 1949.

Nel 1954 io avevo 11 anni, mio fratello Sergio 15, mia madre 45. Varenna è relativamente vicina a Gozzano: finalmente si rese possibile il tanto atteso incontro, andammo in macchina (non so se tutta la famiglia ma io sicuramente c'ero) alla sede del convegno, pranzammo insieme a Fermi in un ristorante. Quale impressione ricevetti nel vederlo? Di sicuro non era di quelle persone la cui presenza incute timore a un ragazzino, l'emozione per l'incontro si calmò subito e anche il suo parlare dalla caratteristica pronuncia strascicata era tranquillizzante; ho il ricordo di un piccolo avvenimento: da un tavolo vicino si alzò una persona e chiese a Fermi un autografo (che ottenne). Qui desidero osservare che in quegli anni Fermi era molto popolare fra la gente comune, di lui si diceva: «quello che ha inventato la bomba atomica» (ritornerò su questo punto).

Alcuni giorni dopo Fermi venne da solo a trovarci a casa nostra dove si intrattenne per una giornata, dormì da noi e ripartì il giorno seguente.

In quegli anni il 'miracolo economico' era ancora lontano, ma Gozzano godeva di una relativa prosperità per via della Bemberg che impiegava più di mille operai; i suoi dipendenti godevano di un singolare privilegio: in qualunque momento volessero potevano giocare a tennis in due campi creati e mantenuti molto bene dalla Bemberg (insieme ad altre strutture sportive e di

Fig. 1 – Lo stabilimento della Bemberg – azienda tessile sorta in Germania agli inizi del Novecento – a Gozzano (Novara) in una immagine del 1950. [Collezione Giannini]

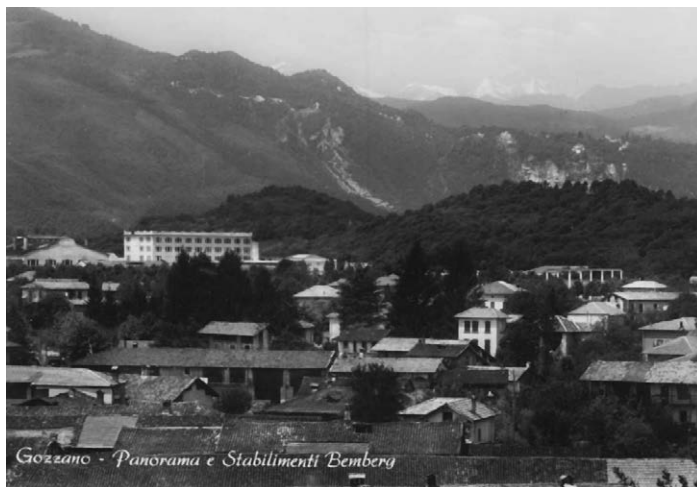


Fig. 2 – Cogne (Aosta), 1949. Da sinistra a destra: Laura Capon, moglie di Enrico Fermi, con il figlio Giulio Fermi e Paola Capon Franchetti (in primo piano i suoi quattro figli).



ricreazione). Naturalmente la mia famiglia ne approfittava spesso: tutti e sei vi abbiamo giocato tante volte; per questo per me il tennis è rimasto un mito.

Torno alla giornata con Fermi: il pomeriggio era libero (tranne che per mio padre che era al lavoro) e fu deciso di impiegarlo con il tennis. Enrico Fermi, mia madre, mio fratello Sergio e io andammo ai campi. Non fui considerato (giustamente) all'altezza di giocare ma solo accettato come raccattapalle. Gli altri si cimentarono in una partita detta 'all'americana', che consiste in tre sets in ciascuno dei quali un giocatore da solo fronteggia gli altri due; se un set viene vinto dal singolo gli spettano due punti, un punto per ciascuno se vince la coppia, chi fa più punti vince la partita. Vinse Enrico Fermi, non ricordo il punteggio ma ricordo il suo modo di giocare tranquillo, misurato; durante la partita mi sembrava che il giocatore coi colpi più belli fosse mio fratello Sergio che però perdeva molti punti volendo rischiare troppo, anche se per me avrebbe meritato di vincere; molto probabilmente mi sbagliavo perché Fermi era un buon giocatore e la sua fu una giusta vincita.

A prova di questo riporterò una testimonianza. La signora Bianca Casaroli fu la bambinaia, in Italia e in America, dei due figli di Fermi dal 1930 fino al 1944; in un'intervista rilasciata nel 2002, alla domanda «Che cosa faceva Fermi nel tempo libero?» rispose (cito testualmente): «Giocava a tennis. A Roma la domenica non mancava mai una partita con i compagni di sempre: Amaldi, Segrè e soprattutto il professor Franco Rasetti, l'amico del cuore, che aveva frequentato con lui la Normale di Pisa».

Credo che nessuno di noi si accorse che Enrico Fermi stava male. Si sa che anche in quella sua ultima estate Fermi non aveva rinunciato alla sua attività sportiva, alle sue amate escursioni, dovette fermarsi solo quando il male gli impose di tornare al più presto a Chicago. Dall'America ci giunse qualche mese dopo una telefonata di mia zia Laura: comunicava che Enrico aveva subito un'operazione 'esplorativa'; non passò molto tempo e ci giunse la notizia della sua prematura scomparsa.

Fig. 3 – Enrico Fermi, Ginestra Amaldi, Edoardo Amaldi ed Enrico Persico a Pera di Fassa (frazione di Pozza di Fassa, Trento) nell'estate del 1954.



Aggiungo ora a questo resoconto alcune considerazioni personali.

Enrico Fermi era «quello che ha inventato la bomba atomica»: di sicuro oggi non si direbbe così per mostrare ammirazione, anzi una simile affermazione equivarrebbe a un atto di accusa; devo dire che anche negli anni Cinquanta alcuni intellettuali vedevano Fermi in maniera molto critica collegandolo ai tragici bombardamenti atomici del 1945 in Giappone. Dal mio punto di vista gli esperimenti atomici operati negli Stati Uniti erano del tutto giustificati e opportuni date le circostanze del tempo: a questi Fermi dette un contributo fondamentale; fu invece estraneo alla successiva decisione di usare l'atomica contro il Giappone; in seguito, come è ben noto, rifiutò per motivi etici di partecipare al progetto della bomba H. Quello che turba un po' è che certi atteggiamenti del pubblico sembrano dovuti a 'mode', alla propaganda dei media piuttosto che a una riflessione personale.

Ho partecipato in passato a due avvenimenti celebrativi di Enrico Fermi. A Firenze, in occasione di un convegno sui raggi cosmici, nel settembre del 1995 fu posta a cura dell'Accademia dei Lincei nella chiesa di Santa Croce una lapide in ricordo di Fermi: erano presenti tra gli altri il presiden-

Fig. 4 – L'opera dello scultore Corrado Cagli posta nella Basilica di Santa Croce – la chiesa nella quale la città di Firenze ricorda da secoli i 'grandi' italiani – dedicata a Enrico Fermi.



te dei Lincei Sabatino Moscati, il ministro dell'Università Giorgio Salvini e il sindaco Mario Primicerio. A Roma nel settembre del 2001 fu celebrato il centenario della nascita di Fermi: presidente del comitato Carlo Bernardini. All'inaugurazione fu presente anche il Presidente della Repubblica Carlo Azeglio Ciampi.

In entrambe le occasioni i presentatori che erano non estranei al mondo della scienza tennero discorsi adeguati alla fama di Fermi: tributo di onore al grande scienziato; viceversa ebbi l'impressione che (specie nel primo evento) alcuni personaggi pubblici e anche stampa e televisione tenessero un basso profilo: come per dare poco rilievo all'evento, magari per non urtare la sensibilità della gente ormai abituata a considerare l'energia atomica come diabolica. Mi turbava il pensiero: «forse che lo stato un po' si vergogna di uno dei suoi più grandi scienziati?».

Nel presente mi sembra che quel disagio nel parlare di Fermi si stia pian piano dissolvendo, scienziati illustri hanno evidenziato i suoi contributi fondamentali anche in settori della fisica non connessi con l'energia atomica, la quale tuttora rimane in disgrazia.

PARTE II

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

PREFAZIONE ALLE LEZIONI

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici, Giuseppe Pelosi

Dopo la laurea alla Scuola Normale di Pisa, Enrico Fermi trascorse due periodi di soggiorno all'estero, in Germania ed in Olanda, con un intermezzo di un incarico temporaneo di insegnamento a Roma, nell'anno accademico 1923/24. Mario Corbino, il Direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, voleva assolutamente Fermi a Roma in una posizione di prestigio ed iniziò a fare il possibile per creare la prima cattedra italiana di Fisica Teorica, obiettivo che Corbino raggiungerà nel 1926.

Più o meno nello stesso periodo, Antonio Garbasso, Direttore dell'Istituto di Fisica della Regia Università degli Studi di Firenze, cercava di creare un gruppo di giovani fisici brillanti: nell'anno 1924, Garbasso che, nell'accademico 1922/23, aveva già fatto venire a Firenze Franco Rasetti, fece avere un doppio incarico a Fermi, che era stato compagno di studi di Rasetti a Pisa. A Fermi, a Firenze negli anni accademici 1924/25 e 1925/26, furono affidati due incarichi, quello di 'Fisica Matematica' per i fisici e quello di 'Meccanica Razionale' per i fisici, i matematici e per gli studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria.

Il periodo di Enrico Fermi a Firenze fu breve, ma molto fruttuoso. Iniziò infatti a svolgere ricerche di fisica sperimentale con l'ausilio di Franco Rasetti, che era estremamente dotato per le attività di laboratorio. Inoltre Fermi scrisse nel periodo fiorentino il famoso lavoro che dette origine alla statistica di Fermi-Dirac, che può considerarsi la 'madre' di tutte le applicazioni della fisica dello stato solido: computer, telefoni cellulari, ecc. Nell'anno accademico 1924/25 nel corso di 'Fisica Matematica', Enrico Fermi trattò l'«Elettrodinamica»¹. Nell'anno successivo Fermi, dopo aver richiesto e ottenuto la trasformazione del titolo da Fisica Matematica in Fisica Teorica, trattò nozioni di probabilità, la termodinamica e la meccanica statistica.

Dopo la partenza di Fermi il corso di Meccanica Razionale sarà tenuto da Persico fino all'a.a. 1929/30 e poi da Bernardini fino al 1931/32. Successivamente il corso passerà ai fisici matematici, prima Bruto Caldonazzo,

¹ L'edizione integrale del testo dattiloscritto di queste lezioni, tenute nell'anno accademico 1924/25, è stata pubblicata da Ulrico Hoepli Editore con il titolo *Elettrodinamica* (a cura di Walter Joffrain) nel 2006.

Fig. 1 – Scheda dell'Università di Bonanno Bonanni. [Archivio Storico dell'Università di Firenze]

A B C D E F G H I L M N O P Q R S T U V Z	
R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI - FIRENZE	
Cognome e Nome	Bonanni Bonanno
Numero della filza	516
di	fu Enrico e della Olga Fallucetti
Nato il	28-4-1906 a Carrara (Mare)
N. inserto	14906
Immatricolato il	19-11-1924
Facoltà	SCIENZE
Titolo di studio per l'ammissione	Diploma di Maturità Classica
Matricola N.	7684
Laureato il	
Registro N.	VI
Titolo della tesi di laurea	
Pag. N.	187
Congedato il	27-12-1926
per	la R. Scuola Ingeg. di Torino
Facoltà	SCIENZE
Fuori corso dal	

Ferretti Mod. 0800 - 14000-F - 4-34

dall'a.a. 1931/32 all'a.a. 1955/56, e poi Giorgio Sestini, dall'a.a. 1956/57 all'a.a. 1970/71. Il corso di Fisica Teorica fu invece tenuto da Persico fino al 1929/30, da Rossi fino al 1931/32 e poi da Racah fino al 1937/38.

Due studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria dell'anno accademico 1925/26, Bonanno Bonanni (Carrara, 1906 – dato non disponibile) e Paolo Pasca (Roma, 1904 – dato non disponibile), riorganizzarono gli appunti del corso di 'Meccanica Razionale' in dispense che furono stampate nel 1926 dalla Litografia Tassini a Firenze. Bonanni e Pasca supereranno l'esame rispettivamente con la votazione 30/30 e 24/30; il primo si laureerà alla Scuola di Ingegneria di Torino nel 1929 e il secondo alla Scuola di Ingegneria di Padova nel 1930².

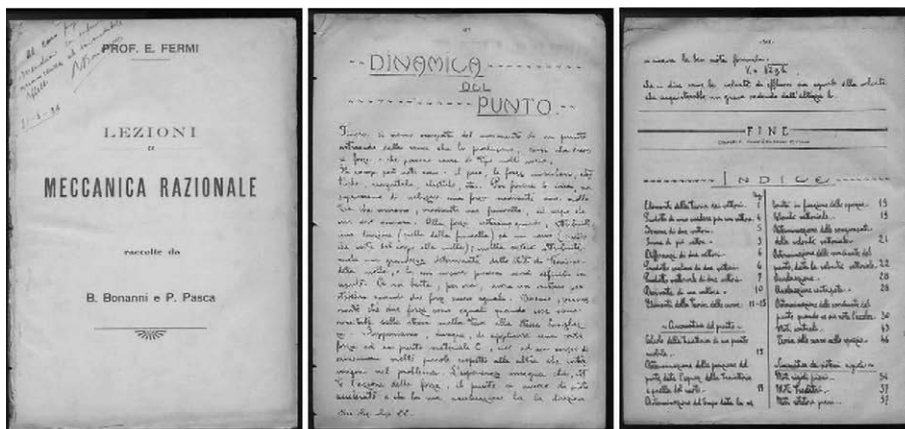
Nonostante le dispense fossero state stampate a Firenze, in questa sede non ne era rimasta traccia ufficiale. Elson Agastra, che ha conseguito il dottorato di ricerca presso l'Università di Firenze ed ora al Politecnico di Tirana, trovò questa opera citata in Google Books, ma non disponibile. Successivamente Alessandro Pierno (Firenze University Press), su richiesta di uno dei curatori, iniziò una ricerca tra biblioteche e collezionisti, sia italiani che

² Vedi l'articolo di L. Lucci, F. Salvadori e S. Selleri, *Enrico Fermi docente alla Regia Università degli Studi di Firenze*, in questo volume.

Fig. 2 – Scheda dell'Università di Paolo Pasca. [Archivio Storico dell'Università di Firenze]

A B C D E F G H I L M N O P Q R S T U V Z	
R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI - FIRENZE	
Cognome e Nome <i>Lasca Paolo</i>	Numero della filza <i>550</i>
di <i>fu Raffaele</i> e della <i>Vilma Baj</i>	N. inserto <i>Moss</i>
Nato il <i>28-7-1904</i> a <i>Roma</i>	Matricola N. <i>8447</i>
Immatricolato il <i>5-1-1926</i>	Registro N. <i>VII</i>
Facoltà <i>SCIENZE</i>	Pag. N. <i>141</i>
Titolo di studio per l'ammissione <i>Congedo del R. Politecnico di Milano</i>	Facoltà <i>SCIENZE</i>
Laureato il _____	
Titolo della tesi di laurea _____	
Congedato il <i>11-3-1924</i>	
per <i>la R. Scuola di Applicazione di Padova</i>	
Fuori corso dal _____	

Fig. 3 – Alcune pagine del testo di Enrico Fermi di *Meccanica Razionale*, relativo alle lezioni da lui tenute all'Università di Firenze dal 1924 al 1926. L'originale del libro si trova presso la Temple University (Philadelphia, Pennsylvania, USA).



statunitensi. Alla fine una copia delle dispense fu trovata presso la Temple University (Filadelfia), come parte di una collezione frutto di un lascito. A seguito dell'interessamento di Alberto Tesi, Rettore dell'Università di Firenze all'epoca della prima edizione, è stato possibile ottenere il permesso della Temple University e degli eredi di Fermi, per poter riprodurre queste lezioni.

Le dispense si sviluppano lungo le linee classiche di un corso di 'Meccanica Razionale', con un occhio di riguardo alle esigenze del biennio propedeutico agli studi di ingegneria, in particolare nell'attenzione dedicata alla statica dei corpi rigidi.

Dato che Enrico Fermi si trasferì a Roma nel 1926 non è chiaro se ebbe l'occasione di rivedere la trascrizione delle sue lezioni da parte dei suoi studenti; la nostra impressione è che questo non sia avvenuto. Infatti, varie dimostrazioni, assai semplici, sono spesso oscurate, sia dal linguaggio pesante del periodo, sia dalle molte ripetizioni, sia da passaggi matematici del tutto superflui. Nonostante ciò traspare uno dei caratteri fondamentali dell'insegnamento di Enrico Fermi: la costante ricerca della linea di approccio più semplice alla soluzione di un dato problema. Non c'è ombra di dubbio sulle sue capacità matematiche, visti i suoi lavori giovanili, precedenti al periodo fiorentino, di relatività generale e di meccanica analitica, ma ciononostante lui preferiva evitare il formalismo matematico più astratto qualora fosse possibile.

A questo riguardo occorre notare l'assenza dell'uso delle matrici, che, in effetti, avrebbero semplificato la trattazione, in particolare nell'ambito dei sistemi rigidi. Occorre però ricordare che le matrici sono entrate nell'uso dei fisici nel 1925. A luglio di quell'anno infatti, Heisenberg aveva sviluppato la prima formulazione della meccanica quantistica, introducendo quantità a due indici, ma senza sapere che questi oggetti altro non erano che matrici, da molto tempo in uso tra i matematici. Fu Born che riconobbe le quantità introdotte da Heisenberg come tali, avendole studiate in un corso di algebra che aveva frequentato all'Università. Infatti, Born e Jordan, alla fine del 1925 riformularono il lavoro di Heisenberg, facendo uso dell'algebra delle matrici. Era dunque improbabile che negli anni dal 1924 all'inizio del 1926 si facesse uso di tali tecniche in un corso universitario che non fosse di matematica.

Le dispense del corso di 'Meccanica Razionale' iniziano con una introduzione elementare al calcolo vettoriale e alla geometria delle curve. Nei due capitoli successivi viene descritta la cinematica del punto e dei sistemi rigidi, includendo una trattazione dei moti relativi. Nei capitoli 4 e 6 viene discussa la dinamica del punto e dei sistemi vincolati, con una digressione, nel capitolo 5, dedicata alla gravitazione universale. Il capitolo 7 è dedicato ai problemi di equilibrio stabile e instabile di un punto materiale. I capitoli 8 e 9 si occupano della dinamica in generale e di quella dei rigidi in particolare. Il capitolo 10 riprende la statica introducendo il principio dei lavori virtuali e discutendo vari esempi. Nel capitolo 11 viene trattato l'attrito. Infine gli ultimi due capitoli sono dedicati alla meccanica lagrangiana e alla idrodinamica. In tutti i capitoli sono numerosi gli esempi e le applicazioni.

Infatti, lo spirito pragmatico di Enrico Fermi non concepiva una teoria che non conducesse a dei risultati utili.

Le dispense del corso di 'Meccanica Razionale' erano originariamente scritte a mano. Gli autori hanno provveduto alla loro trascrizione allo scopo di renderle maggiormente leggibili, ma hanno volutamente mantenuto inalterata la loro forma, limitandosi ad inserire delle note in alcuni punti in cui erano presenti degli errori o qualora il testo o le notazioni risultassero particolarmente oscuri.

Gli stessi sperano così di aver reso più accessibile un momento dell'esperienza didattica di Enrico Fermi, scienziato che ha avuto un ruolo fondamentale nello sviluppo della fisica italiana e mondiale.

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

Enrico Fermi

Lezioni tenute da Fermi all'Università di Firenze negli anni accademici
1924/25 e 1925/26 e raccolte da B. Bonanni e P. Pasca.

*Al corso prof
Mendelvi
ricerca ed influenze
affetti.
B Bonanni*

PROF. E. FERMI

21-6-26

LEZIONI

DI

MECCANICA RAZIONALE

raccolte da

B. Bonanni e P. Pasca



INDICE

1.	CALCOLO VETTORIALE	125
1.1	Definizione di vettore	125
1.2	Componenti di un vettore	127
1.3	Operazioni sui vettori	128
1.4	Derivata di un vettore	133
1.5	Elementi della teoria delle curve	134
2.	CINEMATICA DEL PUNTO	138
2.1	Calcolo della traiettoria di un punto mobile	138
2.2	Determinazione della posizione del punto, data l'equazione della traiettoria e quella del moto	140
2.3	Determinazione del tempo, data la velocità in funzione dello spazio	142
2.4	Velocità vettoriale	142
2.5	Determinazione delle componenti della velocità vettoriale	144
2.6	Data la V mediante le sue componenti, determinare le coordinate del punto	145
2.7	Accelerazione	150
2.8	Accelerazione centripeta	150
2.9	Determinare le coordinate del punto, data l'accelerazione	153
2.10	Moti centrali	166
2.11	Teoria delle curve nello spazio	168
3.	CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI	175
3.1	Moti rigidi piani	178
3.2	Moti traslatori	178
3.3	Moti rotatori piani	178
3.4	Moti rigidi in generale	184
3.5	Velocità angolare nei moti rigidi, in genere	186
3.6	Asse istantaneo di rotazione	188
3.7	Calcolare la velocità di un punto, espressa mediante le sue componenti secondo la terna ξ, η, ζ	190
3.8	Moti rigidi qualsiasi	193

3.9	Moti relativi	196
3.10	Accelerazione nei moti relativi	198
3.11	Determinazione del significato di A_C mediante considerazioni vettoriali	199
4.	DINAMICA DEL PUNTO	201
4.1	Parallelogramma delle forze	204
4.2	Determinazione del moto di un corpo conoscendone la massa e le forze agenti su di esso	205
4.3	Moto dei gravi	205
4.4	Lavoro	209
4.5	Forza viva	210
4.6	Potenziale	212
4.7	Determinazione delle forze di un campo, essendo noto il potenziale	215
4.8	Determinare se un dato campo di forze, ammette, o no, potenziale	216
4.9	Superfici equipotenziali	220
4.10	Principio di conservazione dell'energia nella dinamica del punto	221
4.11	Quantità di moto e impulso	222
4.12	Moto dell'oscillatore isocrono	224
4.13	Moto dell'oscillatore smorzato	225
5.	GRAVITAZIONE UNIVERSALE	234
6.	MOTI VINCOLATI	244
6.1	Moto di un punto vincolato	244
6.2	Pendolo semplice	246
6.3	Vincoli unilaterali	248
6.4	Moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie	250
7.	STATICA DEL PUNTO	252
7.1	Cerchiamo la condizione perché un punto libero sia in equilibrio	252
7.2	Equilibrio stabile e instabile	252
7.3	Equilibrio di un punto vincolato	256
7.4	Posizioni d'equilibrio indifferente	257
8.	DINAMICA DEI SISTEMI	258
8.1	Risultante delle forze di un sistema	260

8.2	Quantità di moto e impulso nei sistemi	260
8.3	Centro di gravità	262
8.4	Centro di gravità per un sistema continuo	263
8.5	Determinazione del centro di gravità di alcuni particolari sistemi	265
8.6	Proprietà dinamiche del centro di gravità	274
8.7	Momento di vettori applicati	275
8.8	Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta	276
8.9	Momento delle forze interne di un sistema	279
8.10	Teorema del momento della quantità di moto	280
8.11	Relazioni tra il momento delle forze agenti su di un sistema ed il momento della quantità di moto del sistema stesso	281
9.	SISTEMI RIGIDI	284
9.1	Statica dei corpi rigidi	284
9.2	Coppie di forze	287
9.3	Momento del peso	289
9.4	Equilibrio di un corpo rigido vincolato	291
9.5	L'equilibrio in alcune macchine semplici	294
9.6	Momento d'inerzia	298
9.7	Pendolo composto	308
9.8	Teorema d'inversione del pendolo composto	310
9.9	Ellissoide d'inerzia	313
9.10	Giroscopio	319
9.11	Moto di un sistema rigido libero	322
9.12	Teorema delle forze vive per i sistemi rigidi	324
10.	STATICA IN GENERALE	330
10.1	Catenaria	330
10.2	Catenaria dei ponti sospesi	334
10.3	Principio dei lavori virtuali	335
10.4	Equilibrio di un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie	339
10.5	Equilibrio di un punto appoggiato ad un piano	339
10.6	Equilibrio di un corpo rigido avente un punto fisso	339
10.7	Equilibrio di un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso	342
10.8	Equilibrio della vite	342
10.9	Equilibrio del torchio idraulico	344
10.10	Equilibrio di sistemi soggetti a forze che ammettono potenziale	346

11. ATTRITO	350
11.1 Equilibrio di un sistema soggetto alla reazione d'attrito	351
11.2 Angolo d'attrito	354
12. COORDINATE GENERALI	356
12.1 Coordinate generali	356
12.2 Principio di D'Alembert	362
12.3 Equazioni di Lagrangia	364
13. IDROMECCANICA	374
13.1 Idrostatica	377
13.2 Idrodinamica	382
13.3 Moti permanenti	383
13.4 Teorema di Torricelli	384

Capitolo 1

CALCOLO VETTORIALE

1.1 Definizione di vettore

Dati due punti P_1 e P_2 nello spazio, per portare P_1 in P_2 bisogna spostarlo di un tratto di lunghezza $\overline{P_1P_2}$ nella direzione P_1P_2 e nel senso che va da P_1 a P_2 . Ci troviamo dunque, in questo caso, di fronte ad un ente (spostamento che porta P_1 in P_2) che consta di tre elementi, una grandezza ordinaria (la lunghezza del segmento $\overline{P_1P_2}$), una direzione (quella della retta P_1P_2) ed un verso (quello che va da P_1 a P_2).

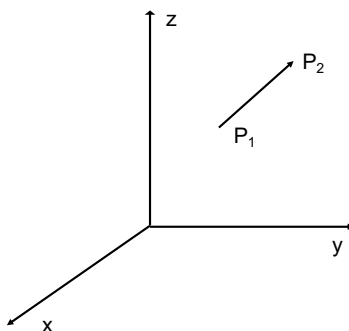


Figura 1.1: Il vettore $\overline{P_1P_2}$.

Nella meccanica e nella fisica ricorre spesso la considerazione di enti di questo tipo, che sono definiti da una grandezza, una direzione ed un verso. Questi enti, che si chiamano vettori o quantità vettoriali (in contrapposto a quantità scalari, che è il nome riservato alle grandezze ordinarie) sono stati perciò l'oggetto di uno studio speciale, di cui vogliamo qui esporre gli elementi.

Occupiamoci anzitutto dei vari modi con cui si può caratterizzare matematicamente un vettore. Prendiamo perciò un sistema (x, y, z) di assi cartesiani ortogonali per riferimento. Il nostro vettore A è definito dalla sua

grandezza e dalla sua orientazione. Per caratterizzarlo daremo, dunque, la sua grandezza

$$a \tag{1.1}$$

ed i coseni di direzione della sua orientazione:

$$\alpha, \beta, \gamma. \tag{1.2}$$

Queste quattro grandezze, che caratterizzano il vettore A , non sono indipendenti tra di loro, poiché tra α, β e γ , passa la nota relazione:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{1.3}$$

Per esempio, il vettore spostamento, che da P_1 porta in P_2 , ha per sua grandezza la distanza $\overline{P_1P_2}$, cioè, se con x_1, y_1, z_1 ed x_2, y_2, z_2 indichiamo le coordinate di P_1 e P_2 , la grandezza di questo vettore è:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

ed i suoi coseni di direzione sono

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{a}; \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{a}; \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{a}$$

Per procurarsi una rappresentazione intuitiva geometrica di un vettore A , conviene rappresentarlo per mezzo di un segmento che abbia la direzione ed il verso del vettore A e lunghezza misurata dallo stesso numero che misura la grandezza del vettore A (p. es., se il vettore A è una forza, e se si prende per unità di forza il Kg. e per unità di lunghezza il cm., una forza di 7 Kg. sarà rappresentata con un segmento lungo 7 cm.). Per indicare il senso, si usa munire il segmento di una freccia. Si intende che per la caratterizzazione del vettore quello che conta è soltanto la lunghezza e l'orientazione del segmento rappresentativo, e non la sua posizione nello spazio. P. es. nella Figura 1.2, i due segmenti A e B rappresentano vettori uguali $A = B$. Per conseguenza nella rappresentazione geometrica dei vettori si può, secondo l'opportunità fare, p. es. uscire tutti i segmenti rappresentativi da un estremo comune, o, comunque disporre a piacere della loro posizione nello spazio.

Indicheremo, normalmente, i vettori con lettere maiuscole, o con minuscole sormontate da una piccola freccia, e la loro grandezza col simbolo del vettore chiuso tra due aste verticali. P. es., $A, B, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \dots$ rappresentano dei vettori, e $|A|, |B|, \dots, |\vec{a}|, |\vec{b}|, \dots$ rappresentano le loro grandezze.

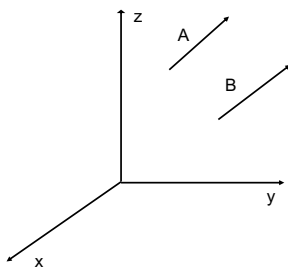


Figura 1.2: Vettori uguali con diversa origine

1.2 Componenti di un vettore

Abbiamo visto nel paragrafo precedente, che per caratterizzare analiticamente un vettore A , basta darne la grandezza $|A|$ ed i coseni di direzione α, β e γ , ed abbiamo anche notato che queste quattro grandezze sono vincolate dalla relazione (1.3). Ora conviene, in molte applicazioni, caratterizzare A mediante tre sole grandezze indipendenti fra di loro. Per ottenere tale caratterizzazione, ci conviene introdurre la nozione importantissima di componente di un vettore A sopra un asse s . Si chiama componente di un vettore A sopra un asse s , e si indica con la scrittura A_s , uno scalare uguale al prodotto della grandezza $|A|$ del vettore, per il coseno dell'angolo θ formato tra le orientazioni di A e di s . Abbiamo dunque:

$$A_s = |A| \cos \theta \quad (1.4)$$

A_s è dunque in altre parole la proiezione di A sopra l'asse s . Siccome, poi, $|A|$ è sempre positivo, A_s sarà positivo o negativo, secondo che θ è acuto od ottuso. Le componenti di A sopra gli assi coordinati sono:

$$A_x = |A|\alpha, \quad A_y = |A|\beta, \quad A_z = |A|\gamma. \quad (1.5)$$

Possiamo ora, facilmente dimostrare, **che quando di un vettore sono date le tre componenti A_x, A_y, A_z , sopra gli assi coordinati, il vettore è completamente determinato**. Ed infatti, quadrando e sommando le (1.5) e tenendo conto della (1.3) si trova

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |A|^2 \quad (1.6)$$

da cui, siccome $|A| > 0$, si trova

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.7)$$

Una volta determinato $|A|$, le (1.5) ci danno:

$$\alpha = \frac{A_x}{|A|}, \quad \beta = \frac{A_y}{|A|}, \quad \gamma = \frac{A_z}{|A|}. \quad (1.8)$$

Conoscendo quindi le componenti di A , il vettore resta completamente determinato. Dati A_x, A_y, A_z , è facile determinare la componente di A sopra una qualsiasi orientazione s ; siano infatti λ, μ, ν i coseni direttori di s . Si avrà:

$$\cos\theta = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

e quindi:

$$A_s = |A| \cos\theta = |A|\alpha\lambda + |A|\beta\mu + |A|\gamma\nu = A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu \quad (1.9)$$

1.3 Operazioni sui vettori

In questo paragrafo vogliamo occuparci delle operazioni algebriche sui vettori. Esse sono:

Prodotto di uno scalare per un vettore - Si chiama prodotto dello scalare a per il vettore A e si indica con il simbolo:

$$aA$$

il vettore che ha per grandezza $|a||A|$, per direzione la direzione di A , e per senso quello di A o l'opposto, a seconda che a è positivo o negativo,

In particolare, il simbolo:

$$-1A = -A$$

rappresenta il vettore eguale ed opposto ad A .

Le componenti di aA si ottengono semplicemente moltiplicando per a le componenti di A :

$$(aA)_x = aA_x, \dots \quad (1.10)$$

Somma di due vettori - Si chiama somma di due vettori A e B , un terzo vettore C , indicato col simbolo

$$A + B = C \quad (1.11)$$

che è così definito. A partire da un punto, O , si tracci il segmento rappresentativo OM del vettore A , ed, a partire da M , il segmento rappresentativo, MN , di B . Il vettore C è allora rappresentato dal segmento ON .

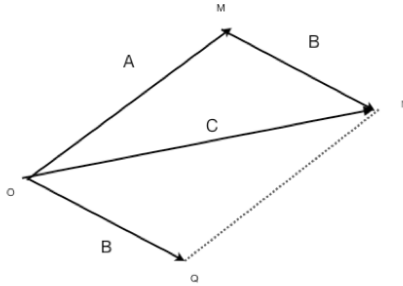


Figura 1.3: La regola del parallelogrammo

Evidentemente C può anche considerarsi come diagonale, ON , del parallelogrammo $OMNQ$ che ha per lati OM , OQ , rappresentativi di A e di B (la regola del parallelogrammo). Si riconosce immediatamente che vale la proprietà commutativa

$$A + B = B + A \quad (1.12)$$

Essendo, poi, C il lato di chiusura della spezzata poligonale OMN , si avrà che la proiezione di C su qualunque asse è la somma delle proiezioni di A e di B , e quindi

$$C_x = (A + B)_x = A_x + B_x \quad (1.13)$$

e analogamente per y e z . Cioè: le componenti della somma di due vettori sono la somma delle componenti dei due vettori.

Somma di più vettori A, B, C, D , si chiama un vettore S che ha per segmento rappresentativo il lato di chiusura, OQ , della spezzata poligonale $OMNPQ$, costruita coi segmenti rappresentativi OM, MN, NP, PQ , dei vettori dati A, B, C, D . Si riconosce dunque che le componenti di S sono la somma delle componenti di A, B, C, D , cioè

$$S_x = (A + B + C + D)_x = A_x + B_x + C_x + D_x \quad (1.14)$$

Si vede, anche, che per la somma dei vettori valgono le proprietà commutativa e additiva della somma ordinaria,

$$A + B + C + D = B + D + A + C = D + (A + C) + B = \dots \quad (1.15)$$

Differenza di due vettori A e B , è il vettore C , somma dei due vettori A e $-B$:

$$A - B = A + (-B)$$

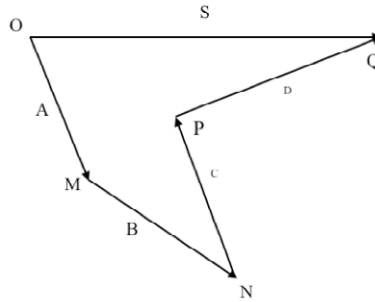


Figura 1.4: La somma di più vettori

La costruzione geometrica della differenza di due vettori è rappresentata

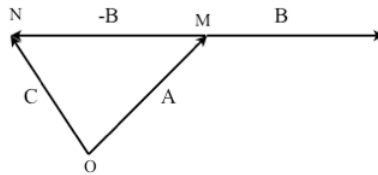


Figura 1.5: La differenza di due vettori

dalla Figura 1.5. Valgono, evidentemente le relazioni

$$(A - B)_x = A_x - B_x \quad (1.16)$$

$$B + (A - B) = A \quad (1.17)$$

Prodotto scalare di due vettori, A e B , è uno scalare, p , indicato con il simbolo

$$p = A \times B,$$

eguale al prodotto delle grandezze dei due vettori per il coseno dell'angolo θ , da essi formato. Abbiamo dunque

$$p = A \times B = |A||B| \cos \theta. \quad (1.18)$$

Se i due vettori sono dati per mezzo delle loro componenti, si ha (1.8) che i coseni di direzione di A sono $A_x/|A|, A_y/|A|, A_z/|A|$ e quelli di B : $B_x/|B|, B_y/|B|, B_z/|B|$, e quindi:

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A||B|}. \quad (1.19)$$

Sostituendo nella (1.18), si trova

$$A \times B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1.20)$$

Il prodotto scalare gode, evidentemente, delle proprietà commutativa e distributiva

$$A \times B = B \times A; \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C. \quad (1.21)$$

Perché il prodotto scalare sia nullo, è necessario che sia o $|A| = 0$, o $|B| = 0$, o $\cos\theta = 0$; ossia che uno dei due vettori sia nullo, oppure che i due vettori siano perpendicolari tra loro. Se i due vettori hanno la stessa direzione, il loro prodotto scalare è, semplicemente, uguale al prodotto delle loro grandezze, con il segno $+$ o $-$, secondoché i due vettori hanno senso uguale o contrario. In particolare, il prodotto scalare, $A \times A$, di un vettore per se stesso, è uguale al quadrato della sua grandezza, e lo indicheremo semplicemente col simbolo A^2 . Si ha così:

$$A \times A = |A|^2 = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \quad (1.22)$$

Prodotto vettoriale di due vettori, A e B , è un vettore indicato con il simbolo

$$A \wedge B$$

che ha per grandezza il prodotto delle grandezze dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo θ da essi formato

$$|A \wedge B| = |A| \cdot |B| \sin\theta, \quad (1.23)$$

per direzione quella della normale al piano dei due vettori A e B , e per senso quello indicato dal medio della mano destra, quando si ponga il pollice nella direzione di A , e l'indice in quella di B . Geometricamente $|A \wedge B|$ è uguale all'area del parallelogrammo che ha per lati A e B . Dalla definizione scaturiscono, immediatamente, alcune proprietà del prodotto vettoriale. Intanto perché $A \wedge B$ sia nullo è necessario che uno dei due vettori sia nullo, oppure che i due vettori siano paralleli; in particolare

$$A \wedge A = 0. \quad (1.24)$$

Per il prodotto vettoriale **non** vale la proprietà commutativa, perché è evidente, dalla definizione che scambiando l'ordine dei fattori il prodotto cambia di segno, cioè

$$A \wedge B = -B \wedge A \quad (1.25)$$

Vogliamo, ora, dimostrare che le componenti del prodotto vettoriale $A \wedge B = P$, sono date da:

$$\begin{cases} P_x = A_y B_z - A_z B_y \\ P_y = A_z B_x - A_x B_z \\ P_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases} \quad (1.26)$$

Basta perciò osservare che queste componenti non sono altro che i minori (resi algebrici) della matrice:

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

E quindi sviluppando per gli elementi della prima orizzontale il determinante nullo (perché ha due righe eguali)

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si trova:

$$A_x P_x + A_y P_y + A_z P_z = A \times P = 0;$$

dunque il vettore P , definito dalla (1.26) è perpendicolare a A , e, analogamente, si dimostra che è perpendicolare anche a B . Dunque la direzione di P è quella perpendicolare al piano di A e di B . Per trovare la grandezza di P , osserviamo che:

$$\begin{aligned} P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} A^2 & A \times B \\ A \times B & B^2 \end{vmatrix} = \\ &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

da cui

$$|P| = |A| \cdot |B| \sin \theta.$$

La grandezza e la direzione di P coincidono quindi con quelle di $A \wedge B$. Per dimostrare ora che anche i sensi coincidono, consideriamo due vettori A' e B' , di componenti rispettivamente $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Il loro prodotto vettoriale è, evidentemente, il vettore di componenti $(0, 0, 1)$ (questo dipende dal fatto che noi prendiamo gli assi in modo che, ponendo il pollice e l'indice della mano destra nelle direzioni x ed y , il medio ci indica la direzione di z). Se si facesse la convenzione contraria bisognerebbe cambiare di segno le (1.26), e, in questo caso le (1.26) ci danno il prodotto vettoriale

P' col segno esatto. Se, ora pensiamo di far variare con continuità A' e B' fino a farli coincidere con A e B , evitando che, in qualche posizione intermedia si abbia $A' \wedge B' = 0$, troviamo che le componenti di P' passano, con continuità in quelle di P . Quindi, il prodotto vettoriale, che coincide in grandezza e direzione con P' , e che, inizialmente, coincide con P' anche in senso, deve coincidere sempre, poiché ove avvenisse un cambiamento di segno, il prodotto vettoriale dovrebbe presentare una discontinuità ciò che è escluso dalla sua stessa definizione. Resta dunque provato che le (1.26) ci danno le componenti del prodotto vettoriale. Provato questo, si può immediatamente far vedere che il prodotto vettoriale soddisfa alla proprietà distributiva, cioè che:

$$A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C \quad (1.27)$$

Infatti la componente x , p. es., del primo membro è:

$$A_y(B_z + C_z) - A_z(B_y + C_y) = (A_y B_z - A_z B_y) + (A_y C_z - A_z C_y)$$

essa è dunque, uguale alla componente x del secondo membro, e parimenti vale per altre componenti.

1.4 Derivata di un vettore

Consideriamo ora un vettore A che sia funzione di una variabile t :

$$A = A(t). \quad (1.28)$$

P. es., potremo supporre che le componenti di A siano funzioni note di t :

$$A_x = A_x(t); \quad A_y = A_y(t); \quad A_z = A_z(t). \quad (1.29)$$

Consideriamo, ora, il vettore:

$$A(t+h) - A(t),$$

cioè la differenza tra i due vettori corrispondenti ai valori t e $t+h$ della variabile. Quando h tende a zero, tale differenza tende anch'essa a zero; se però consideriamo il rapporto:

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h},$$

avremo che esso ha invece, in generale, un limite finito. Questo limite si dirà **derivata del vettore A rispetto a t** . Esso è, dunque, un vettore, che noi indicheremo col simbolo dA/dt . Abbiamo:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \quad (1.30)$$

Siccome le componenti di $A(t+h) - A(t)$ sono $A_x(t+h) - A_x(t)$ ed espressioni analoghe, abbiamo che le componenti di dA/dt saranno

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_x(t+h) - A_x(t)}{h}$$

ed analogamente per y e z , e cioè:

$$\frac{dA_x}{dt}; \quad \frac{dA_y}{dt}; \quad \frac{dA_z}{dt}.$$

Troviamo, dunque, che le componenti della derivata di un vettore sono le derivate delle sue componenti.

Sono di immediata dimostrazione le seguenti formule, analoghe a quelle note del calcolo:

$$\frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}, \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt}A \times B = A \times \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \times B; \quad \frac{dA^2}{dt} = 2A \times \frac{dA}{dt}, \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt}A \wedge B = A \wedge \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \wedge B. \quad (1.33)$$

La loro verifica può farsi, immediatamente, sopra le componenti.

1.5 Elementi della teoria delle curve

Una linea C , nello spazio, si può descrivere in molti modi:

a) Dando due equazioni

$$\phi(x, y, z) = 0, \quad \text{e} \quad \psi(x, y, z) = 0 \quad (1.34)$$

tra le coordinate; in questo caso la linea viene ad essere data come intersezione delle due superfici: $\phi = 0$ e $\psi = 0$.

b) Dando le due coordinate, y e z , in funzione della x

$$y = y(x), \quad z = z(x). \quad (1.35)$$

Questo non è che un caso particolare del precedente, perché basta porre $\phi = y - y(x)$ e $\psi = z - z(x)$, sono in questo caso due cilindri (in genere non circolari), il primo con le generatrici parallele a z ed il secondo parallele ad y .

c) Si possono dare le tre coordinate, x, y, z , in funzione di un parametro θ

$$x = x(\theta), \quad y = y(\theta), \quad z = z(\theta). \quad (1.36)$$

Eliminando θ tra queste tre equazioni, si trovano le equazioni della curva sotto la forma (1.34). Se, in particolare, è $x = \theta$, le (1.36) coincidono con le (1.35). È, molte volte, conveniente prendere come parametro θ l'arco s della curva (contato a partire da un certo punto P_0); allora le (1.36) prendono la forma

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (1.37)$$

Noi supporremo sempre, in questo capitolo, che le equazioni siano sotto la forma (1.37). Se esse fossero date, p. es., sotto la forma (1.36), si passare alla forma (1.37) introducendo al posto di θ , la sua funzione s , definita dall'equazione:

$$s = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta) + z^2(\theta)} d\theta \quad (1.38)$$

dove θ_0 rappresenta il valore di θ che corrisponde al punto P_0 , e bisogna prendere il segno $+$ o $-$ a seconda che al crescere di θ , il punto si muova lungo la curva nel senso positivo o nell'opposto.

Definiamo ora, un vettore \vec{t} , funzione di s che ha, per ogni valore di s , la direzione della tangente alla curva C nel punto corrispondente a s , il verso in cui s cresce e grandezza 1. Le componenti di questo vettore saranno evidentemente date da:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \quad (1.39)$$

Esse soddisfano alla relazione:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad (1.40)$$

cioè $\vec{t}^2 = 1$, che esprime che il vettore \vec{t} ha lunghezza 1. Derivando la (1.40), si trova

$$\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \quad (1.41)$$

che ci dice che la derivata di, \vec{t} , rispetto ad s , è perpendicolare a \vec{t} , e, quindi, anche alla curva C . Il piano che contiene i due vettori, \vec{t} e $d\vec{t}/ds$, si dice

piano osculatore. Le componenti di $d\vec{t}/ds$ sono date da:

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} \quad (1.42)$$

e quindi

$$\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2} = \frac{1}{\rho} \quad (1.43)$$

dove ρ è il raggio di prima curvatura. Concludiamo che $d\vec{t}/ds$ ha grandezza uguale alla curvatura, e, quindi, il vettore

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{t}}{ds} \quad (1.44)$$

avrà grandezza 1; la sua direzione si dice normale principale della curva. Abbiamo dunque, indicando con α, β, γ , i coseni di direzione della tangente, cioè le componenti (1.39) di \vec{t} , e con λ, μ, ν i coseni di direzione della normale principale, cioè le componenti di \vec{n} :

$$\lambda = \frac{d\alpha}{ds} \rho, \quad \mu = \frac{d\beta}{ds} \rho, \quad \nu = \frac{d\gamma}{ds} \rho \quad (1.45)$$

Queste formule sono dovute a Serret.

Introduciamo, ora, un terzo vettore \vec{b} così definito:

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1 \quad (1.46)$$

Il piano \vec{t}, \vec{n} (perpendicolare a \vec{b}) è, ancora, il piano osculatore, e la direzione di \vec{b} si dice binormale. Il piano \vec{b}, \vec{n} , si dice piano normale (perpendicolare alla tangente). Il piano \vec{t}, \vec{b} , si dice piano rettificante (perpendicolare alla normale principale). Possiamo, ora dimostrare che il vettore $d\vec{b}/ds$ è parallelo ad \vec{n} . Infatti, derivando la relazione:

$$\vec{b}^2 = 1$$

troviamo:

$$\vec{b} \times \frac{d\vec{b}}{ds} = 0$$

che ci dice che $d\vec{b}/ds$ è perpendicolare a \vec{b} , giace, cioè, nel piano \vec{t}, \vec{n} . D'altra parte, derivando la prima delle (1.46) e tenendo presente la (1.44), troviamo:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} + \frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} = \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds}$$

che ci dice che $d\vec{b}/ds$ è perpendicolare a \vec{t} e giace, dunque, nel piano \vec{b}, \vec{n} . Concludiamo che $d\vec{b}/ds$ è parallelo ad \vec{n} e, quindi, essendo T uno scalare conveniente, si potrà scrivere:

$$\vec{n} \propto \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n} \quad (1.47)$$

T si dice raggio di torsione della curva C ($1/T$ si dice torsione). Derivando la relazione

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t} \quad (1.48)$$

e tenendo presente la (1.44) e la precedente, si trova:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n} \wedge \vec{t} + \frac{1}{\rho} \vec{b} \wedge \vec{n},$$

ma si ha:

$$\vec{n} \wedge \vec{t} = -\vec{b}; \quad \vec{b} \wedge \vec{n} = -\vec{t}$$

e, così, troviamo

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{b} - \frac{1}{\rho} \vec{t} \quad (1.49)$$

Le formule (1.44) e (1.49) son dovute a Frenet. Esse, insieme alla (1.44), permettono di esprimere le derivate dei coseni di direzione della tangente (α, β, γ) , della normale (λ, μ, ν) e della binormale (ℓ, m, n) , per mezzo di queste stesse quantità, e dei raggi di curvatura e di torsione. Prendendo, infatti, le componenti di (1.44), (1.47) e (1.49) si trova

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \lambda; \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{1}{\rho} \alpha - \frac{1}{T} \ell; \quad \frac{d\ell}{ds} = \frac{1}{T} \lambda, \quad (1.50)$$

e formule analoghe per gli altri assi.

Capitolo 2

CINEMATICA DEL PUNTO

2.1 *Calcolo della traiettoria di un punto mobile*

Sia data la posizione del punto mediante le sue coordinate in funzione del tempo, rappresentate dalle funzioni scalari:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Eliminando t dalle precedenti, si possono ottenere due relazioni fra x, y, z ,

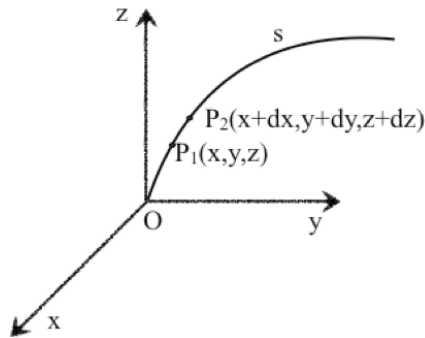


Figura 2.1: La traiettoria di un punto P

del tipo:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0$$

che mi danno l'equazione della traiettoria. Date, ora, le (2.1), bisogna cercare di determinare la lunghezza s dello spazio (in generale curvilineo) percorso dal punto P nell'intervallo tra t_0 e t , e determinare, poi, l'equazione della traiettoria e l'equazione del moto. Considerando, dunque l'arco $s = \overline{OP}$, dividiamo in n piccoli intervalli, e congiungiamo con segmenti

gli estremi di questi. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, la somma dei lati della poligonale inscritta o circoscritta all'arco, coincide con l'arco stesso. Dato, quindi, un arco di curva qualsiasi, avremo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

ed integrando da P_1 a P_2 per ottenere s :

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} dt$$

Più generalmente, siano le equazioni che ci danno le coordinate del punto, funzioni di un parametro p qualsiasi:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \\ z = z(p) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} dx = \dot{x}(p) dp \\ dy = \dot{y}(p) dp \\ dz = \dot{z}(p) dp \end{cases}$$

da cui, per ds , avremo:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp$$

ed integrando tra P_1 e P_2 ottengo:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp \quad (\text{funzione nota della } p).$$

Riprendendo il primo caso, essendo le coordinate del punto date in funzione del tempo t , avremo

$$\int ds = \int_{P_1}^{P_2} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

da cui eseguendo la quadratura: $s = s(t)$ (funzione nota della t) che è l'equazione cercata.

2.2 Determinazione della posizione del punto, data l'equazione della traiettoria e quella del moto

Inversamente, conoscendo l'equazione della traiettoria e quella del moto, si pone il problema di determinare la posizione del punto. Si abbia, dunque, una certa curva, riferita agli assi coordinati x, y, z , data mediante due funzioni di x, y, z :

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{o per} \quad \begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \\ z = z(p) \end{cases} \quad (2.2)$$

da cui ricavo

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp = F(p)$$

funzione nota di p . Ma siccome è data l'equazione del moto: $s = s(t)$, eguagliando le due espressioni di s , ottengo

$$s(t) = F(p)$$

da cui, infine, posso esprimere p in funzione del tempo:

$$p = \psi(t).$$

Sostituendo nelle (2.2), per p , questo valore, il problema è risolto.

Sia la posizione del punto P funzione del tempo, e sia la equazione di moto:

$$s = s(t).$$

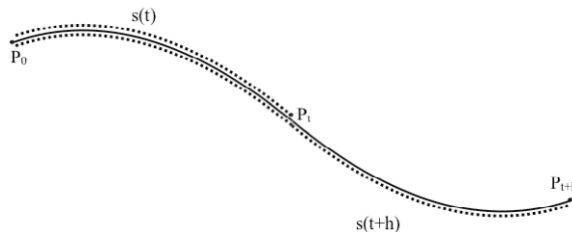


Figura 2.2: Le traiettorie $s(t)$ e $s(t+h)$ di P

Considerando una traiettoria qualsiasi, e seguendo su di essa un verso, resteranno evidentemente determinati gli spazi, $s(t)$ ed $s(t+h)$, percorsi rispettivamente nel tempo t e nel tempo $t+h$. Il rapporto $\widehat{P_t P_{t+h}}/h = V_m$ si dice velocità media nell'intervallo di tempo h . Quando sia data, dunque, la equazione della traiettoria e quella del moto, avremo rispettivamente, per

$$T = \begin{cases} t \\ t+h \end{cases} :$$

$$V_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$, il precedente rapporto (incrementale di $s(t)$), diventa la derivata prima della funzione $s(t)$. Cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \dot{s}(t) = v.$$

Questo limite si dice velocità istantanea nel punto P_t . Con notazione equivalente, sarà:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

In particolare, nel moto uniforme la velocità è costante. Dalla formula precedente, in questo caso, ricaviamo

$$v dt = ds$$

e, integrando:

$$s = vt + C.$$

Nel moto vario, si presenta il problema di determinare lo spazio conoscendo il valore della funzione velocità per ogni valore del tempo. Sarà:

$$v = v(t), \text{ e siccome } v = \frac{ds}{dt}$$

sarà anche: $v(t) = ds/dt$ da cui

$$s = \int v(t) dt + C.$$

Se sappiamo che per $t = t_0$ è $s = s_0$, si può subito determinare la costante C .

2.3 Determinazione del tempo, data la velocità in funzione dello spazio

Sia data la velocità come funzione dello spazio. Sarà:

$$v = v(s) \text{ e poiché } v = \frac{ds}{dt}$$

sarà ancora: $v(s) = ds/dt$ da cui

$$\frac{ds}{v(s)} = dt \text{ ed integrando } t = \int \frac{ds}{v(s)} + C.$$

Con ciò, conoscendo il valore della velocità per ogni valore della variabile spazio, possiamo determinare il tempo.

Passando a considerare il caso più generale in cui la velocità sia, insieme, funzione dello spazio e del tempo, avremo $v = v(s, t)$ da cui

$$v(s, t) = \frac{ds}{dt}.$$

Questa equazione differenziale, del primo ordine, ammetterà, generalmente, un integrale in cui figurerà una costante arbitraria; cioè, lo spazio ci sarà dato come funzione del tempo e di essa costante:

$$s = s(t, C);$$

e se, per $t = t_0$ è $s = s_0$, sostituendo nella precedente, otteniamo:

$$s_0 = s(t_0, C),$$

ove tutto è noto all'infuori della C che si può così determinare.

2.4 Velocità vettoriale

La velocità, finora considerata, è uno scalare. Maggiore importanza ha la velocità vettoriale. Scegliamo un arco qualsiasi di traiettoria, e fissiamo su di esso un verso e le posizioni assunte da un punto P ai tempi t e $t+h$, rispettivamente. Indicando con P_1 e P_2 queste due posizioni, uniamole con un segmento orientato da P_1 a P_2 ; questo segmento, che risulta un vero e

proprio vettore, dicesi spostamento relativo all'intervallo $(t, t + h)$ di tempo considerato. Passiamo a considerare il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_2 - P_1}{h} = V,$$

esso si dice velocità vettoriale.

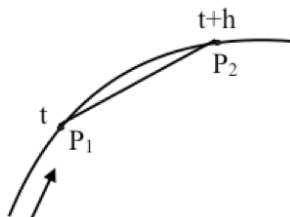


Figura 2.3: La velocità vettoriale.

Osserviamo, anzitutto, che, col tendere di P_2 a P_1 , il vettore $P_2 - P_1/h$ tende ad assumere la posizione della tangente, in P_1 , alla traiettoria. Questo per la direzione, quanto, poi, al senso, è sempre quello del moto. Supponiamo, infatti, p.es., $h < 0$; allora il verso $\vec{P_1 P_2}$ sarà opposto a quello del moto. Ma siccome h è negativo, il vettore $P_2 - P_1/h$ avrà verso opposto al vettore $P_2 - P_1$, e quindi coincidente col verso del movimento; se, invece, $h > 0$, allora $P_2 - P_1$ ha verso concordante col verso del moto, e $P_2 - P_1/h$ anche, perchè h è positivo.

Riguardo alla grandezza, si osservi che:

$$\frac{|P_2 - P_1|}{h} = \frac{|P_2 - P_1|}{\text{arc}P_1P_2} \cdot \frac{\text{arc}P_1P_2}{h}$$

e, passando al limite, per $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{\text{arc}P_1P_2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{arc}P_1P_2}{h}$$

Il limite del primo fattore a secondo membro (essendo esso il quoziente tra la corda e l'arco da essa sotteso) col tendere di h (e, conseguentemente, dell'arco) a zero, tende all'unità; il secondo fattore, poi, ha per limite la velocità istantanea nel punto P_1 , cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{h} = v \text{ (velocità istantanea lungo la traiettoria)}$$

2.5 Determinazione delle componenti della velocità vettoriale

Per determinare le componenti della velocità vettoriale, osserviamo che le componenti del vettore $P_2 - P_1$, secondo i tre assi coordinati, sono dati dalle differenze tra le analoghe coordinate dei due punti. Supponendo, cioè, che le coordinate di un punto generico P , sulla traiettoria, siano date da:

$$P \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t); \end{cases}$$

nel nostro caso avremo

$$P_1 \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t); \end{cases} \quad \text{e} \quad P_2 \equiv \begin{cases} x = x(t+h) \\ y = y(t+h) \\ z = z(t+h); \end{cases} \quad (2.3)$$

epperò la componente secondo l'asse x , della velocità, sarà:

$$V_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \quad (2.4)$$

e analogamente per V_y e V_z :

$$V_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.5)$$

Cioè: le componenti della velocità vettoriale, in un punto qualsiasi della traiettoria, sono date dalle **derivate prime, rispetto al tempo, delle coordinate del punto.**

In altro modo, scelta ancora la traiettoria, due punti P_1 e P_2 , su di essa e un'origine fissa, qualsiasi, O , avremo:

$$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O),$$

Osserviamo che il vettore generico, $P_i - O$, risulta funzione della posizione P_i , ed essendo questa, a sua volta, funzione del tempo, tale risulta anche $P_i - O$. Cioè, nel nostro caso:

$$S(t) = P_1 - O \quad ; \quad S(t+h) = P_2 - O$$

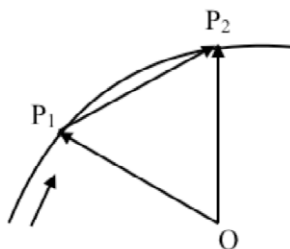


Figura 2.4: Illustrazione della formula precedente.

e quindi per la notazione adottata, avremo:

$$V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_2 - P_1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \dot{S}(t) = \frac{dS}{dt}.$$

Osserviamo, ora, che, se per O si prende l'origine delle coordinate, le componenti di S sono, x, y e z ; dalla precedente ricaviamo, dunque, subito le componenti di V :

$$V = \frac{dS}{dt} \equiv \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \\ V_z = \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

2.6 Data la V mediante le sue componenti, determinare le coordinate del punto

Si presenta, ora, il problema inverso: nota, cioè, la velocità vettoriale V , e, conseguentemente, le funzioni scalari V_x, V_y e V_z , sue componenti, risalire alle coordinate del punto in funzione del tempo. Sia dunque:

$$V = V(t) \equiv \begin{cases} V_x = V_x(t) \\ V_y = V_y(t) \\ V_z = V_z(t). \end{cases}$$

Sapendo che

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt},$$

e, integrando, otteniamo immediatamente:

$$P = V \equiv \begin{cases} x = \int V_x(t) dt + C_1 \\ y = \int V_y(t) dt + C_2 \\ z = \int V_z(t) dt + C_3. \end{cases}$$

Se per $t = t_0$ si conoscono i tre corrispondenti valori: x_0, y_0 e z_0 , delle coordinate, si possono determinare le tre costanti.

Si abbia, ora, il caso più generale in cui V sia funzione del tempo e della posizione, cioè della t e delle tre coordinate (x, y, z) del punto. Sarà:

$$V = V(t, x, y, z),$$

e per le componenti:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_x(t, x, y, z)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = V_y(t, x, y, z)$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = V_z(t, x, y, z).$$

Questo è un sistema di tre equazioni differenziali; integrandolo, si troveranno, in generale, x, y e z espressi in funzione del tempo e di tre costanti arbitrarie:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3)$$

$$y = y(t, C_1, C_2, C_3)$$

$$z = z(t, C_1, C_2, C_3)$$

in cui sono da determinarsi le tre costanti C_1, C_2 e C_3 . Se sappiamo che, per $t = t_0$, è anche: $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, gli integrali precedenti divengono, per $t = t_0$:

$$x_0 = x(t_0, C_1, C_2, C_3)$$

$$y_0 = y(t_0, C_1, C_2, C_3)$$

$$z_0 = z(t_0, C_1, C_2, C_3) ;$$

In queste espressioni, tutto è noto ad eccezione delle tre costanti che si possono così determinare.

Sia, p.es.:

$$V = V(x, y, z, t) = \text{cost.},$$

avremo allora

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad x = V_x t + C_1$$

ed analogamente per la y e la z . Siccome, nell'espressione di ognuna delle coordinate compare una costante, per determinarla, supponiamo di sapere che per:

$$t = t_0, \quad \text{sia anche:} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0. \end{cases}$$

Inoltre, osserviamo che, conoscendo le tre componenti della V , ne conosciamo la grandezza:

$$|V| = v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

da cui possiamo ricavare i tre coseni direttori (α, β, γ) della traiettoria:

$$\alpha = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \quad \beta = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \quad \gamma = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}.$$

Osserviamo che, date le componenti, la grandezza di V si può determinare anche in altro modo mediante la relazione

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

da cui:

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

e

$$|V| = \frac{ds}{dt} = v.$$

Sia dato, ora, il moto di un punto P in un piano π , (x, y) , e sia data V mediante le sue componenti V_x e V_y (la V_z è nulla). Supponiamo che le componenti di V abbiano le seguenti espressioni

$$V \equiv \begin{cases} V_x = -\omega y \\ V_y = \omega x \\ V_z = 0. \end{cases}$$

Sapendo che $V_x = dx/dt$, ed analogamente per y e z , ricaviamo immediatamente:

$$-\omega y = \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

$$\omega x = \frac{dy}{dt} \quad (2.7)$$

$$0 = \frac{dz}{dt} \quad (2.8)$$

Osserviamo anzitutto, che, essendo $dz/dt = 0$, sarà evidentemente z eguale a una costante C_1 .

Derivando, poi, la (2.6) rispetto a t , avremo:

$$-\omega \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

e sostituendo il valore di dy/dt dato dalla (2.7), portando tutto a primo membro e cambiando di segno:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (2.9)$$

Per integrare quest'equazione differenziale del secondo ordine, poniamo:

$$x = e^{\alpha t}$$

dove, poi, cercheremo di determinare il valore della costante incognita α . Derivando rispetto a t otteniamo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t},$$

e derivando ancora:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Sostituendo nella (2.9):

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0,$$

e, dividendo per $e^{\alpha t} \neq 0$, avremo:

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha = \pm i\omega,$$

perciò, dato il doppio segno, si avranno i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{i\omega t}, \quad x_2 = e^{-i\omega t}.$$

Facendo una combinazione lineare di questi due integrali particolari, otterremo l'integrale generale:

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t},$$

dove A_1 e A_2 sono costanti da determinarsi; per eliminare, poi, gli immaginari, applichiamo le formule di Eulero, si avrà:

$$\begin{aligned} x &= A_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + A_2 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] \\ &= (A_1 + A_2) \cos(\omega t) + i(A_1 - A_2) \sin(\omega t) \\ &= C_2 \cos(\omega t) + C_3 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

dove C_2 e C_3 sono delle nuove costanti. Per la y , sostituendo il precedente valore della x nella (2.6), avremo:

$$\begin{aligned} -\omega y &= -\omega C_2 \sin(\omega t) + \omega C_3 \cos(\omega t) \\ \omega y &= C_2 \omega \sin(\omega t) - C_3 \omega \cos(\omega t) \end{aligned}$$

e infine:

$$y = C_2 \sin(\omega t) - C_3 \cos(\omega t)$$

Per determinare le 3 costanti, C_1 , C_2 e C_3 , bisogna, al solito, conoscere, per un dato valore di t , i corrispondenti valori di x , y e z . Se, ad esempio, per $t = 0$, è $x = a$, $y = 0$ e $z = 0$, risulta

$$C_1 = 0, \quad C_2 = a, \quad C_3 = 0$$

Determinate, così, le costanti, i valori di x , y e z sono:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = a \sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases} .$$

da cui, quadrando e sommando le prime due, per eliminare t , si perviene all'equazione della traiettoria:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

che ci rappresenta un cerchio di raggio a nel piano xy .

2.7 Accelerazione

Se si considera la velocità vettoriale di un punto su una traiettoria, avviene generalmente che il valore della V vari e, trattandosi di un vettore, potrà evidentemente variare in grandezza e orientazione. Se, dunque, la V è data in funzione del tempo, $V = V(t)$, si definisce accelerazione A nell'istante t il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = \frac{dV}{dt} = A$$

cioè la derivata della velocità vettoriale rispetto al tempo. Si noti bene che l' A è data dalla derivata prima della velocità vettoriale e non da quella della velocità lungo la traiettoria.

2.8 Accelerazione centripeta

Consideriamo, come esempio, il moto circolare uniforme, moto in cui la velocità ha, in ogni istante, grandezza costante, ma varia in direzione.

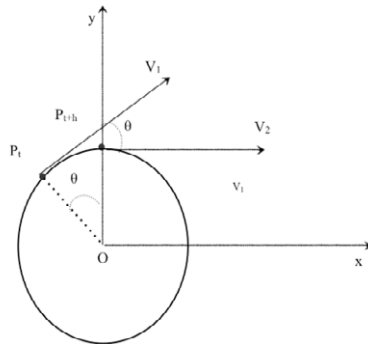


Figura 2.5: Accelerazione centripeta.

La nostra velocità sarà, dunque rappresentata da un vettore che ha la direzione della tangente nel punto, e grandezza costante. Sia θ l'angolo formato dalle direzioni della velocità ad un istante generico t e a uno successivo $t+h$.

Se noi riportiamo i due vettori V_1 e V_2 (valori della V al tempo t e al tempo $t+h$, rispettivamente) a partire da una comune origine comune O ; l'accelerazione media nell'intervallo di tempo da t a $t+h$, ci sarà data in

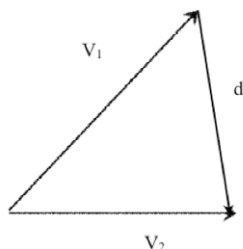


Figura 2.6: La differenza tra le due velocità V_1 e V_2 .

grandezza e direzione da d/h , essendo d il vettore differenza dei vettori V_2 e V_1 . Osserviamo, ora, che per valori molto piccoli di θ possiamo supporre V_1 e V_2 ortogonali a d , e se, inoltre, indichiamo con v la grandezza comune di V_1 e V_2 , essendo

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{vh}{R} \quad (R = \text{raggio del cerchio}),$$

il rapporto incrementale della V ci sarà dato da

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d}{h} = \frac{v\theta}{R} = \frac{v \frac{vh}{R}}{h} = \frac{v^2}{R}. \quad (2.10)$$

Si noti che, data la piccolezza di θ , abbiamo posto approssimativamente:

$$\theta = \sin \theta,$$

e così abbiamo ricavato il valore di d dal triangolo (supposto, approssimativamente rettangolo in $\widehat{V_1 d}$ ed in $\widehat{V_2 d}$) costruito sui due vettori V_1 e V_2 .

Passando al limite, nella (2.10), per $\Delta t = h \rightarrow 0$, otterremo infine:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v\theta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R} = |A|.$$

Abbiamo, in generale, definita l'accelerazione come derivata della velocità vettoriale V . Ora le componenti di V sono:

$$V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z};$$

le componenti di A si otterranno derivando queste componenti rispetto a t . Avremo

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x} \\ A_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y} \\ A_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}. \end{cases}$$

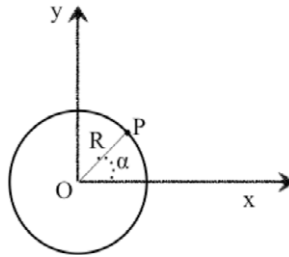


Figura 2.7: Il punto P sul cerchio di raggio R .

Tornando all'esempio precedente, supponiamo che sia data la circonferenza; scelti, per assi x e y , due diametri ortogonali, detta v la velocità sulla traiettoria, α l'angolo compreso tra il raggio, corrispondente al punto generico P , e l'asse x , avremo:

$$\alpha = \frac{vt}{R},$$

e, per le coordinate del punto, i valori:

$$P \equiv \begin{cases} x = R \cos \frac{vt}{R} \\ y = R \sin \frac{vt}{R}. \end{cases}$$

Per ottenere le componenti della V , deriviamo, rispetto a t , la precedente:

$$V \equiv \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -R \frac{v}{R} \sin \frac{vt}{R} = -v \sin \frac{vt}{R} \\ V_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{v}{R} \cos \frac{vt}{R} = v \cos \frac{vt}{R}. \end{cases}$$

e, per trovare A , derivando queste ultime rispetto a t , abbiamo:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{v^2}{R} \cos \frac{vt}{R} \\ A_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{v^2}{R} \sin \frac{vt}{R}. \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando

$$A^2 = \frac{v^4}{R^2} \quad \text{e infine} \quad |A| = \frac{v^2}{R}.$$

Da qui si riconosce agevolmente come l' A sia normale alla direzione della velocità ovvero alla tangente alla traiettoria nel punto; coincida, quindi, in direzione, col raggio, ed abbia verso costantemente volto al centro.

2.9 Determinare le coordinate del punto, data l'accelerazione

Abbiamo risolto il problema di determinare l'accelerazione essendo noto il movimento; si presenta, ora, il problema inverso; determinare, cioè, le coordinate del punto conoscendo il valore di A . Sia $A = A(t)$, sono note, allora, le tre funzioni scalari:

$$\begin{cases} A_x = A_x(t) \\ A_y = A_y(t) \\ A_z = A_z(t) \end{cases} \quad \text{ma è} \quad \begin{cases} A_x(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ A_y(t) = \frac{d^2 y}{dt^2} \\ A_z(t) = \frac{d^2 z}{dt^2}, \end{cases}$$

sarà quindi anche, limitandoci a considerare la sola componente rispetto all'asse x (analogamente si procederebbe per le altre due):

$$A_x(t)dt = d\frac{dx}{dt},$$

da cui, integrando:

$$\frac{dx}{dt} = \int A_x(t)dt + C_1. \quad (2.11)$$

Siamo, così, risaliti dall'accelerazione alla velocità vettoriale; risaliamo, ora, da questa alle coordinate del punto. Moltiplicando per dt ambo i membri

della (2.11), si ottiene

$$dx = \left[\int A_x(t) dt + C_1 \right] dt, \quad (2.12)$$

e integrando quest'ultima, e le due analoghe, si ha infine:

$$\begin{cases} x = \int [\int A_x(t) dt] + C_1 t + C_2 \\ y = \int [\int A_y(t) dt] + C_3 t + C_4 \\ z = \int [\int A_z(t) dt] + C_5 t + C_6 \end{cases} \quad (2.13)$$

Figurano, in questi integrali, sei costanti arbitrarie e, per determinarle, occorreranno, quindi, sei condizioni. Se, p.es., ci son noti, per $t = t_0$, la posizione e la velocità iniziale del punto, cioè i valori: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, noi, dalle (2.11), potremo ottenere i valori di C_1, C_2 e C_3 , e, sostituendo questi valori nella (2.13) (posto sempre $t = t_0$) potremo ricavare anche C_4, C_5 e C_6 .

Consideriamo, ora, il caso più generale in cui A sia funzione del tempo, della posizione e della velocità:

$$A = A(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Avremo:

$$A \equiv \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = A_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = A_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = A_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni differenziali, ammetterà tre integrali generali della forma:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \quad (2.14)$$

Se, al solito, conosco, per $t = t_0$, i sei valori: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, derivando le tre espressioni precedenti, ho:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases}$$

che, con le (4.6) prime, quando si ponga $t = t_0$, mi permettono di ricavare i valori delle sei incognite.

Le sei condizioni che dicemmo esser necessarie per la determinazione delle costanti, possono anche esser date in modo diverso; cioè, invece di dare, per un determinato valore della t , le coordinate del punto e le corrispondenti derivate prime (componenti della velocità), si possono dare, per due diversi valori di t , le corrispondenti coordinate del punto. P. es., per i due valori del tempo: t_0 e t_1 , dovranno esser note: $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$.

Esercizio - Siano le componenti della A costanti, e cioè:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \text{cost.} \\ A_y = \text{cost.} \\ A_z = \text{cost.} \end{cases} \quad \text{avrò} \quad \begin{cases} A_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ A_y = \frac{d^2y}{dt^2} \\ A_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \end{cases}$$

che posso, identicamente scrivere:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \\ A_y = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \\ A_z = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Integrando ottengo la velocità vettoriale:

$$V \equiv \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A_x t + C_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = A_y t + C_2 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = A_z t + C_3, \end{cases} \quad (2.15)$$

da cui moltiplicando per dt :

$$\begin{cases} dt(A_x t + C_1) = dx \\ dt(A_y t + C_2) = dy \\ dt(A_z t + C_3) = dz, \end{cases} \quad (2.16)$$

ed, infine, integrando ancora una volta:

$$P \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} A_x t^2 + C_1 t + C_4 \\ y = \frac{1}{2} A_y t^2 + C_2 t + C_5 \\ z = \frac{1}{2} A_z t^2 + C_3 t + C_6, \end{cases} \quad (2.17)$$

Se, ora, per $t = t_0$, è anche:

$$V \equiv \begin{cases} V_x = V_{0x} \\ V_y = V_{0y} \\ V_z = V_{0z} \end{cases} \quad \text{e} \quad P \equiv \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

ricavo i valori delle sei costanti ponendo, nelle (2.15), $t = t_0$, ed ho:

$$C_1 = V_{0x}, \quad C_2 = V_{0y}, \quad C_3 = V_{0z},$$

e, ponendo analogamente, nelle (2.17), per x, y e z i valori che queste coordinate assumono, per $t = t_0$, ottengo

$$C_4 = x_0, \quad C_5 = y_0, \quad C_6 = z_0.$$

Supponiamo, in particolare, che l'accelerazione abbia la direzione dell'asse delle x , ($A_y = A_z = 0$), che la posizione iniziale sia l'origine delle coordinate ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$) e che la velocità sia contenuta nel piano xy ed abbia, quindi, componenti $V_{0x}, V_{0y}, 0$. Si trova allora:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_5 = C_6 = 0 \quad \text{e} \\ C_1 &= V_{0x}, \quad C_2 = V_{0y}, \quad C_3 = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (2.17) si trova allora:

$$P \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} A_x t^2 + V_{0x} t \\ y = V_{0y} t \\ z = 0 \end{cases}$$

Eliminando il tempo, si trova l'equazione della traiettoria:

$$x = \frac{\frac{1}{2} A_x}{V_{0y}^2} y^2 + \frac{V_{0x}}{V_{0y}} y$$

che è l'equazione di una parabola passante per l'origine.

Consideriamo il caso particolare dell'accelerazione di gravità, accelerazione costante e diretta verso il basso. Scelta la terna di assi x, y, z , se immaginiamo l'asse z parallelo alla verticale, avremo per A :

$$A \equiv \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = -g \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases},$$

da cui ricaviamo immediatamente:

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = C_2 \quad (2.18)$$

mentre, per z , abbiamo:

$$-g = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\dot{z}}{dt},$$

da cui, moltiplicando per dt ed integrando:

$$\dot{z} = -gt + C_3,$$

e, supponendo che per $t = 0$, sia anche:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad (2.19)$$

e che la velocità del punto giaccia nel piano zx , dalle (2.18) precedenti ricaviamo (ricordando che, giacendo la V nel piano zx , sarà $V_{0y} = 0$):

$$V_{0x} = C_1, \quad V_{0y} = 0, \quad V_{0z} = C_3$$

e:

$$\begin{aligned} x &= \int V_{0x} dt + C_4 = V_{0x}t + C_4 \\ z &= \int V_{0z} dt + C_5 = - \int (gt + C_3) dt + C_5, \quad \text{cioè} \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_5. \end{aligned}$$

Ma per la posizione (2.19) (per $t = 0$) otteniamo:

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0,$$

come si può facilmente verificare ponendo, nelle rispettive espressioni, $t = 0$; e, conseguentemente, ponendo:

$$x = x_0 = 0, \quad y = y_0 = 0, \quad z = z_0 = 0,$$

ottengo, per le coordinate del mobile:

$$P \equiv \begin{cases} x = V_{0x}t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + V_{0z}t \end{cases}$$

Dalla prima delle precedenti ricaviamo, per t , il valore:

$$t = \frac{x}{V_{0x}}$$

che, sostituito nella seconda, ci dà per z

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_{0x}^2} + \frac{V_{0z}}{V_{0x}}x,$$

equazione, questa, che, palesemente, rappresenta una parabola nel piano xz .

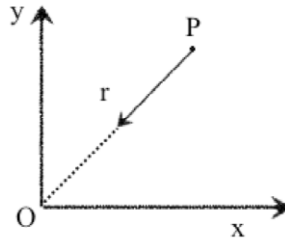


Figura 2.8: Il punto P con accelerazione funzione della distanza r dal punto O .

Considerando sempre il moto, su di un piano (xy) , si abbia una accelerazione, la cui grandezza $|A|$ sia funzione della distanza del punto (cui la A si riferisce) dall'origine, e sia diretta verso l'origine; supponiamo precisamente che sia:

$$|A| = \kappa r \quad \text{dove} \quad r = \overline{OP}$$

Se indichiamo con α e β i coseni degli angoli che r fa con gli assi, avremo, per le coordinate di P :

$$P \equiv \begin{cases} x = r\alpha \\ y = r\beta \end{cases}$$

da cui:

$$\alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta = \frac{y}{r},$$

quindi, per A_x ed A_y , avremo

$$A_x = -\kappa x, \quad A_y = -\kappa y \quad (2.20)$$

essendo A diretta verso l'origine. Identicamente:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa y,$$

La prima delle equazioni precedenti. si può scrivere:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa x = 0, \quad (2.21)$$

e ponendo, poi, $x = e^{\alpha t}$ e derivando due volte, otteniamo:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

che, sostituite nella (2.21), ci danno:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \kappa e^{\alpha t} = 0,$$

e, divisa questa espressione per $e^{\alpha t} (\neq 0)$, otterremo:

$$\alpha^2 + \kappa = 0$$

da cui: $\alpha = \pm \sqrt{-\kappa} = \pm i\sqrt{\kappa}$.

Abbiamo, dunque, i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{i\sqrt{\kappa}t} \quad x_2 = e^{-i\sqrt{\kappa}t}. \quad (2.22)$$

Facendo una combinazione lineare di essi, con costanti da determinarsi, otteniamo l'integrale generale:

$$x = A_1 e^{i\sqrt{\kappa}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\kappa}t}.$$

Applicando le formule di Eulero:

$$\begin{aligned} x &= A_1 [\cos(\sqrt{\kappa}t) + i \sin(\sqrt{\kappa}t)] + A_2 [\cos(\sqrt{\kappa}t) - i \sin(\sqrt{\kappa}t)] \\ &= (A_1 + A_2) \cos(\sqrt{\kappa}t) + i(A_1 - A_2) \sin(\sqrt{\kappa}t). \end{aligned}$$

Posto

$$A_1 + A_2 = C_1 \quad \text{ed} \quad i(A_1 - A_2) = C_2,$$

avremo, infine:

$$x = C_1 \cos(\sqrt{\kappa} t) + C_2 \sin(\sqrt{\kappa} t). \quad (2.23)$$

In modo perfettamente analogo, si ottiene:

$$y = C_3 \cos(\sqrt{\kappa} t) + C_4 \sin(\sqrt{\kappa} t). \quad (2.24)$$

Al solito, per determinare le quattro costanti, se, per $t = t_0$, è:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \end{cases}$$

ponendo, nella (2.23) e (2.24), per x ed y , i valori x_0 e y_0 e $t = 0$ ricaviamo

$$C_1 = x_0, \quad C_3 = y_0.$$

Deriviamo, poi, la (2.23) e (2.24):

$$\begin{cases} \dot{x} = -C_1 \sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa} t) + C_2 \sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa} t) \\ \dot{y} = -C_3 \sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa} t) + C_4 \sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa} t), \end{cases}$$

e ponendo, in quest'ultime, $t = 0$ e perciò, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, ricaviamo, infine:

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\kappa}}, \quad C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{\kappa}}. \quad (2.25)$$

Riprendendo la (2.23), osserviamo che essa può scriversi:

$$x = A \cos(\sqrt{\kappa} t - \alpha)$$

dove A e α sono costanti da determinarsi. Infatti, sviluppando, avremo:

$$x = A (\cos(\sqrt{\kappa} t) \cos \alpha + \sin(\sqrt{\kappa} t) \sin \alpha) \quad (2.26)$$

Identificando quest'ultima con la (2.23), troviamo:

$$(*) \quad A \cos \alpha = C_1, \quad A \sin \alpha = C_2 \quad (**) \quad (2.27)$$

da cui

$$A^2 = C_1^2 + C_2^2 \quad \text{e} \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

e dividendo la (**) per la (*):

$$\tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}$$

Si procede analogamente per la y , soltanto che, invece delle costanti A e α , ne compariranno due nuove B e β . Riprendendo gli integrali generali sotto la forma:

$$x = A \cos(\sqrt{\kappa} t - \alpha) \quad (2.28)$$

$$y = B \cos(\sqrt{\kappa} t - \beta) \quad (2.29)$$

poniamo:

$$\varphi = \sqrt{\kappa} t - \alpha \quad (2.30)$$

e, aggiungendo e togliendo α all'argomento che compare nella (2.28) precedente, avremo:

$$y = B \cos(\sqrt{\kappa} t - \alpha + \alpha - \beta)$$

e, per la (2.29):

$$y = B \cos(\varphi + \alpha - \beta)$$

di guisa che la (2.28) e la (2.29) divengono:

$$x = A \cos \varphi \quad (2.31)$$

$$y = B [\cos \varphi \cos(\alpha - \beta) - \sin \varphi \sin(\alpha - \beta)] \quad (2.32)$$

Ma, evidentemente, dalla (2.31), ricaviamo:

$$\cos \varphi = \frac{x}{A} \quad \text{e quindi:} \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Sostituendo nella (2.32), per $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$, i precedenti valori:

$$\begin{aligned} y &= B \left(\frac{x}{A} \cos(\alpha - \beta) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta) \right) \\ &= \frac{B}{A} x \cos(\alpha - \beta) - B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Separiamo i termini nel modo seguente:

$$y - \frac{B}{A} x \cos(\alpha - \beta) = -B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta)$$

ed elevando al quadrato i due membri:

$$\begin{aligned}
 y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2 \cos^2(\alpha - \beta) - 2\frac{B}{A}xy \cos(\alpha - \beta) &= \\
 = B^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \sin^2(\alpha - \beta) & \\
 = B^2 \sin^2(\alpha - \beta) - \frac{B^2}{A^2}x^2 \sin^2(\alpha - \beta), &
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

e portando $-\frac{B^2}{A^2}x^2 \sin^2(\alpha - \beta)$ al primo membro:

$$\begin{aligned}
 y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2 [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] - 2\frac{B}{A}xy \cos(\alpha - \beta) &= \\
 = B^2 \sin^2(\alpha - \beta). &
 \end{aligned}$$

Semplificando e dividendo ambo i membri per B^2 , avremo:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2}{AB}xy \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta),$$

equazione, questa, che mi rappresenta un'ellisse col centro nell'origine. Moltiplicando per A^2B^2 otteniamo ancora,

$$B^2x^2 + A^2y^2 - 2ABxy \cos(\alpha - \beta) = A^2B^2 \sin^2(\alpha - \beta).$$

Poniamo, in particolare, in quest'ultima relazione, $A = 0$; allora essa si riduce alla:

$$B^2x^2 = 0$$

equazione che mi rappresenta l'asse delle y (essendo, per ipotesi, il moto nel piano xy) contato due volte, poiché l'ellisse citata degenera in due rette sovrapposte.

Ritorniamo, ora, al caso generale in cui l'ellisse individuata non degeneri. Sia P un punto generico mobile sulla traiettoria; la sua ascissa e la sua ordinata sono date come funzioni del tempo dai due integrali, già precedentemente considerati:

$$\begin{cases} x = A \cos(\sqrt{\kappa}t - \alpha) \\ y = B \cos(\sqrt{\kappa}t - \beta) \end{cases}
 \tag{2.34}$$

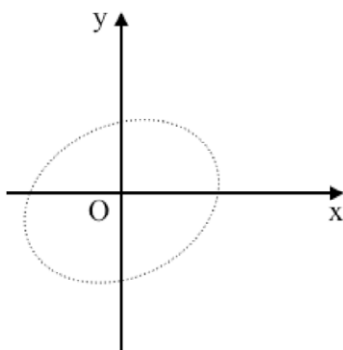


Figura 2.9: L'ellisse del testo.

Osservo, anzitutto, che, essendo A una costante, la grandezza $|x|$ dell'ascissa varierà al variare del coseno dell'argomento $\sqrt{\kappa}t - \alpha$. Evidentemente, questo coseno sarà sempre compreso tra i valori 1 e -1, e ne possiamo, anzitutto dedurre che:

$$|x| \leq A$$

Possiamo, ancora, dedurre per il segno a seconda che sia $\cos(\sqrt{\kappa}t - \alpha)$ maggiore o minore dello zero. Il valore di x varierà dunque da $+A$ a $-A$, a seconda che il coseno vari da $+1$ a -1 , passando per tutti i valori intermedi.

Se noi consideriamo l'andamento della x , considerata come funzione del tempo t (essendo costanti: A , $\sqrt{\kappa}$ ed α), portando in ascisse i valori di t ed in ordinate i corrispondenti valori di x , avremo che la curva che rappresenta la nostra funzione, sarà evidentemente una sinusoidale; il valore massimo dell'ordinata sarà $+A$, il minimo $-A$.

L'aumento che deve subire l'argomento, perchè la funzione descriva un periodo, è dato da $2\pi/\sqrt{\kappa}$; il periodo sarà perciò: $T = 2\pi/\sqrt{\kappa}$, e, conseguentemente, la frequenza sarà: $\nu = \sqrt{\kappa}/2\pi$, essendosi definita, come frequenza, l'inverso del periodo. Ricavo immediatamente:

$$2\pi\nu = \sqrt{\kappa}.$$

Analogamente si può procedere, per la y , considerando l'integrale:

$$y = B \cos(\sqrt{\kappa}t - \beta).$$

Anche qui si trova che il valore della funzione varia tra un minimo $-B$ ed un massimo $+B$.

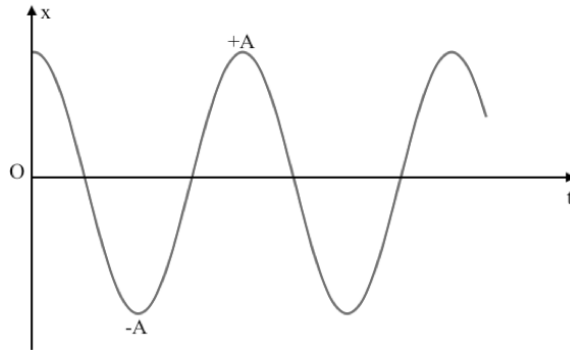


Figura 2.10: Moto sinusoidale.

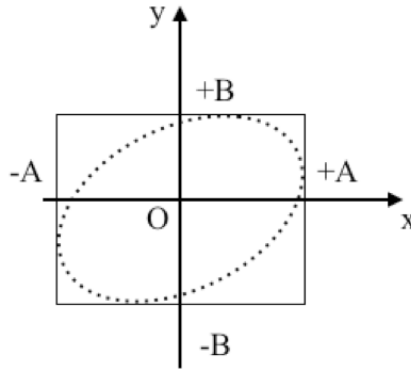


Figura 2.11: Moto ellittico.

Scegliendo, dunque, i due assi cartesiani, e segnando sull'asse delle x la distanza $\overline{O+A}$ ed $\overline{O-A}$, e, analogamente, segnando, sull'asse y le distanze $\overline{O+B}$ ed $\overline{O-B}$, ne segue che la traiettoria sarà compresa in un rettangolo che ha per lati le distanze $\overline{-A+A}$ e $\overline{-B+B}$. Essa, è, nel caso più generale, un'ellisse; in particolare, sarà un cerchio quando: $A=B$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$. Venendo, poi, a considerare le costanti, α e β , che compaiono, rispettivamente, nell'integrale generale della x e nell'integrale generale della y , osserviamo che (essendo $\sqrt{\kappa}$ una costante), per un certo valore del tempo t sarà massimo il valore della funzione quando $\cos(\sqrt{\kappa} - \alpha)$, oppure $\cos(\sqrt{\kappa} - \beta)$, sarà uguale a $+1$, cioè quando l'argomento sarà nullo od uguale a $2k\pi$. Evidentemente,

basta considerare il caso in cui l'argomento sia nullo. Sia

$$\sqrt{\kappa} t_1 - \alpha = 0$$

da cui ricaviamo

$$t_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}$$

dove t_1 rappresenta il tempo trascorso dall'origine dei tempi, all'istante in cui la funzione assume il suo massimo valore. Segue che, essendo $\sqrt{\kappa}$ una costante, il valore di t_1 dipenderà dal valore di α e, a seconda che sia $\alpha >$, $=$, $<$ β (che compare nell'integrale generale della y), la x raggiungerà il suo massimo valore dopo, contemporaneamente o prima della y . S'intende, perciò, che la differenza tra α e β definisce il ritardo di fase di un moto rispetto all'altro.

Se poi, nella (2.28), è $\alpha = \beta$, essa si trasforma nella:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2}{AB}xy = 0$$

cioè:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

il che significa che l'equazione dell'ellisse si trasforma in quella di una retta diagonale del rettangolo precedentemente considerato. Ad un risultato analogo si perviene nel caso che sia:

$$\alpha - \beta = \pi$$

da cui

$$\sin(\alpha - \beta) = 0$$

con la differenza che la (2.28) diventerà (essendo: $\cos(\alpha - \beta) = -1$)

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2}{AB}xy = 0$$

e quindi:

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

ed anche quest'ultima equazione mi rappresenta una retta doppia che è un'altra diagonale del rettangolo.

2.10 *Moti centrali*

Si dicono moti centrali quei moti in cui esiste una accelerazione, diretta verso un punto fisso O , e funzione della distanza del punto, di cui si considera l'accelerazione, da O . Data una terna di assi cartesiani ortogonali, e data una accelerazione A , la cui grandezza sia espressa da:

$$|A| = f(r) \quad (r \text{ variabile} = \overrightarrow{OP})$$

e la cui direzione è quella del raggio vettore r che unisce P con l'origine O , ed il cui senso positivo è diretto verso l'origine stessa.

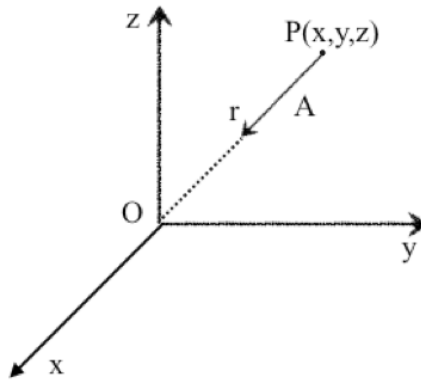


Figura 2.12: Moto centrale.

Indicando con x, y, z , le coordinate di P , avrò che i coseni direttori del vettore A saranno dati da

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r},$$

epperò:

$$A_x = -f(r) \frac{x}{r} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.35)$$

$$A_y = -f(r) \frac{y}{r} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.36)$$

$$A_z = -f(r) \frac{z}{r} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (2.37)$$

e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Vogliamo dimostrare che il moto si svolge in un piano. A tale scopo moltiplichiamo la (2.36) precedente per $-z$ e la (2.37) per y . Sommando membro a membro la (2.36) e la (2.37) così moltiplicate, otteniamo:

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0,$$

espressione, questa, che posso, identicamente, porre sotto la forma:

$$\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0. \quad (2.38)$$

Dalla (2.38) precedente segue:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1.$$

Operando analogamente sulle (2.35) e (2.36) e sulle (2.35) e (2.37), abbiamo:

$$\begin{aligned} x\dot{z} - z\dot{x} &= C_2 \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C_3. \end{aligned}$$

I primi membri di queste 3 equazioni ci rappresentano le componenti del prodotto vettoriale tra

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) \quad \text{e} \quad V \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

risulterà cioè:

$$\vec{r} \wedge V = \vec{C}$$

Ma, siccome il prodotto vettoriale è sempre normale ad ambedue i vettori fattori, ne segue che questi saranno perpendicolari alla direzione invariabile di \vec{C} , e, quindi, siccome \vec{r} passa per il punto fisso O , che la traiettoria è contenuta nel piano passante per O e perpendicolare a \vec{C} . Per trovare la grandezza di \vec{C} , ricordiamo la formula che dà la grandezza del prodotto vettoriale. Indicando con θ l'angolo che V forma con \vec{r} , avremo

$$|\vec{C}| = |\vec{r}||V| \sin \theta \quad (2.39)$$

Per dare un'interpretazione geometrica all'espressione (2.39) precedente, consideriamo due punti infinitamente vicini, P_1 e P_2 , della traiettoria; sia dt il tempo impiegato dal punto per andare da P_1 a P_2 . Si avrà:

$$\overline{P_1 P_2} = ds = V dt.$$

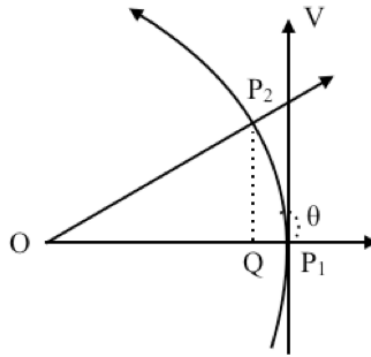


Figura 2.13: Interpretazione geometrica all'espressione (2.39) .

L'area del triangolo curvilineo OP_1P_2 è data, evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, da:

$$dS = \frac{1}{2} \overline{OP_1} \cdot \overline{P_2Q} = \frac{1}{2} r ds \sin \theta = \frac{1}{2} r V dt \sin \theta,$$

o, tenendo presente la (2.39):

$$dS = \frac{1}{2} C dt, \quad (2.40)$$

da cui si ricava, per C , l'espressione:

$$C = 2 \frac{dS}{dt}$$

Integrando la (eq:2.40), tra due valori generici del tempo, t_1 e t_2 , otteniamo:

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} C dt = \frac{1}{2} C (t_2 - t_1),$$

da cui si deduce il cosiddetto teorema delle aree:

In un moto centrale, le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegate a descriverle.

2.11 Teoria delle curve nello spazio

Raggio di curvatura.

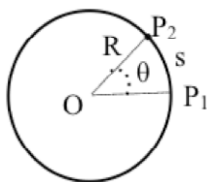


Figura 2.14: Relazione tra raggio di una circonferenza, arco e angolo.

Nel cerchio, detto R il raggio, s un arco generico e θ l'angolo al centro corrispondente, dalla nota relazione

$$s = R\theta,$$

si ricava per R

$$R = \frac{s}{\theta}.$$

Estendendo queste considerazioni ad una curva gobba qualsiasi, consideriamo le tangenti in due punti, P_1 e P_2 , indicando con θ il loro angolo. Osserviamo che, evidentemente, l'angolo suddetto varierà al variare dell'arco s compreso tra i due punti, ovvero, supponendo P_1 fisso, al variare di P_2 . Definiamo il raggio di curvatura ρ , analogamente a quanto si è fatto nel caso del cerchio, con la formula:

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta}.$$

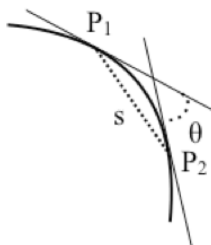


Figura 2.15: La definizione di raggio di curvatura.

Sia data, ora, la solita terna di assi, una curva gobba qualsiasi, e la posizione del punto generico P in funzione dell'arco s ; siano, cioè, date:

$$P \equiv \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s). \end{cases}$$

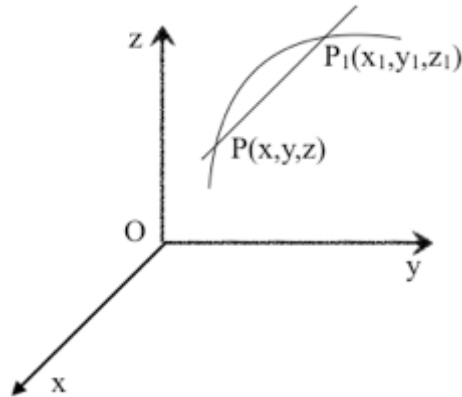


Figura 2.16: L'elemento d'arco.

Osserviamo, anzitutto, che le tre precedenti funzioni nella (s) , non possono essere date arbitrariamente, ma dovranno soddisfare alla nota relazione:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

da cui, dividendo ambo i membri per ds^2 :

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Osserviamo, ora, che i coseni direttori della secante $\overline{PP_1}$, sono proporzionali alle differenze tra le coordinate di P_1 e quelle di P . Indicando, per brevità, con $\Delta x, \Delta y$ e Δz , tali differenze, i coseni direttori di $\overline{PP_1}$ risulteranno, dunque, proporzionali a $\Delta x, \Delta y$ e Δz . D'altra parte, dalla relazione

$$\overline{PP_1}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

si ricava, per la grandezza di $\overline{PP_1}$:

$$\overline{PP_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Quindi, per le grandezze dei coseni direttori di $\overline{PP_1}$, avremo

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \\ \beta &= \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \\ \gamma &= \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.\end{aligned}$$

Quando, poi, P_1 tende a P e la secante $\overline{PP_1}$ tende a diventare tangente in P , i coseni direttori di essa tangente ci saranno dati dal limite a cui tendono le tre precedenti espressioni per Δs tendente a zero. Osservando che Δs differisce da ds solo per infinitesimi di ordine superiore (e così si dica per Δx e dx , per Δy e dy e per Δz e dz) potremo, al limite, porre:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dx}{ds} \\ \beta = \frac{dy}{ds} \\ \gamma = \frac{dz}{ds}. \end{cases} \quad (2.41)$$

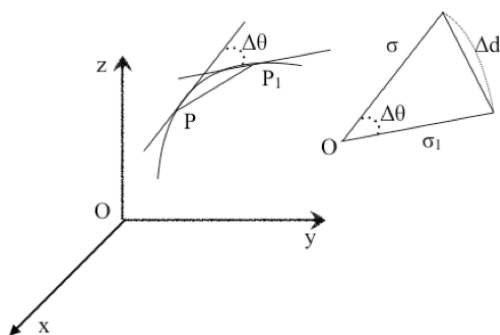


Figura 2.17: Raggio di curvatura.

Scegliendo, poi, a partire da un'origine qualsiasi, due vettori, σ e σ_1 , paralleli, rispettivamente alla tangente in P e a quella in P_1 , e, come esse tangenti, orientati; osserviamo che la differenza $|\sigma_1 - \sigma|$, poiché l'angolo $\Delta\theta$ è infinitesimo, differisce, dall'archetto $\Delta\sigma$, per infinitesimi di ordine superiore. D'altra parte $\Delta\sigma$, giacendo su di un cerchio di raggio unitario, è

uguale all'angolo $\Delta\theta$; risulterà perciò:

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{|\sigma_1 - \sigma|}.$$

Invertendo i rapporti, ponendo in luogo di $|\sigma_1 - \sigma|$, $d\sigma$, e, in luogo di Δs , ds ; abbiamo l'espressione della curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{|\sigma_1 - \sigma|}{ds} = \left| \frac{d\sigma}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{ds}{d\sigma} \right|}.$$

Riguardo alle componenti di $d\sigma/ds$, osserviamo che i coseni direttori di una retta, tangente alla curva, sono dati dalle derivate prime, rispetto ad s , delle coordinate del punto di contatto (vedi (2.42)). Ora le componenti di σ e σ_1 , trattandosi di vettori unitari, coincidono coi rispettivi coseni direttori. Per le componenti di $d\sigma/ds$, dovremo, perciò, considerare il limite a cui tendono le differenze tra le componenti analoghe di σ_1 e σ , col tendere a zero dell'arco s .

Sarà dunque:

$$\frac{d\sigma}{ds} \equiv \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} \\ \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{d^2z}{ds^2} \end{cases}.$$

Per la grandezza di $d\sigma/ds$, quadrando le tre relazioni precedenti, sommandole ed estraendone la radice quadrata, avremo:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{|\rho|} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Quanto alla direzione di $d\sigma/ds$, essendo $|\sigma| = 1$, e quindi $\sigma^2 = 1$, derivando quest'ultima, rispetto ad s , otteniamo:

$$2\sigma \times \frac{d\sigma}{ds} = 0$$

da cui si deduce che il vettore $d\sigma/ds$ è normale a σ . (A tale conclusione si arriva facilmente ricordando che, affinché il prodotto scalare di due vettori, ambedue diversi da zero, si annulli è necessario che il coseno, formato dalle

direzioni di questi, sia nullo, che essi, quindi, siano tra loro perpendicolari). Inoltre, essendo $d\sigma/ds$ normale alla tangente, sarà anche normale alla curva.

Consideriamo, ancora, il vettore $\sigma_1 - \sigma$, osserviamo che, poiché esso è la differenza tra i vettori tangenti alla curva in P_1 e P_2 , rispettivamente, giacerà (e quindi anche il vettore $\frac{\sigma_1 - \sigma}{\Delta s}$) nel piano individuato da σ e σ_1 . Quando Δs tende a zero, cioè quando σ_1 tende a coincidere con σ , il piano suddetto tenderà ad una certa posizione limite, diverrà, cioè, ciò che si definisce piano osculatore alla curva nel punto P . Il vettore $\frac{\sigma_1 - \sigma}{\Delta s}$ (che al limite sarà diventato $d\sigma/ds$) giacerà nel piano osculatore suddetto, ma, d'altra parte, dovendo tale vettore, non nullo, esistere anche nel piano normale alla curva in P , la sua direzione con quella retta, intersezione dei due piani retta che dicesi: normale principale della curva in P . Essa risulta parallela al vettore: $\sigma' = d\sigma/ds = 1/\rho =$ curvatura, ed ugualmente orientata. Indicando con $\tau(s)$ il vettore che rappresenta la normale principale, assumendolo come versore (vettore unitario) di σ' , avremo, per quest'ultimo l'espressione:

$$\sigma' = \frac{1}{\rho} \tau.$$

Se α, β e γ sono i coseni direttori della tangente in un punto generico della curva, λ, μ e ν i coseni direttori della normale nello stesso punto, si hanno le formule di Serret:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{\rho} ; \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{\rho} ; \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\rho}$$

che esprimono scalarmente la precedente equazione vettoriale.

Considerando, ora un qualsiasi moto di un punto, prefissato, al solito, il senso degli archi crescenti, essendo ancora l'arco s funzione del tempo t , e notando la posizione di un punto generico P come funzione dell'ascissa curvilinea s (a partire da un'origine prefissata), avremo:

$$s = s(t) \quad \text{e} \quad P = P(s)$$

e, per le coordinate di P :

$$P \equiv \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s). \end{cases} \quad (2.42)$$

La velocità (scalare) sulla traiettoria sarà:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

La velocità vettoriale V , indicando con $\vec{\sigma}$ il vettore unitario che ha la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato, avrà la forma:

$$V = v \cdot \vec{\sigma} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\sigma}.$$

Per l'accelerazione, A , avremo:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\sigma} + v \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt},$$

ma, avendosi evidentemente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

(essendo $ds/dt = v$, e $d\vec{\sigma}/ds = \vec{\tau}/\rho$) si ricava:

$$A = \vec{\sigma} \frac{dv}{dt} + \vec{\tau} \frac{v^2}{\rho}$$

e ponendo A_σ per il primo addendo del secondo membro e A_τ per il secondo, otteniamo:

$$A = A_\sigma + A_\tau,$$

cioè, l'accelerazione può scomporsi in due componenti, tangenziale l'una, normale l'altra, le cui grandezze rispettiva sono:

$$|A_\sigma| = \frac{dv}{dt}, \quad |A_\tau| = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.43)$$

Discende da qui che l'accelerazione sarà solo tangenziale, cioè consisterà in una variazione della grandezza velocità quando il moto sarà rettilineo: allora, infatti, sarà $\rho = \infty$, quindi A_τ sarà nulla. Sussisterà, invece, la sola accelerazione normale quando A_σ sarà nulla, cioè quando la velocità sulla traiettoria sarà costante, essendo allora $dv/dt = 0$, ad esempio, nel moto circolare uniforme.

Capitolo 3

CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

Un sistema di punti mobili si dice rigido quando le distanze tra i punti non variano durante il movimento.

Detti $P_1, P_2 \dots P_n$, gli n punti del sistema, affinché simultaneamente sia, per ogni valore del tempo determinata la posizione di ciascuno di essi, dovremo dare, per ogni punto (supponendo che la posizione di ciascuno di essi sia una certa funzione, $P(t)$, del tempo) le tre coordinate che risulteranno funzioni scalari della t . Si dovranno dare, complessivamente, le $3n$ funzioni

$$x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), \dots x_n(t), y_n(t), z_n(t) \ .$$

Il problema si semplifica notevolmente osservando che, prefissate, in un dato istante le posizioni di tre punti, non allineati, del sistema, la posizione di un quarto punto qualsiasi è univocamente determinata, perché, se, ad esempio, per $t = t_0$, le posizioni dei tre punti erano $A_{t_0}, B_{t_0}, C_{t_0}$, e, conseguentemente, quello di un quarto punto D_{t_0} ; al tempo generico t la posizione dei tre punti di riferimento, essendo diventate: A_t, B_t, C_t , la posizione, D_t del quarto resta determinata dal dover essere il tetraedo (o il quadrangolo piano) $A_{t_0}, B_{t_0}, C_{t_0}, D_{t_0}$ eguale (e sovrapponibile) al tetraedo (o il quadrangolo piano) A_t, B_t, C_t, D_t . In altre parole, il punto D resta determinato come intersezione tra le tre sfere di centri A, B, C , rispettivamente, e di raggi eguali alle tre distanze di D da A, B, C ; distanze che, per la ipotesi della rigidità, conservano durante tutto il movimento, valore eguale a quello che avevano nella posizione iniziale del sistema. Dunque, per quanto sopra, possiamo considerare che la posizione di qualsiasi punto del sistema (e quindi quella dell'intero sistema) è determinata quando sono date le coordinate di ciascuno dei tre punti di riferimento.

Ma il numero delle funzioni da darsi può essere ancora ridotto. Infatti, consideriamo il punto A dato mediante le sue coordinate, x_A, y_A, z_A , la posizione di B sarà nota quando siano date solo due delle sue coordinate, potendosi facilmente determinare, mediante la conoscenza della distanza \overline{AB} la terza coordinata di B . Per conoscere poi, la posizione di C , basterà dare una sola coordinata, potendosi ricavare le altre due dai valori noti delle distanze \overline{AC} e \overline{BC} .

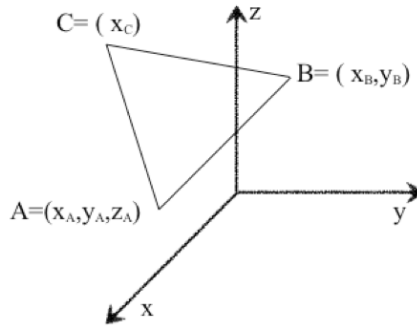


Figura 3.1: La scelta dei tre punti A, B, C per fissare la posizione del sistema

Ordinariamente, si individua la posizione di un sistema rigido, scegliendo una terna di assi solidale con il sistema e mobile con esso, e riferendo la posizione di questa terna $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ alla terna $O(x, y, z)$. Detti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i coseni degli angoli tra ξ, η, ζ , ed x ; $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i coseni degli angoli tra la medesima terna ed y ; $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, infine i coseni degli angoli di essa con z , possiamo scrivere la seguente tabella:

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

in cui i nove coseni (che, secondo le linee, sono i coseni direttori di ξ, η e ζ , rispetto ad x, y e z ; e, secondo le colonne, i coseni direttori di x, y e z rispetto a ξ, η e ζ) sono legati tra loro dalle sei relazioni indipendenti:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Per determinare la posizione di un punto del sistema, rispetto alla terna x, y, z , sarà necessario conoscere, per ogni valore del tempo, la posizione (mediante le sue coordinate rispetto a x, y, z) dell'origine della terna mobile, e la orientazione di ξ, η, ζ . Per ciò che riguarda Ω , bisognerà, evidentemente, dare le coordinate x_0, y_0, z_0 , per ogni valore del tempo; per quanto, poi, concerne le direzioni, bisognerà dare, sempre in funzione del tempo, i nove coseni di direzione. Tra questi, però, come si è visto, passano sei relazioni

indipendenti, cosicché le funzioni, in sostanza, si riducono a tre. Servendosi dei cosiddetti angoli di Eulero, si possono esprimere esplicitamente tali coseni per mezzo di tre variabili soltanto. Immaginiamo di aver portato, mediante una traslazione Ω in O . Indicheremo, poi, con θ , l'angolo che l'asse ζ forma con l'asse z , e consideriamo la retta, λ , intersezione del piano $\xi\eta$ col piano xy , e diciamo φ e ψ gli angoli che λ fa con ξ e con x rispettivamente. Conoscendo θ, φ e ψ , per le considerazioni che, immediatamente seguono, l'orientazione di ξ, η, ζ , rispettivamente alla terna x, y, z , restano determinate. Conoscendo φ , possiamo collocare l'asse λ , poiché sappiamo che esso è situato nel piano xy e forma con x l'angolo ψ . Fatto ciò possiamo situare anche l'asse ζ , poiché esso è perpendicolare a λ e forma con z l'angolo θ . Da ultimo si possono situare gli assi ξ ed η che sono perpendicolari a ζ , e formano con λ gli angoli φ e $\pi/2 - \varphi$.

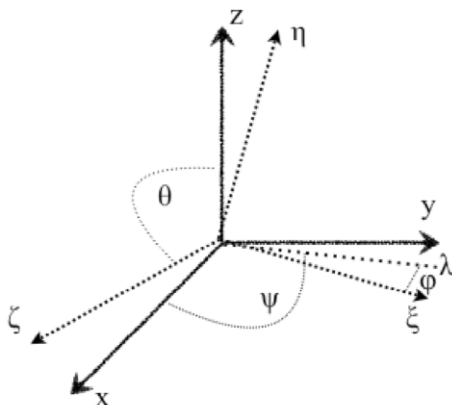


Figura 3.2: I tre angoli di Eulero φ, ψ, θ

Dette x_0, y_0, z_0 le coordinate di Ω rispetto ad O , per le note formule di geometria analitica, le coordinate cartesiane ortogonali di un punto generico P_i del sistema, riferite ad x, y, z (terna fissa), essendo ξ_i, η_i, ζ_i , le coordinate rispetto a ξ, η, ζ , (terna mobile), saranno date dalle formule:

$$P_i = \begin{cases} x_i &= x_0 + \xi_i \alpha_1 + \eta_i \alpha_2 + \zeta_i \alpha_3 \\ y_i &= y_0 + \xi_i \beta_1 + \eta_i \beta_2 + \zeta_i \beta_3 \\ z_i &= z_0 + \xi_i \gamma_1 + \eta_i \gamma_2 + \zeta_i \gamma_3 \end{cases}$$

In queste formule, x_0, y_0, z_0 saranno funzioni del tempo, e così pure i nove coseni; invece ξ_i, η_i e ζ_i resteranno costanti al variare del tempo.

3.1 Moti rigidi piani

Considereremo nel piano xy , p. es., un sistema rigido piano, mobile nel suo piano; le coordinate dell'origine Ω , della coppia mobile siano:

$$\Omega \equiv (x_0, y_0)$$

Sempre rispetto agli assi fissi, le coordinate di un punto generico P_i del sistema, saranno:

$$P_i = \begin{cases} x_i = x_0 + \xi_i \cos \theta - \eta_i \sin \theta \\ y_i = y_0 + \xi_i \sin \theta + \eta_i \cos \theta \end{cases} ,$$

dove θ è l'angolo tra ξ e x .

Analogamente al caso precedente, θ , x_0 ed y_0 sono funzioni del tempo, mentre ξ_i ed η_i sono costanti.

3.2 Moti traslatori

Dato un corpo rigido, si dice che il suo moto è traslatorio quando le velocità di tutti i suoi punti sono eguali e parallele.

3.3 Moti rotatori piani

Consideriamo un sistema rigido che abbia fisso un punto O (centro del moto), gli altri punti potranno, evidentemente, descrivere soltanto dei cerchi di centro O e di raggio pari alla distanza da O dei punti stessi. Detti P_1 e P_2 due qualsiasi punti del sistema, e P'_1 e P'_2 le posizioni in cui si troveranno dopo un certo tempo, P_1 e P_2 rispettivamente; vogliamo dimostrare l'eguaglianza degli angoli

$$\widehat{P_1 O P'_1} = \widehat{P_2 O P'_2} \quad (3.1)$$

Vediamo subito che le distanze $\overline{O P'_1}$ e $\overline{O P'_2}$ sono, rispettivamente, eguali ad $\overline{O P_1}$ e $\overline{O P_2}$. D'altra parte, essendo il sistema rigido, abbiamo:

$$\overline{P_2 P_1} = \overline{P'_2 P'_1}.$$

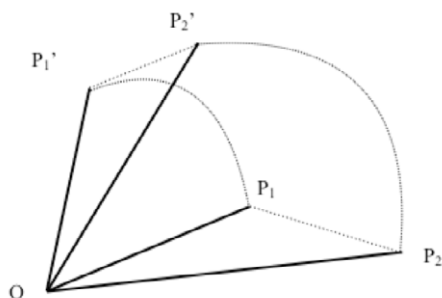


Figura 3.3: I due triangoli P_1OP_1' e P_2OP_2'

Concludiamo che i due triangoli, OP_1P_2 ed $OP_1'P_2'$, sono eguali. Come conseguenza, sono eguali anche i due angoli (3.1). Considerando la posizione di un punto generico P al tempo t ed al tempo $t + \Delta t$, il raggio \overline{OP} avrà ruotato di un angolo $\Delta\theta$. Il rapporto $\Delta\theta/\Delta t$ si chiama velocità angolare media nell'intervallo di tempo Δt . Il suo limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

si dice velocità angolare all'istante t .

Particolarmente, nel caso di un moto circolare uniforme, la velocità angolare è costante; avremo perciò:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cost.}$$

da cui, integrando, otteniamo:

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

La velocità assoluta, sulla traiettoria, ci sarà data da:

$$v = R\omega \quad (R = \text{raggio})$$

Si trova dunque, che la velocità di ogni punto è proporzionale ad R .

Consideriamo due punti, P_1 e P_2 , del sistema, e supponiamo che le loro velocità siano parallele e che la retta $\overline{P_1P_2}$ non sia perpendicolare alla direzione delle velocità nei due punti medesimi. Vogliamo dimostrare che, in questo caso il moto è traslatorio. Per questo cominceremo col dimostrare (essendo, per ipotesi, le due velocità parallele) che le due velocità hanno eguale grandezza. Essendo, il sistema, rigido (se l'angolo α che la congiungente i due punti P_1 e P_2 fa con le direzioni delle velocità, è diverso da 90^0) avremo

$$(P_2 - P_1)^2 = \text{cost.},$$

Derivando, rispetto a t , otteniamo:

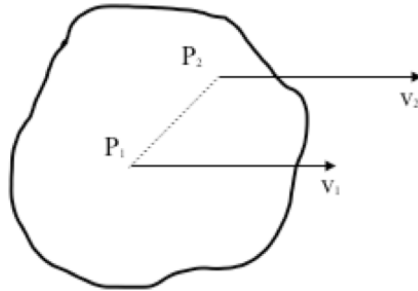


Figura 3.4: I due punti P_1 e P_2 che si muovono con velocità parallele

$$2(P_2 - P_1) \times \frac{d(P_2 - P_1)}{dt} = 0$$

Osservo, ora che il vettore, differenza di due vettori paralleli è parallelo ai due vettori in questione, perciò, dividendo per due ambo i membri, otteniamo:

$$(P_2 - P_1) \times \frac{d(P_2 - P_1)}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

epperò ne segue, che, supposti i due vettori del prodotto precedente ambedue diversi da zero, condizione necessaria e sufficiente perché sussista, è che $d(P_2 - P_1)/dt$ sia perpendicolare a $(P_2 - P_1)$. Ma è identicamente:

$$\frac{d(P_2 - P_1)}{dt} = \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt} = v_2 - v_1$$

Cioè il vettore suddetto, differenza tra la velocità di P_2 e quella di P_1 , risultando perpendicolare a $(P_2 - P_1)$, ne seguirebbe la condizione di perpendicolarità tra $(P_2 - P_1)$ e le due velocità, il che è contrario all'ipotesi.

Necessariamente, dunque, perché sia valida la (3.2) dovrà essere

$$\frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt} = v_2 - v_1 = 0.$$

Resta, dunque, dimostrato che P_1 e P_2 hanno velocità eguali anche in grandezza.

Vogliamo, ora, dimostrare che tutti, indistintamente, i punti del sistema hanno eguale velocità. Consideriamo, perciò, in terzo punto P_3 , qualsiasi, all'istante $t + \Delta t$, immediatamente successivo a quello, t , inizialmente considerato, le posizioni dei punti saranno P'_1, P'_2 e P'_3 .

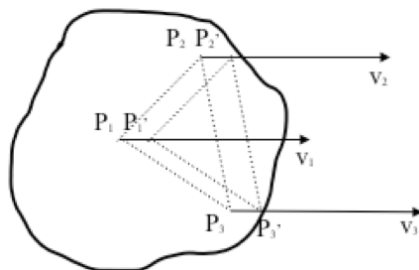


Figura 3.5: Lo spostamento dei punti P_1, P_2, P_3 nell'intervallo di tempo Δt

Per il nostro asserto (essendo, evidentemente, i due triangoli, $P_1P_2P_3$ e $P'_1P'_2P'_3$, eguali) basterà dimostrare che nel tempuscolo Δt i tre punti hanno percorso spazi eguali poiché potremo dedurre che essi possiedono eguale velocità. I lati P_1P_2 e $P'_1P'_2$ sono paralleli tra loro perché si è dimostrato che P_1 e P_2 hanno la stessa velocità; ne segue che tutti i lati corrispondenti dei due triangoli eguali sono paralleli tra loro e, quindi, $P_2P_3P'_3P'_2$ è un parallelogramma, perciò i suoi lati opposti $P_2P'_2$ e $P_3P'_3$ sono eguali e paralleli.

Consideriamo, ora, un moto rigido piano, in cui le velocità di due punti qualsiasi non siano parallele. Vogliamo dimostrare che la velocità del punto O (centro del moto), punto che si costruisce come intersezioni delle normali alle velocità v_1 e v_2 , in O_1 e P_2 , rispettivamente, è nulla.

Al solito, essendo costante la distanza tra due punti, al variare del tempo, avremo:

$$(P_1 - O)^2 = \text{cost.}$$

da cui, derivando rispetto a t

$$2(P_1 - O) \times \frac{d(P_1 - O)}{dt} = 0$$

da cui:

$$(P_1 - O) \perp \left(\frac{dP_1}{dt} - \frac{dO}{dt} \right),$$

ovvero (essendo $dO/dt = v_0$):

$$(P_1 - O) \perp (v_1 - v_0)$$

Ma, per costruzione, $(P_1 - O)$ è normale a v_1 ; dalla relazione precedente si conclude che v_0 è parallelo a v_1 o è nullo. Parimenti si dimostra che v_0 è o nullo o parallelo a v_2 ; siccome, però, v_1 e v_2 non sono paralleli tra loro, v_0 dovrà necessariamente essere nullo.

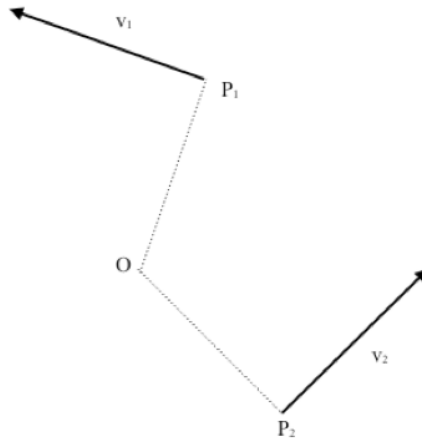


Figura 3.6: Il centro del moto O

Ad ogni istante il movimento del corpo si può riguardare come una rotatorio.

Considerando il moto di un sistema rigido piano su di un piano fisso, avverrà generalmente che il centro di rotazione del corpo assuma, al variare del tempo, posizioni diverse sul corpo stesso e, contemporaneamente sul piano di riferimento.

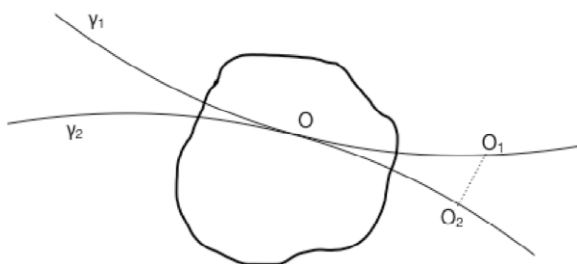


Figura 3.7: La posizione del centro del moto O è sulla tangente delle curve tracciate dai centri del moto (γ_1 e γ_2) relativamente al riferimento mobile e quello fisso.

Il luogo geometrico dei centri del corpo sarà una curva γ_1 , e, analogamente, sul piano fisso, un'altra curva γ_2 . Vogliamo dimostrare che, in ogni istante le due curve si toccano in un punto che è il centro di rotazione in quell'istante; per il che basterà far vedere che la distanza tra i punti O_1 e O_2 , solidali rispettivamente al corpo e col piano fisso, e che diventano centri istantanei di rotazione al tempo $t + \Delta t$ (per il quale tempo essi verranno a coincidere) è infinitesima di ordine superiore. Osserviamo, perciò, che si ha:

$$\overline{O_1 O_2} = \Delta t \cdot v_{0_1} \quad (v_{0_1} = \text{veloc. di } O_1) \quad (3.3)$$

Ora, essendo O_1 infinitesimamente prossimo al centro di rotazione O , la sua velocità, v_0 , è infinitesima. Dalla (3.3) si ricava dunque che $\overline{O_1 O_2}$ è il prodotto di un infinitesimo di primo ordine per un altro infinitesimo; esso è dunque un infinitesimo di ordine superiore.

La dimostrazione, poi, che le due curve non strisciano l'una sull'altra è data dalla considerazione che nell'istante considerato, il punto O di contatto fra esse è centro di rotazione: esso sarà perciò fermo, quindi le due curve non strisceranno l'una sull'altra.

In conclusione, siccome γ_1 e γ_2 si toccano, in ogni istante, in un punto che è centro di rotazione nell'istante considerato, il moto del sistema si può riguardare come prodotto, senza strisciare, dal rotolamento della curva γ_1 , solidale con sistema e mobile con esso, sulla γ_2 , fissa sul piano di riferimento.

Esempio. Si consideri il moto di un'asticella rigida che scorra su due altre, tra loro ortogonali, che sceglieremo come assi coordinati x ed y . Indichiamo con P_1 e P_2 gli estremi dell'asticella.

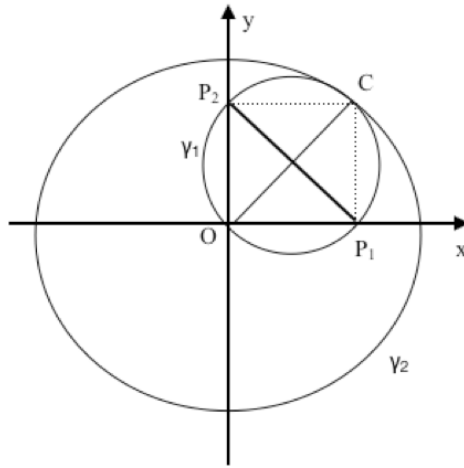


Figura 3.8: La sbarretta rigida strisciante lungo gli assi x e y .

Il centro del moto sul piano xy è il punto che ha per ascissa $\overline{OP_1}$ e per ordinata $\overline{OP_2}$. Il luogo geometrico descritto dal centro C sarà un cerchio di centro O e raggio OC , perchè, essendo OP_1CP_2 un rettangolo, al variare di P_1 e P_2 , la distanza fra questi due punti deve rimanere invariata. Ma rimanendo immutata la distanza $\overline{P_1P_2}$, che è una diagonale del rettangolo, rimarrà invariata anche l'altra diagonale OC ; di qui è dimostrato il nostro asserto. D'altra parte il centro del moto, considerato in un piano solidale con l'asticella mobile, varierà, essendo soggetto alla condizione che l'angolo P_1CP_2 sia retto.

Perciò esso descriverà un cerchio di diametro $\overline{P_1P_2}$; ed essendo:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OC}$$

detto cerchio passerà per l'origine. Il punto di contatto tra i due cerchi sarà il centro istantaneo di rotazione.

3.4 Moti rigidi in generale

Per i moti traslatori si ripetono le stesse considerazioni fatte per i moti piani. Per i moti rotatori, invece, bisogna osservare che, se ad un certo istante generico t vi sono due punti, P e Q , che stanno fermi, vi è anche una retta, e precisamente la \overline{PQ} che sta ferma.

Fissiamo, infatti, sulla \overline{PQ} , un punto generico R : questo punto, all'istante t , è per costruzione, allineato con P e Q . Supponiamo, ora, per un momento, che in un certo tempo $t + \Delta t$, la posizione R sia diventata R' , fuori della retta \overline{PQ} .

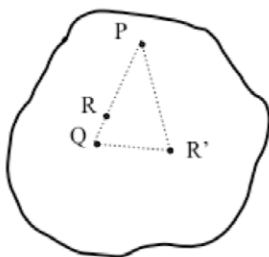


Figura 3.9: I punti P, Q, R, R' descritti nel testo.

Allora, siccome deve essere per la rigidità:

$$R'Q = RQ, \quad \text{e} \quad R'P = RP,$$

bisogna, evidentemente, che il triangolo $PR'Q$ si schiacci sul lato PQ , ed il punto R resta, quindi, sempre allineato con P e Q . D'altra parte, trattandosi, di un sistema rigido, dovranno rimanere inalterate le distanze \overline{RP} ed \overline{RQ} ; ne consegue che R non può scorrere neppure sulla retta \overline{PQ} . Lo stesso ragionamento è valido per tutti gli altri punti della linea, e basta a dimostrare come essa rimanga fissa per intero.

Tale retta dicesi asse di rotazione. Un moto di questo tipo si dice rotatorio.

Passando, ora, a considerare il moto rotatorio di un sistema rigido, il cui asse sia assegnato mediante due dei suoi punti, P e Q , si vede immediatamente come il moto di un punto, R , qualsiasi del corpo, si svolga su di un cerchio che ha per raggio la distanza di R da PQ , e che giace sul piano condotto per R , normalmente all'asse.

Infatti, le distanze \overline{PR} e \overline{QR} debbono rimanere costanti, e quindi R deve restare sull'intersezione delle due sfere di centro P e Q , rispettivamente, e di raggio \overline{PR} e \overline{QR} , intersezione che per l'appunto è il cerchio suddetto.

Proiettando il moto di tutti i punti su di un piano normale all'asse, otteniamo una serie di cerchi concentrici su cui i rispettivi punti si muovono.

Vale anche qui l'osservazione fatta per i moti piani, che tutti i punto del sistema hanno eguale velocità angolare.

3.5 Velocità angolare nei moti rigidi, in genere

Sappiamo che la velocità angolare ω ci è data dal

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

dove θ è l'angolo di cui è ruotato, in un certo tempo, un qualsiasi punto del sistema.

Generalizzando il concetto di velocità angolare, la rappresenteremo con un vettore perpendicolare al piano in cui si svolge il moto del punto, orientato in modo che un osservatore collo sguardo diretto verso il senso positivo di esso, vegga avvenire il moto da destra a sinistra.

Quanto alla velocità, V , sulla traiettoria, osserviamo, anzitutto, che proiettando il moto su un piano normale all'asse, la direzione di $\vec{\omega}$ coincide con la direzione dell'asse. Ci proponiamo di dimostrare cioè:

$$V = \omega \wedge (R - O) \quad (3.4)$$

dove R è un punto generico del sistema (cui si riferiscono V e ω) e dove O è un punto dell'asse, determinato come intersezione del piano condotto per R , normalmente all'asse, con l'asse stesso.

Per la grandezza V avremo:

$$|V| = |\omega| \cdot |R - O| \sin \theta,$$

ma, siccome, qualunque sia θ , è

$$|R - O| \sin \theta = r = \text{dist. di } R \text{ dall'asse},$$

avremo:

$$|V| = |\omega| r$$

Per la direzione, poi, osserviamo che il vettore $\omega \wedge (R - O)$ deve essere normale al piano dei vettori ω e $(R - O)$, e siccome a detto piano appartiene anche il raggio r , relativo al punto considerato, risulta che la direzione di V coincide con quella della tangente alla traiettoria in R .

Il senso, infine, si può dedurre agevolmente dal dover essere la terna $V, \omega, (R - O)$, destrorsa.

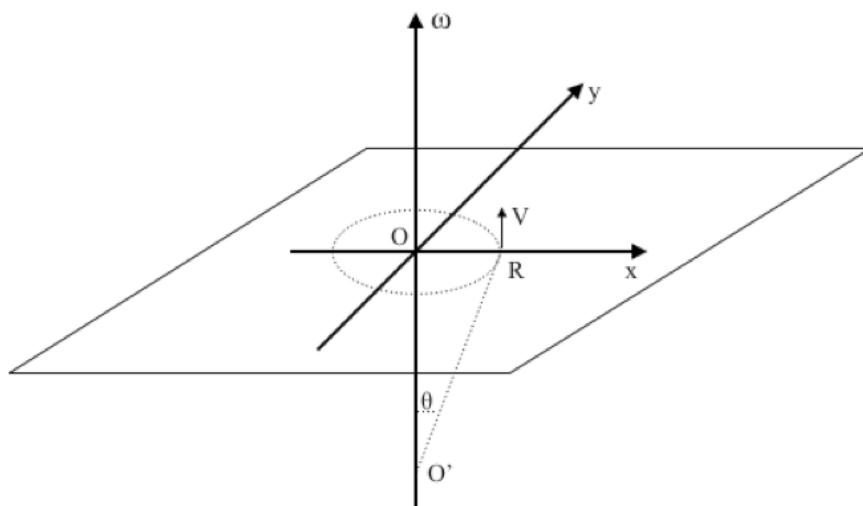


Figura 3.10: La definizione del vettore velocità angolare ω .

Passiamo, ora, a dimostrare come la relazione precedentemente stabilita per V , seguita a valere anche quando, invece che ad O , ci si riferisca ad un punto O' , qualsiasi, dell'asse. Avremo, infatti, in quest'ultimo caso, per la velocità sulla traiettoria:

$$V' = \omega \wedge (R - O') \quad (3.5)$$

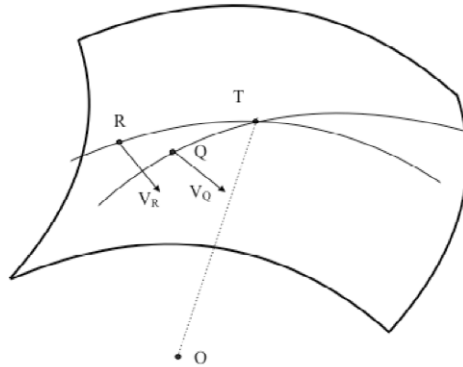
Sottraendo poi membro a membro la (3.5) dalla (3.4), otteniamo:

$$V - V' = \omega \wedge (O - O').$$

Osservando che la direzione di ω ed $(O - O')$ coincidono e che, perciò, il loro prodotto vettoriale è nullo, risulterà

$$V' - V = 0$$

di cui infine $V' = V$.

Figura 3.11: I punti O, Q, R, T del testo.

3.6 Asse istantaneo di rotazione

Vogliamo, ora, dimostrare che, se durante il moto c'è un punto del sistema che sta fermo, c'è necessariamente, tutta una retta, passante per esso, la cui velocità è nulla.

Infatti, detto O il punto fisso, un punto generico, P , del sistema, potrà muoversi solo su di una sfera di raggio \overline{OP} . Consideriamo una porzione della sfera e due punti qualsiasi R e Q , indichiamo con V_R e V_Q le loro velocità che risulteranno tangenti alla sfera in R e Q , rispettivamente.

Conduciamo, ora, per R il cerchio massimo normale a V_R , e per Q quello normale a V_Q . Osserviamo che questi due cerchi massimi avranno due punti in comune e, considerando uno di questi, T , poiché esso appartiene al sistema, avremo:

$$(T - Q)^2 = \text{cost.},$$

da cui:

$$2(T - Q) \times \frac{d(T - Q)}{dt} = 0,$$

poiché è identicamente:

$$\frac{d(T - Q)}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{dQ}{dt} = V_T - V_Q,$$

cioè

$$(T - Q) \perp (V_T - V_Q).$$

Siccome, poi, il vettore $(T - Q)$ è normale a V_Q , V_T dovrà essere parallela a V_Q , o nulla. Analogamente, se ripetiamo le medesime considerazioni,

riferendoci, però, al punto R , risulta essere V_T parallelo anche a V_R , o nulla. Concludiamo, quindi, che V_T dovendo essere parallelo a due direzioni diverse è nulla.

La retta \overline{OT} , dunque, durante il moto, all'istante che si considera ha velocità nulla.

Rimanendo sempre fisso O , la retta di velocità nulla varierà da istante a istante, essa si chiama, perciò, asse istantaneo di rotazione.

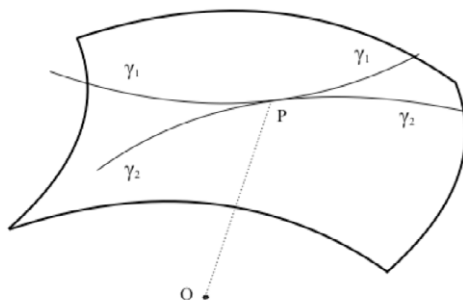


Figura 3.12: Le curve γ_1, γ_2 intersezione dei due coni con la sfera di centro O .

Immaginiamo, ora, in modo analogo a quanto si è fatto nel caso dei moti piani di segnare sul corpo tutte le rette che sono state assi istantanei di rotazione.

Ripetendo la medesima operazione rispetto alla terna fissa di riferimento, avremo due coni (nel senso più generale della parola) e il moto si potrà riguardare come prodotto dal rotolamento del cono solidale col sistema e mobile con esso, sul cono fisso. Ad ogni istante questi due coni si toccheranno lungo una generatrice che è l'asse istantaneo di rotazione. Per dimostrare analiticamente che i due coni si toccano lungo quest'asse, scelto un punto P , del sistema, consideriamo la sfera che ha il centro nel punto fisso O e raggio \overline{OP} , e le due curve γ_1 e γ_2 di intersezione del cono solidale col corpo e del cono fisso, rispettivamente con essa.

Ad un istante generico t esisterà su queste due curve un punto fisso (di contatto), e precisamente quello che, unito con O , mi dà l'asse istantaneo di rotazione.

La dimostrazione che le due curve si toccano è perfettamente analoga a quella fatta per i moti piani. Così si dica per la dimostrazione che i due coni non strisciano.

3.7 Calcolare la velocità di un punto, espressa mediante le sue componenti secondo la terna ξ, η, ζ

Consideriamo le due terne x, y, z e ξ, η, ζ , con origini coincidenti nel punto, O , fisso del sistema. Se ξ, η, ζ sono le coordinate rispetto alla terna solidale con il sistema, di un punto mobile di esso, P , le coordinate rispetto alla terna fissa sono date da

$$P = \begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases} .$$

Proponiamoci ora, il problema di calcolare la velocità del punto, espressa mediante le sue componenti rispetto alla terna ξ, η, ζ . Osserviamo, anzitutto, che sarebbe assurdo voler fare le derivate di ξ, η, ζ , perché sono delle costanti. Dovremo, perciò, calcolare le componenti della velocità rispetto a x, y, z , e quindi proiettare le componenti, così derivate, su ξ, η, ζ . Derivando, rispetto al tempo, le espressioni precedenti, avremo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\alpha}_1 \xi + \dot{\alpha}_2 \eta + \dot{\alpha}_3 \zeta \\ \dot{y} = \dot{\beta}_1 \xi + \dot{\beta}_2 \eta + \dot{\beta}_3 \zeta \\ \dot{z} = \dot{\gamma}_1 \xi + \dot{\gamma}_2 \eta + \dot{\gamma}_3 \zeta \end{cases}$$

Osserviamo, ora, che, se uguagliamo le precedenti relazioni a zero, avremmo le condizioni cui debbono sottostare le coordinate dell'asse di rotazione; occorrerebbe, in questo caso che fosse nullo il determinante formato con i coefficienti del sistema, ed avremmo allora ∞^1 soluzioni le quali ci convincerebbero tutte essendo proporzionali e rappresentando l'asse cercato. Per ottenere le componenti secondo ξ, η e ζ , della V , converrà proiettare su questi assi e, per far ciò, possiamo proiettare le tre componenti \dot{x}, \dot{y} , e \dot{z} , su ciascuno degli assi ξ, η e ζ . (La V è la somma vettoriale delle sue tre componenti secondo x, y, z ; per ottenerne dunque le tre componenti secondo gli assi della terna mobile, invece di proiettare direttamente la V su questi assi si possono proiettare le sue componenti secondo x, y, z , e poi sommare tali proiezioni.) Avremo per la V_ξ :

$$V_\xi = \alpha_1 \dot{x} + \beta_1 \dot{y} + \gamma_1 \dot{z},$$

cioè:

$$V_\xi = \xi(\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_1 \dot{\beta}_1 + \gamma_1 \dot{\gamma}_1) + \eta(\alpha_1 \dot{\alpha}_2 + \beta_1 \dot{\beta}_2 + \gamma_1 \dot{\gamma}_2) + \zeta(\alpha_1 \dot{\alpha}_3 + \beta_1 \dot{\beta}_3 + \gamma_1 \dot{\gamma}_3)$$

da cui, indicando con:

$$S(\alpha_1 \dot{\alpha}_1), \quad S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2), \quad S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3),$$

rispettivamente, le espressioni racchiuse nella prima, nella seconda e terza parentesi, avremo:

$$V_\xi = \xi S(\alpha_1 \dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) + \zeta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3).$$

Vogliamo dimostrare che è:

$$S(\alpha_1 \dot{\alpha}_1) = 0.$$

Infatti, partendo dalla relazione

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,$$

e derivando, si ha:

$$2(\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_1 \dot{\beta}_1 + \gamma_1 \dot{\gamma}_1) = 2S(\alpha_1 \dot{\alpha}_1) = 0. \quad (3.6)$$

Per la V_η e la V_ζ si procede analogamente, osservando che i coseni direttori di x, y, z , rispetto ad η , sono: $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; e rispettivamente a ζ : $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Avremo perciò:

$$\begin{aligned} V_\eta &= \xi S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_2 \dot{\alpha}_2) + \zeta S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) \\ V_\zeta &= \xi S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) + \zeta S(\alpha_3 \dot{\alpha}_3). \end{aligned}$$

Analogamente alla (3.6) soprascritta, sarà:

$$S(\alpha_2 \dot{\alpha}_2) = S(\alpha_3 \dot{\alpha}_3) = 0.$$

e pertanto, V_ξ, V_η, V_ζ , assumono la forma:

$$\begin{cases} V_\xi &= \eta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) + \zeta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3) \\ V_\eta &= \xi S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) + \zeta S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) \\ V_\zeta &= \xi S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) \end{cases} .$$

Consideriamo, ora la relazione:

$$\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0,$$

e, derivandola, assieme alle due analoghe, rispetto al tempo t , troviamo

$$\begin{aligned} S(\dot{\alpha}_2 \alpha_3) + S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) &= 0 \\ S(\dot{\alpha}_3 \alpha_1) + S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) &= 0 \\ S(\dot{\alpha}_1 \alpha_2) + S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) &= 0, \end{aligned}$$

e ponendo:

$$\begin{aligned} S(\dot{\alpha}_2 \alpha_3) &= -S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) = p \\ S(\dot{\alpha}_3 \alpha_1) &= -S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) = q \\ S(\dot{\alpha}_1 \alpha_2) &= -S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) = r \end{aligned} \quad (3.7)$$

avremo, infine, per le componenti della velocità lungo gli assi mobili:

$$V \equiv \begin{cases} V_\xi &= q\zeta - r\eta \\ V_\eta &= r\xi - p\zeta \\ V_\zeta &= p\eta - q\xi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Osservando che queste tre relazioni non sono altro che le componenti secondo ξ, η, ζ , del prodotto vettoriale tra il vettore $(P - O)$ ed il vettore di componenti p, q ed r , notiamo che la precedente relazione del tutto analoga alla $(\omega \wedge (P - O))$ relativa all'espressione della V mediante la velocità angolare e la distanza di un punto mobile da un punto qualsiasi dell'asse.

I parametri p, q ed r , sono proporzionali ai coseni direttori dell'asse. A questo scopo, basta far vedere che tutti i punti della retta, i cui coseni direttori sono proporzionali a p, q, r , hanno velocità nulla. Ora, questi punti hanno coordinate del tipo

$$\xi = \kappa p, \quad \eta = \kappa q, \quad \zeta = \kappa r.$$

Sostituendo tali valori nella (3.8):

$$\begin{cases} V_\xi &= \kappa q r - \kappa q r = 0 \\ V_\eta &= \kappa r p - \kappa r p = 0 \\ V_\zeta &= \kappa p q - \kappa p q = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$V = 0.$$

La nostra retta è, dunque, l'asse istantaneo di rotazione. Il vettore velocità angolare avrà per componenti: p, q ed r ; la sua grandezza ci sarà data da:

$$|\omega| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

ed i coseni direttori dell'asse ci saranno forniti dalle espressioni:

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \beta &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \gamma &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \end{cases}$$

3.8 Moti rigidi qualsiasi

Riferito il moto di un sistema rigido alla terna assoluta di riferimento (x, y, z) (essendo al solito, prefissata anche una terna mobile ξ, η, ζ solidale col sistema), vediamo come si possa determinare il moto di un punto P , del suaccennato sistema, per ogni valore del tempo.

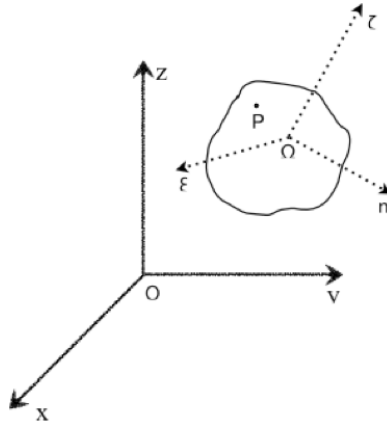


Figura 3.13: I due riferimenti, quello assoluto x, y, z e quello mobile ξ, η, ζ .

Evidentemente, il moto del punto si potrà si può riguardare come il risultato del moto dell'origine Ω della terna mobile rispetto a x, y, z , e dalla variazione di orientamento della terna mobile rispetto alla fissa. Indicate, perciò, con P e P' le rispettive posizioni del punto all'istante t , e all'istante successivo $t + \Delta t$, avremo:

$$(P' - P) = (\Omega' - \Omega) + \Delta_{R,P}.$$

dove si è indicata con Ω' la posizione dell'origine Ω all'istante $t + \Delta t$, e con $\Delta_{R,P}$ lo spostamento subito da P per lo spostamento degli assi. Dividendo ambo i membri per Δt , avremo:

$$\frac{(P' - P)}{\Delta t} = \frac{(\Omega' - \Omega)}{\Delta t} + \frac{\Delta_{R,P}}{\Delta t}.$$

cioè:

$$V_P = V_\Omega + \omega \wedge (P - \Omega) \quad (3.9)$$

dove ω ha il solito significato di velocità angolare del sistema all'istante considerato. Dimostriamo ora che il valore:

$$\omega \wedge (P - \Omega)$$

stabilito per la velocità di P rispetto ad Ω , non varia quando si prenda come origine della terna mobile, un altro punto qualsiasi del sistema.

Indicato infatti con Ω_1 un nuovo punto di riferimento, avremo per la velocità calcolata rispetto ad Ω , l'espressione (3.9), e, rispetto ad Ω_1 , l'espressione

$$V_P = V_{\Omega_1} + \omega_1 \wedge (P - \Omega_1) \quad (3.10)$$

Osserviamo, ora, che la (3.9) si può identicamente scrivere:

$$V_P = V_{\Omega} + \omega \wedge (P - \Omega_1 + \Omega_1 - \Omega) = V_{\Omega} + \omega \wedge (\Omega_1 - \Omega) + \omega \wedge (P - \Omega)$$

e notando che $V_{\Omega} + \omega \wedge (\Omega_1 - \Omega)$ rappresenta la velocità di Ω_1 (rispetto a Ω), risulta:

$$V_P = V_{\Omega_1} + \omega \wedge (P - \Omega_1)$$

e dovrà necessariamente, essere:

$$\omega = \omega_1$$

Dato, ora, il solito sistema rigido, vogliamo dimostrare che tutti i punti situati su rette parallele alla direzione di ω , hanno eguale velocità, Siano, infatti, P e Q , due tali punti; avremo:

$$V_P = V_0 + \omega \wedge (P - O)$$

$$V_Q = V_0 + \omega \wedge (Q - O)$$

Sottraendo la seconda dalla prima delle precedenti, otteniamo:

$$V_P - V_Q = \omega \wedge (P - Q)$$

Ma quest'ultimo prodotto vettoriale è nullo, dato il parallelismo dei vettori fattori; si conclude, perciò

$$V_P - V_Q = 0 \quad \text{e} \quad V_P = V_Q$$

Da quanto sopra segue che, per conoscere la velocità di tutti i punti situati su di una parallela ad ω , basta conoscere la velocità di un solo di

questi punti, per esempio, del punto d'incontro di un piano normale a ω con la parallela in questione. Osserviamo che per questo punto d'incontro P , si ha

$$|\omega \wedge (P - O)| = |\omega| \cdot |\overline{OP}|$$

essendo l'angolo $\widehat{\omega OP}$ retto, e quindi, essendo: $\sin\theta = 1$. Immaginatoci, per un momento, che π sia rappresentato dal piano del foglio e perciò, sul foglio stesso, ω si proietta in O . La velocità di O , V_0 , sarà comunque diretta nello spazio, ma la potremo sempre decomporre in due componenti: l'una giacente sul piano della figura, l'altra normale a questo piano; siano $V_{0,T}$ e $V_{0,N}$, tali componenti.

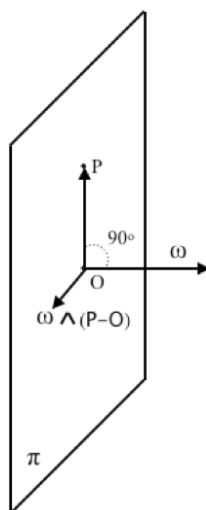


Figura 3.14: Il piano π discusso nel testo .

La velocità di P si ottiene aggiungendo alla V_0 , il vettore $\omega \wedge (P - Q)$. Ora, questo vettore giace evidentemente sul piano della figura. Si deduce, quindi, che tutti i punti hanno la componente normale della velocità eguale a $V_{0,N}$.

Vogliamo, ora, vedere se esiste un punto la cui velocità si riduce alla sola componente normale, essendo nulla la componente tangenziale.

Osservando che la componente tangenziale, $V_{P,T}$, della velocità di un punto generico ci è data da:

$$V_{P,T} = V_{0,T} + \omega \wedge (P - O);$$

vediamo che, affinché essa si annulli, occorre, anzitutto, che i due vettori addendi, $V_{0,T}$ ed $[\omega \wedge (P - O)]$, abbiano uguale direzione e senso opposto;

dovrà, perciò, risultare $(P-O)$ normale in O , alla direzione comune dei due vettori $V_{0,T}$ ed $\omega \wedge (P-O)$. Quanto alla grandezza dovrà essere:

$$|\omega \wedge (P-O)| = |\omega| \cdot |(P-O) \parallel V_{0,T}|$$

essendo $\sin \theta = 1$ perché $\theta = \pi/2$.

Da quanto sopra risulta che il punto P_0 , la cui velocità ha componente tangenziale nulla, dovrà avere, dal punto O una distanza tale da soddisfare alla condizione

$$\overline{OP_0} = \frac{|V_{0,T}|}{|\omega|};$$

esiste, quindi, tutta una retta passante per P_0 e parallela ad ω , i cui punti posseggono solo velocità normale al piano della figura. Questa retta, al variare del tempo, scorre su se stessa, ed il moto del sistema può riguardarsi come elicoidale istantaneo, nel quale la retta in parola funge da asse.

3.9 Moti relativi

Accade spesso di considerare un movimento rispetto ad un sistema di riferimento che, a sua volta, si muove; p. es., i viaggiatori, in un treno, si riferiranno alle pareti di esso; o, anche, quando si riferisce, come si fa di solito, il moto dei corpi alla terra, il sistema di riferimento è sempre mobile. Ci si presenta, perciò, il problema del cosiddetto moto relativo. Si abbia dunque un punto, P , riferito ad una terna mobile, ξ, η, ζ , la quale, a sua volta, sia riferita ad una terna fissa x, y, z . Mentre, nel caso dei moti rigidi, le coordinate del punto erano costanti rispetto al tempo, nei moti relativi, invece, poiché il punto è mobile sia rispetto a x, y, z , che rispetto a ξ, η, ζ , anche le coordinate ξ, η, ζ , saranno funzioni del tempo.

Scelte dunque le due terne (la mobile e la fissa), dette:

$$x_\Omega, \quad y_\Omega, \quad z_\Omega$$

le coordinate dell'origine Ω della terna mobile, per le coordinate di P , rispetto ad x, y, z , avremo:

$$P = \begin{cases} x & = x_\Omega + \xi \alpha_1 + \eta \alpha_2 + \zeta \alpha_3 \\ y & = y_\Omega + \xi \beta_1 + \eta \beta_2 + \zeta \beta_3 \\ z & = z_\Omega + \xi \gamma_1 + \eta \gamma_2 + \zeta \gamma_3 \end{cases}$$

Per ricavare l'espressione della velocità rispetto alla terna fissa, occorrerà derivare, rispetto al tempo, le tre precedenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dot{x}_\Omega + \xi \dot{\alpha}_1 + \eta \dot{\alpha}_2 + \zeta \dot{\alpha}_3 + \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3 \\ \dot{y} &= \dot{y}_\Omega + \xi \dot{\beta}_1 + \eta \dot{\beta}_2 + \zeta \dot{\beta}_3 + \dot{\xi} \beta_1 + \dot{\eta} \beta_2 + \dot{\zeta} \beta_3 \\ \dot{z} &= \dot{z}_\Omega + \xi \dot{\gamma}_1 + \eta \dot{\gamma}_2 + \zeta \dot{\gamma}_3 + \dot{\xi} \gamma_1 + \dot{\eta} \gamma_2 + \dot{\zeta} \gamma_3. \end{cases} \quad (3.11)$$

Osserviamo, ora, che ciascuna delle espressioni precedenti (le quali ci danno rispettivamente, V_x , V_y , V_z) si può scomporre in due addendi, il primo dei quali, per V_x , ad esempio, è

$$\dot{x}_\Omega + \xi \dot{\alpha}_1 + \eta \dot{\alpha}_2 + \zeta \dot{\alpha}_3. \quad (3.12)$$

Questa espressione, con le sue due analoghe, ci dà le componenti di un vettore che chiameremo velocità di trascinamento V_T , il cui significato cinematico si chiarisce subito osservando che, se supponiamo (come nel caso dei moti rigidi) P rigidamente fissato alla terna mobile, ξ , η e ζ risulteranno costanti e, conseguentemente la loro derivata nulla. In questo caso la V_x si riduce alla (3.12) precedente, che ci rappresenta, dunque, la velocità del punto quando esso sia rigidamente unito alla terna mobile. Analogamente per V_y e V_z .

Osserviamo, ora, che se supponiamo la terna ξ , η e ζ irrigidita nella posizione occupata in un certo istante, le coordinate di Ω rispetto alla terna fissa, ed i nove coseni direttori dei tre assi della terna mobile, rispetto a x , y , z , rimarranno costanti e quindi saranno nulle le loro derivate. L'espressione di V_x si riduce allora a:

$$V_x = \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3, \quad (3.13)$$

espressione, questa che, con le due analoghe ci dà le componenti di un vettore detto velocità relativa, V_R , di P rispetto alla terna ξ , η , ζ .

Nel caso generico in cui O è mobile, sia rispetto a x , y , z , sia rispetto a ξ , η , ζ , e quest'ultima terna è mobile rispetto alla prima, l'espressione del vettore V (che ha per componenti secondo la terna fissa, le (3.11) precedenti) assume la forma

$$V = V_T + V_R$$

Quanto sopra costituisce il teorema di addizione delle velocità.

Per le componenti di V_R , rispetto a x , y , z , avremo:

$$V_R \equiv \begin{cases} V_{R,x} &= \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3 \\ V_{R,y} &= \dot{\xi} \beta_1 + \dot{\eta} \beta_2 + \dot{\zeta} \beta_3 \\ V_{R,z} &= \dot{\xi} \gamma_1 + \dot{\eta} \gamma_2 + \dot{\zeta} \gamma_3. \end{cases}$$

Volendo descrivere le componenti secondo ξ, η, ζ , occorrerà moltiplicare le tre precedenti relazioni per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, rispettivamente, e sommare: si avrà così $N_{V,\xi}$, e, in modo perfettamente analogo, mutando però, i coseni, si ricaverebbero $N_{V,\eta}$ e $N_{V,\zeta}$. Tenendo poi conto delle note relazioni:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0,$$

risulta infine:

$$V_{R,\xi} = \dot{\xi}, \quad V_{R,\eta} = \dot{\eta}, \quad V_{R,\zeta} = \dot{\zeta}.$$

3.10 Accelerazione nei moti relativi

Riprendendo le (3.11), e derivandole rispetto al tempo, otteniamo le componenti dell'accelerazione del punto, secondo la terna fissa:

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \ddot{x}_\Omega + \xi \ddot{\alpha}_1 + \eta \ddot{\alpha}_2 + \zeta \ddot{\alpha}_3 + 2(\dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta}) + \ddot{\xi} \alpha_1 + \ddot{\eta} \alpha_2 + \ddot{\zeta} \alpha_3 \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_\Omega + \xi \ddot{\beta}_1 + \eta \ddot{\beta}_2 + \zeta \ddot{\beta}_3 + 2(\dot{\beta}_1 \dot{\xi} + \dot{\beta}_2 \dot{\eta} + \dot{\beta}_3 \dot{\zeta}) + \ddot{\xi} \beta_1 + \ddot{\eta} \beta_2 + \ddot{\zeta} \beta_3 \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_\Omega + \xi \ddot{\gamma}_1 + \eta \ddot{\gamma}_2 + \zeta \ddot{\gamma}_3 + 2(\dot{\gamma}_1 \dot{\xi} + \dot{\gamma}_2 \dot{\eta} + \dot{\gamma}_3 \dot{\zeta}) + \ddot{\xi} \gamma_1 + \ddot{\eta} \gamma_2 + \ddot{\zeta} \gamma_3. \end{cases} \quad (3.14)$$

Riguardando, ora, ciascuna delle precedenti espressioni come somma di tre addendi, che, per \ddot{x} , ad esempio, sono:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_\Omega + \xi \ddot{\alpha}_1 + \eta \ddot{\alpha}_2 + \zeta \ddot{\alpha}_3; && 2(\dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta}); \\ &\ddot{\xi} \alpha_1 + \ddot{\eta} \alpha_2 + \ddot{\zeta} \alpha_3; \end{aligned}$$

il vettore A , le cui componenti sono date dalle (3.14) precedenti, potrà porsi sotto la forma

$$A = A_T + A_R + A_C, \quad (3.15)$$

cioè, si potrà riguardare l'accelerazione, calcolata rispetto alla terna fissa, come somma di tre vettori che chiamiamo, rispettivamente, di trascinamento, complementare e relativa. Per l'accelerazione di trascinamento e per l'accelerazione relativa valgono considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte per la V_T e la V_R ; il significato, invece, dell'accelerazione complementare è meno evidente. Per chiarirlo osserviamo che è:

$$1/2 A_C \equiv \begin{cases} 1/2 A_{C,x} &= \dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta} \\ 1/2 A_{C,y} &= \dot{\beta}_1 \dot{\xi} + \dot{\beta}_2 \dot{\eta} + \dot{\beta}_3 \dot{\zeta} \\ 1/2 A_{C,z} &= \dot{\gamma}_1 \dot{\xi} + \dot{\gamma}_2 \dot{\eta} + \dot{\gamma}_3 \dot{\zeta} \end{cases}$$

e proponiamoci di calcolare le componenti A_C rispetto a ξ, η, ζ . A tal scopo, per $A_{C,x}$, ad esempio, dovremo moltiplicare le tre relazioni precedenti

per α_1, β_1 e γ_1 , rispettivamente, e sommare. Analogamente, moltiplicando, però, per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$: si otterrebbero, rispettivamente, $A_{C,y}$ ed $A_{C,z}$.

Sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$1/2 A_C \equiv \begin{cases} 1/2 A_{C,x} &= S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3) \dot{\zeta} + S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) \dot{\eta} \\ 1/2 A_{C,y} &= S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) \dot{\xi} + S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) \dot{\zeta} \\ 1/2 A_{C,z} &= S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) \dot{\eta} + S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) \dot{\xi} \end{cases}$$

per cui, avendo posto, come nella (3.8)

$$\begin{aligned} S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) &= -S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) = p \\ S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3) &= -S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) = q \\ S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) &= -S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) = r \end{aligned}$$

otteniamo:

$$1/2 A_C \equiv \begin{cases} 1/2 A_{C,x} &= q \dot{\zeta} - r \dot{\eta} \\ 1/2 A_{C,y} &= r \dot{\xi} - p \dot{\zeta} \\ 1/2 A_{C,z} &= p \dot{\eta} - q \dot{\xi} \end{cases}$$

Si riconosce immediatamente come le precedenti espressioni altro non siano che le componenti del prodotto vettoriale tra il vettore di componenti p, q ed r , ed il vettore di componenti $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ e $\dot{\zeta}$. Il primo di questi due fattori è la velocità angolare ω , il secondo è la velocità relativa V_R ; possiamo, quindi, infine porre:

$$A_C = 2\omega \wedge V_R$$

La formula (3.15), esprime il teorema di Coriolis.

3.11 Determinazione del significato di A_C mediante considerazioni vettoriali

Al teorema di Coriolis si può giungere anche, più facilmente, mediante considerazioni vettoriali.

Essendo date le due terne, fissa e mobile, di riferimento ed il punto P , mobile rispetto ad entrambi, sappiamo che è:

$$V = V_T + V_R$$

ma, d'altra parte, per le considerazioni svolte nella Sezione 3.8, si ha:

$$V_T = V_\Omega + \omega \wedge (P - \Omega)$$

e risulta quindi:

$$V = V_{\Omega} + \omega \wedge (P - \Omega) + V_R$$

Quest'espressione, derivata rispetto a t , ci dà:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= A = \dot{V}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + V_R + \omega \wedge \frac{d(P - \Omega)}{dt} + \dot{V}_R = \\ &= \dot{V}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + \omega \wedge (\dot{P} - \dot{\Omega}) + \dot{V}_R \end{aligned} \quad (3.16)$$

Osservando, poi, che è:

$$\dot{P} = V = V_T + V_R; \quad \dot{\Omega} = V_{\Omega}$$

e sostituendo nella (3.16), risulta, per A :

$$\begin{aligned} A &= \dot{V}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + \omega \wedge (V_T + V_R - V_{\Omega}) + \dot{V}_R = \\ &= \dot{V}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + \omega \wedge (V_T - V_{\Omega}) + \omega \wedge V_R + \dot{V}_R \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dimostreremo che è:

$$\dot{V}_R = A_R + \omega \wedge V_R \quad (3.18)$$

Infatti V_R varia col tempo per due ragioni: 1) perché variano le sue componenti rispetto alla terna mobile; p. es. la componente ξ ha per derivata $\dot{\xi}$ che è la componente ξ di A_R , dunque quest'ultima compare nella derivata di V_R . 2) V_R varia anche perché è trascinato dal moto della terna mobile, e, siccome questa ruota, con velocità angolare ω , il contributo a \dot{V}_R dovuto a questa causa, si calcola analogamente a quanto si fa per la velocità di un punto in un moto rotatorio, ottenendo così $\omega \wedge V_R$. Sostituendo nella (3.17), per \dot{V}_R , il valore fornito dalla (3.18):

$$A = \dot{V}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + \omega \wedge (V_T - V_{\Omega}) + 2\omega \wedge V_R + A_R$$

in cui compaiono, esplicitamente la A_R e la A_C ; mentre A_T ci è data dalla somma dei primi tre addendi, il che si verifica immediatamente osservando che esso è la derivata di V_T che ha l'espressione

$$V_T = V_{\Omega} + \omega \wedge (P - \Omega).$$

Capitolo 4

DINAMICA DEL PUNTO

Finora ci siamo occupati del movimento di un punto astraendo dalle cause che lo producono, cause che diconsi forze, e che possono esser di tipo molto vario.

Gli esempi più noti sono: il peso, le forze muscolari, elettriche, magnetiche, elastiche, etc.. Per fissare le idee, noi supporremo di realizzare una forza mediante una molla tesa che uniremo, mediante una funicella, al corpo che essa deve muovere. Alla forza, resteranno, quindi, attribuiti una direzione (quella della funicella) ed un verso (quello che porta dal corpo alla molla); inoltre resterà attribuita anche una grandezza determinata dallo stato di tensione della molla, e la cui misura precisa verrà definita in seguito. A noi basta, per ora, avere un criterio per stabilire quando due forze siano eguali. Diremo, precisamente che le due forze sono eguali quando esse sono esercitate dalla stessa molla stesa alla stessa lunghezza. Supponiamo, dunque, di applicare una certa forza ad un punto materiale C , cioè ad un corpo di dimensioni molto piccole rispetto alle altre che intervengono nel problema. L'esperienza insegna, che, sotto l'azione della forza, il punto si muove di moto accelerato e che la sua accelerazione ha la direzione ed il verso della forza, e grandezza dipendente, unicamente, dal corpo e dalla grandezza della forze (e non dalla velocità del punto materiale).

In particolare, se la forza è nulla, è nulla anche l'accelerazione. Si ha, dunque, la legge d'inerzia:

Un corpo, non soggetto a forze, si muove di moto rettilineo uniforme.

L'esperienza ci dice, poi, che, applicando la medesima forza a corpi differenti, essi acquistano differenti accelerazioni. Per fissare le idee, si abbiano n corpi:

$$C_1, C_2, \dots, C_n,$$

e si faccia agire su di essi la forza F , essi acquisteranno n accelerazioni:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \tag{4.1}$$

in generale, differenti fra loro.

Si applichi ora, agli stessi corpi una seconda forza, F' , ed una terza, F'' , ambedue differenti da F e, tra di loro; avremo, per le corrispondenti accelerazioni:

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \quad (4.2)$$

$$A''_1, A''_2, \dots, A''_n. \quad (4.3)$$

Si osserva che le accelerazioni impresse da due qualsiasi forze, per es. F ed F' , agli n corpi considerati, sono proporzionali tra loro, e cioè:

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{A_2}{A'_2} = \dots = \frac{A_n}{A'_n}.$$

Parimenti, se facciamo agire varie forze, ad esempio le tre considerate più sopra, su due corpi, per es. C_1 e C_2 , abbiamo che i rapporti tra le accelerazioni impresse ad essi da ciascuna delle forze, sono eguali tra loro:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A'_1}{A'_2} = \frac{A''_1}{A''_2}.$$

Abbiamo visto che le successioni di grandezze (4.1), (4.2), (4.3), sono proporzionali tra loro; questo vuol dire che, mentre i valori delle accelerazioni dipendono dalle forze F, F' ed F'' , i loro rapporti, invece, no. Cioè:

$$A_1 : A_2 : \dots : A_n = A'_1 : A'_2 : \dots : A'_n = A''_1 : A''_2 : \dots : A''_n$$

Tali rapporti dipenderanno, dunque, soltanto dai corpi C_1, C_2, \dots, C_n ; potremo, perciò, introdurre certe grandezze

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

caratteristiche per i vari corpi, tali che si abbia:

$$A_1 : A_2 : \dots : A_n = A'_1 : A'_2 : \dots : A'_n = A''_1 : A''_2 : \dots : A''_n = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \dots : \frac{1}{m_n}.$$

Le grandezze, m_1, m_2, \dots, m_n , risultano, dunque, inversamente proporzionali alle accelerazioni che assumono i corpi, C_1, C_2, \dots, C_n , sotto l'azione di una stessa forza. Queste grandezze si chiamano masse.

Le considerazioni precedenti non definiscono i valori assoluti delle masse, ma, solamente, i loro rapporti; per definirne anche i valori assoluti, bisogna fissare un' unità di massa. Scegliamo, perciò, come uguale all'unità, la massa m_0 di un corpo campione C_0 (ordinariamente si sceglie, come corpo

campione, il grammo¹). Per misurare la massa di un corpo qualsiasi C , si può procedere nel modo seguente: si applichi una stessa forza, F , a C_0 ed a C ; dette, A_0 ed A , le accelerazioni corrispondenti, avremo

$$\frac{A}{A_0} = \frac{m_0}{m},$$

e poiché è:

$$m_0 = 1$$

risulta:

$$m = \frac{A_0}{A}$$

Nella pratica, naturalmente, si ricorre ad altri metodi.

Resta ancora da definire la misura di una forza F ; perciò, supponiamo di applicarla ai soliti n corpi:

$$C_1, C_2, \dots, C_n,$$

di masse

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

ed essendo

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

le accelerazioni, che essi acquistano, avremo

$$\frac{A_1}{1/m_1} = \frac{A_2}{1/m_2} = \dots = \frac{A_n}{1/m_n}. \quad (4.4)$$

Analogamente, applicando ai medesimi corpi la forza F' :

$$\frac{A'_1}{1/m_1} = \frac{A'_2}{1/m_2} = \dots = \frac{A'_n}{1/m_n}. \quad (4.5)$$

cioè, tanto nel caso in cui si applichi la forza F , quanto nel caso in cui si applichi la forza F' , risulta l'eguaglianza dei rapporti tra l'accelerazione di ciascun corpo e l'inverso della sua massa.

Osservando, poi, che i rapporti (4.4) e (4.5) si possono scrivere identicamente:

$$\begin{aligned} m_1 A_1 &= m_2 A_2 = \dots = m_n A_n \\ m_1 A'_1 &= m_2 A'_2 = \dots = m_n A'_n \end{aligned}$$

¹ Il grammo era la millesima parte della massa del campione di 1Kg conservato nell'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure a Sèvres, Parigi. [Ndr]

si vede come il prodotto della massa di un corpo per la sua accelerazione non dipenda dal corpo, ma, soltanto dalla forza ad esso applicata; potremo, quindi, scegliere questo prodotto come misura della forza e porre, cioè:

$$F = mA.$$

Siccome abbiamo visto che l' A ha la stessa direzione e lo stesso verso della forza, potremo dare all'espressione precedente il significato vettoriale:

$$\vec{F} = m\vec{A},$$

che costituisce l'equazione fondamentale della dinamica del punto.

4.1 Parallelogramma delle forze

L'esperienza dimostra che, dato un corpo sottoposto simultaneamente all'azione di n forze qualsiasi, l'accelerazione risultante che esso assume è uguale alla somma vettoriale delle singole accelerazioni che ciascuna forza gli imprimerebbe da sola. Nel caso particolare di due sole forze, F_1 ed F_2 , applicate ad un corpo di massa m , dette A_1 ed A_2 le corrispondenti accelerazioni, avremo:

$$F_1 = mA_1, \quad F_2 = mA_2;$$

ma siccome l'accelerazione, A , impressa dall'azione simultanea di F_1 ed F_2 , ci è data da:

$$A = A_1 + A_2,$$

ne segue:

$$F_1 + F_2 = m(A_1 + A_2) = mA,$$

cioè, l'azione di F_1 ed F_2 è equivalente all'azione di un'unica forza:

$$F = F_1 + F_2,$$

ordinaria somma vettoriale.

Analogamente, nel caso di un numero qualsiasi di forze, si trova:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

4.2 Determinazione del moto di un corpo conoscendone la massa e le forze agenti su di esso

Si presenta, ora, il problema di determinare il movimento di un corpo essendo data la massa e le forze agenti su di esso. Sia, dunque, nel caso generale, la forza F , data in funzione del tempo, della posizione e della velocità del punto. Avremo, per le componenti di essa:

$$F \equiv \begin{cases} F_x &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_y &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_z &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases}$$

e, poiché m è nota, potremo porre:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni differenziali ci dà i valori di x, y e z , mediante tre integrali in cui figurano 6 costanti arbitrarie. Sarà dunque:

$$\begin{cases} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (4.6)$$

Al solito, per la determinazione delle 6 costanti, occorre dare altrettante condizioni.

4.3 Moto dei gravi

Sappiamo che tutti i corpi che cadono liberamente nel moto si muovono con la stessa accelerazione, $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ circa. Tale accelerazione è dovuta ad una forza, P che dicesi peso. Per l'equazione fondamentale della dinamica, sarà:

$$P = mg.$$

Scegliendo l'asse z verticale e diretto verso l'alto, le componenti di P saranno:

$$P \equiv \begin{cases} P_x &= 0 \\ P_y &= 0 \\ P_z &= -mg. \end{cases}$$

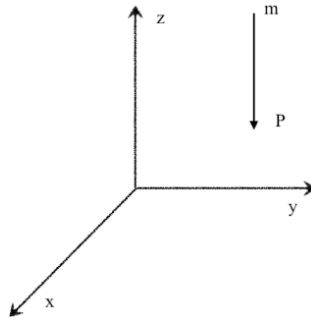


Figura 4.1: L'azione della forza peso P sulla massa m .

Applicando, alle relazioni precedenti, l'equazione fondamentale della dinamica, otteniamo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg, \end{cases}$$

da cui, dividendo per m :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g, \quad (4.7)$$

relazioni, queste, in cui non figura m , il che era da prevedersi sapendo che, nel vuoto, i corpi cadono tutti nello stesso modo, qualunque sia la loro massa. Integrando la (4.7), otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = C_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = C_2 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -gt + C_3, \end{cases} \quad (4.8)$$

da cui, moltiplicando per dt , e integrando nuovamente:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ y = C_2 t + C_5 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_6, \end{cases} \quad (4.9)$$

Per determinare le sei costanti, se per $t = t_0$, è:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

ponendo, dapprima, nella (4.8) i valori dati dalla (4.11) otteniamo:

$$\dot{x}_0 = C_1, \quad \dot{y}_0 = C_2, \quad \dot{z}_0 = C_3$$

ed operando analogamente sulla (4.9), ponendovi $t = 0$, e sostituendovi, quindi, i valori forniti dalle (4.10), ricaviamo

$$x_0 = C_4, \quad y_0 = C_5, \quad z_0 = C_6.$$

Con ciò resta pienamente determinato il moto del punto. Troviamo, ora, l'equazione della traiettoria. A tal uopo, sostituendo nella (4.9) i valori più sopra trovato per le costanti:

$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t + z_0, \end{cases} \quad (4.12)$$

Scegliendo, poi, come origine della terna d'assi, la posizione iniziale del mobile, sarà:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Mantenendo l'asse z verticale, poniamo l'asse x in modo che la velocità del punto giaccia nel piano xz . Avremo allora:

$$\dot{y}_0 = 0$$

e, perciò, le (4.12) divengono:

$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t, \end{cases} \quad (4.13)$$

Da quest'ultime relazioni si vede, anzitutto, come la traiettoria si svolga, per intero, in un piano verticale. Procediamo, ora, all'eliminazione di t . Dalla prima delle precedenti espressioni, ricaviamo:

$$t = \frac{x}{\dot{x}_0},$$

e sostituendo questo valore nella terza:

$$z = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\dot{x}_0^2} + \dot{z}_0 \frac{x}{\dot{x}_0} \quad (4.14)$$

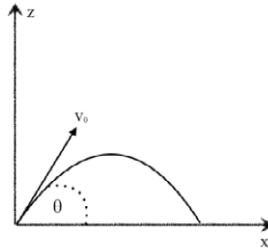


Figura 4.2: Il moto di un grave con velocità iniziale v_0 .

Vediamo, ora, di dare all'equazione precedente, che rappresenta una parabola nel piano xz , una forma appropriata. Detta v_0 la velocità iniziale, e θ l'angolo di essa con l'asse delle x , avremo:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \theta \\ \dot{y} = v_0 \sin \theta. \end{cases} \quad (4.15)$$

Sostituendo questi valori nella (4.14):

$$z = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

Uguagliando a zero la precedente, avremo un'equazione le cui radici rappresentano le intersezioni della traiettoria con l'asse delle x :

$$-\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta = 0$$

Una soluzione evidente è: $x = 0$, che corrisponde al punto di partenza; per trovare l'altra, dividiamo ambo i membri per x e, con semplici passaggi, otteniamo

$$\frac{g}{2} \frac{x}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta \quad (4.16)$$

e, infine:

$$\begin{aligned} x &= 2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2 \theta \tan \theta = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Osserviamo, in particolare, che, essendo: $v_0 = \text{cost.}$, la x avrà il suo massimo valore per: $\sin 2\theta = 1$, cioè, per: $\theta = \pi/4$. Nella pratica della balistica, tale angolo è un poco minore per la resistenza opposta dall'aria.

4.4 Lavoro

Sia F una forza costante applicata ad un punto P , e sia $(Q - P)$ lo spostamento del punto in un certo tempo; dicesi lavoro l'espressione scalare:

$$L = |(Q - P)| \cdot |F| \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra $(Q - P)$ ed F .

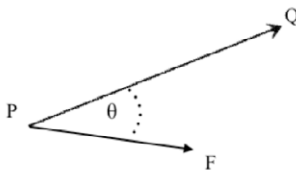


Figura 4.3: L'angolo tra la forza F e lo spostamento $Q - P$.

Il segno del lavoro coincide con quello di $\cos \theta$, ed è, quindi, positivo o negativo, secondoché il senso dello spostamento è concorde o discorde con quello della forza.

Vettorialmente sarà:

$$L = (Q - P) \times F,$$

espressione, questa, valida soltanto nel caso che F sia costante.

Se invece F varia in funzione dello spostamento, consideriamo uno spostamento infinitesimo ds , tale da potersi ritenere lungo esso: $F = \text{cost.}$. Avremo, allora, per il lavoro elementare, dL :

$$dL = |\overline{P_1 P_2}| \cdot |F| \cos \theta = ds |F| \cos \theta = F \times ds,$$

ove P_1 e P_2 sono gli estremi di ds .

Il lavoro totale ci è dato, allora, dalla somma di infiniti termini del tipo precedente, sarà:

$$L = \int dL = \int |F| \cos \theta ds = \int F \times ds.$$

Scrivendo esplicitamente il prodotto scalare, l'espressione precedente assume la forma

$$L = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

4.5 Forza viva

Si definisce forza viva (o energia cinetica) di un punto materiale di massa m , l'espressione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2,$$

dove v rappresenta la velocità del punto.

Teorema della forza viva.
Dalla relazione vettoriale:

$$F = mA,$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri per V , si avrà:

$$mA \times V = F \times V,$$

ovvero, valendo per il prodotto scalare la proprietà commutativa:

$$mV \times \frac{dV}{dt} = F \times V,$$

e, identicamente, essendo:

$$mV \times \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{dV^2}{dt}$$

avremo infine (essendo $1/2 m = \text{cost.}$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} V^2 \right) = F \times V,$$

relazione, questa, che vale per ogni valore del tempo. Moltiplicando ambo i membri della precedente per dt , e integrando tra due tempi, t_1 e t_2 , otterremo:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F \times V. \quad (4.17)$$

Notiamo, ora, che essendo identicamente:

$$L_{PQ} = \int_P^Q F(s) \times V dt$$

(perché è: $ds = V dt$), il secondo membro della precedente espressione rappresenta, dunque, il lavoro compiuto dalla forza mentre il punto P passa da P in Q .

Tenendo conto di ciò, la (4.17) diventa:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = L_{t_1, t_2}.$$

Cioè: l'aumento della forza viva di un punto dal momento iniziale al momento finale del moto, è uguale al lavoro eseguito dalla forza agente sul punto, durante l'intervallo di tempo considerato.

Scalarmente, per le componenti dell'equazione fondamentale, $F = mA$, avremo:

$$m\ddot{x} = F_x \quad (4.18)$$

$$m\ddot{y} = F_y \quad (4.19)$$

$$m\ddot{z} = F_z. \quad (4.20)$$

Moltiplicando le precedenti per dx , dy e dz , rispettivamente, e sommandole membro a membro:

$$m(\ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.21)$$

Osserviamo, ora, che è:

$$\ddot{x}dx = \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \frac{dx}{dt} \dot{x} dt = d\dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{1}{2} d\dot{x}^2,$$

e, analogamente, per $\ddot{y}dy$ e per $\ddot{z}dz$.

Senza'altro sostituendo nella (4.21), si ottiene:

$$\frac{m}{2}(d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2 + d\dot{z}^2) = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

o anche identicamente:

$$d\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.22)$$

Notando, poi, che è:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2$$

e, sostituendo nella (4.22), si ha infine:

$$d\left(\frac{m}{2}V^2\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Integrando quest'ultima tra i valori, t_1 e t_2 , del tempo avremo:

$$\frac{m}{2}V_2^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = L_{t_1 t_2}$$

In particolare, se è $V_1 = 0$, risulta:

$$\frac{m}{2}V_2^2 = L_{t_1 t_2},$$

e, in generale:

$$\frac{m}{2}V^2 = L_{t_1 t_2} + \frac{m}{2}V_0^2,$$

cioè, mediante quest'ultima equazione, data la velocità iniziale, V_0 , si può, conoscendo L , determinare la velocità in un istante qualsiasi.

La determinazione di L si presenta particolarmente semplice nel caso delle forze che ammettono potenziale.

4.6 Potenziale

Per definire il concetto di potenziale, supponiamo data una forza F , funzione della posizione del punto:

$$F = F(x, y, z),$$

in modo che, per ogni posizione di questo, essa sia definita in grandezza, direzione e verso. Quella parte dello spazio entro cui si conosce F in funzione di x, y, z , dicesi campo della forza.

Se P e Q sono due punti del campo, ed avviene che il lavoro eseguito, per portare il punto da P in Q , vari al variare del cammino percorso, il campo non ammette potenziale.

Se, invece, il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita per trasportare il punto da P in Q , il campo ammette potenziale. Il campo della forza peso, ad esempio, ammette potenziale. Infatti, dati due piani orizzontali alla distanza Δh , per i due lavori eseguiti, mentre il punto passa da un piano all'altro, seguendo due diverse traiettorie, risulteranno le espressioni,

$$\begin{aligned} L_{\Delta s_1} &= |P| \cdot \Delta s_1 \cos \theta_1 \\ L_{\Delta s_2} &= |P| \cdot \Delta s_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

essendo θ_1 e θ_2 gli angoli che la direzione della forza (perpendicolare ai due piani orizzontali) fa con gli elementi della traiettoria Δs_1 e Δs_2 rispettivamente; ma essendo sempre, indipendentemente dai valori di Δs e θ :

$$\Delta s \cos \theta = \Delta h,$$

risulta:

$$L = Ph.$$

In quest'ultima espressione non compare più la traiettoria; resta così dimostrato che il campo della forza peso ammette potenziale.

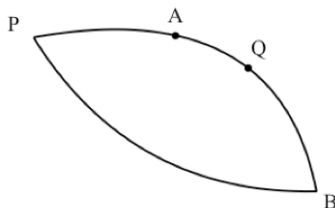


Figura 4.4: In un potenziale il lavoro per andare da P a Q è eguale ed opposto a quello per andare da Q a P .

In un campo che ammette potenziale, se il punto si muove su di una traiettoria chiusa qualsiasi (un cerchio, p.es.) il lavoro è nullo.

Infatti, scelti due punti qualsiasi, P e Q , il lavoro compiuto nel passare da P a Q , sarà L , e, poiché il campo ammette potenziale, il lavoro compiuto per andare da Q a P , (dipendendo, esso, unicamente, dalle posizioni, iniziale e finale) sarà $-L$. Risulta, perciò, il lavoro totale:

$$L - L = 0.$$

Questa proprietà è caratteristica dei campi che ammettono potenziale. Possiamo, infatti, dimostrare che, se il lavoro compiuto per far percorrere ad un punto il cammino chiuso, PAQBP, è nullo, il campo ammette potenziale.

Se L_1 è il lavoro fatto nell'andare da P a Q , passando per A , ed L_2 il lavoro eseguito nell'andare da Q a P , passando per B , è, per ipotesi:

$$L_1 + L_2 = 0,$$

ovvero:

$$L_1 = -L_2,$$

il che dimostra come il lavoro fatto, per andare da P a Q , seguendo due percorsi qualunque PAQ e PBQ , sia eguale.

Per dare un campo di forza, come già si è visto, occorre dare la forza in funzione della posizione del punto.

Supponiamo [che sia] dato un punto che assuma, successivamente, le posizioni P e Q , e calcoliamo il lavoro eseguito da una forza, F , per portarlo da P in Q . Questo lavoro, L , varierà, in generale, al variare della traiettoria.

Detti: L_1 ed L_2 , i lavori eseguiti da F per trasportare il punto da P in Q , seguendo due differenti traiettorie; nei campi che ammettono potenziale risulterà, invece:

$$L_1 = L_2 \tag{4.24}$$

Considerando, ora, un punto fisso, O , ed uno mobile, P , definiscesi potenziale il lavoro che le forze del campo fanno per spostare il punto dalla posizione O alla posizione P ; il potenziale ci è dato, dunque, soltanto dalle posizioni, O e P , del punto senza che in esso compaia affatto la traiettoria. Siccome, poi, supponiamo il punto O fisso, il lavoro predetto sarà funzione solo della posizione P , e, cioè:

$$L(O, P) = U(P).$$

Questa funzione dicesi potenziale.

Dato, ora, un altro punto, Q , calcoliamo il lavoro che si compie per portare il punto da P a Q . Siccome tale lavoro non dipende dalla traiettoria seguita, potremo andare da P a Q passando per O . Si avrà, dunque:

$$L_{P,Q} = L_{P,O} + L_{O,Q} = -L_{O,P} + L_{O,Q} = U(Q) - U(P),$$

epperò, il lavoro eseguito per andare da P a Q , è eguale alla differenza tra il potenziale di Q ed il potenziale di P .

Segue, in particolare, che, se come punto di riferimento, si fosse preso un altro punto, O' , invece di O , il potenziale, riferito ad O' , sarebbe differito, da quello relativo ad O , per una costante.

4.7 Determinazione delle forze di un campo, essendo noto il potenziale

Si presenta, ora, il problema di determinare le forze di un campo, essendo dato il potenziale. Prefissata la solita terna di riferimento ed un punto P , di coordinate x, y, z , sia dato il potenziale, $U(P)$, nel punto. Passiamo a determinare le componenti della forza agente sul punto. Per determinare, ad esempio, F_x , spostiamo il punto di un tratto infinitesimo dx nella direzione parallela all'asse x , e sia Q la nuova posizione assunta da esso. Le coordinate di Q saranno:

$$x + dx, y, z.$$

Per quanto si è visto, il lavoro compiuto sarà:

$$L = U(Q) - U(P) = U(x + dx, y, z) - U(x, y, z).$$

Ma, per dx infinitesimo, è (a meno di infinitesimi di ordine superiore)²:

$$U(x + dx, y, z) - U(x, y, z) = \frac{dU}{dx} dx.$$

D'altra parte, possiamo calcolare direttamente il lavoro L , come prodotto dello spostamento elementare, dx , per la componente F_x della forza. Avremo, dunque:

$$\frac{dU}{dx} dx = F_x dx,$$

e dividendo per dx :

$$\frac{dU}{dx} = F_x.$$

Analogamente, si ottiene:

$$\frac{dU}{dy} = F_y \quad \text{e} \quad \frac{dU}{dz} = F_z.$$

Le componenti della forza, sono dunque date dalle derivate parziali del potenziale.

²Gli autori utilizzano per il simbolo di derivata parziale sia il simbolo d che ∂ .

4.8 Determinare se un dato campo di forze, ammette, o no, potenziale

Cerchiamo, ora, di riconoscere come si possa determinare se un campo ammette, o no, potenziale. Siano le forze date in funzione della posizione:

$$F \equiv \begin{cases} F_x & = F_x(x, y, z) \\ F_y & = F_y(x, y, z) \\ F_z & = F_z(x, y, z), \end{cases}$$

Se il campo ammette potenziale, evidentemente, dovrà aversi eguaglianza fra le suddette componenti della forza e le derivate parziali del potenziale rispetto ad x, y, z rispettivamente. Dovrà esser dunque:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) & = \frac{dU}{dx} \\ F_y(x, y, z) & = \frac{dU}{dy} \\ F_z(x, y, z) & = \frac{dU}{dz}. \end{cases}$$

Osserviamo, ora, che, se deriviamo la seconda delle precedenti rispetto a z e la terza rispetto ad y , sottraendo la terza dalla seconda si ottiene:

$$\frac{dF_y}{dz} - \frac{dF_z}{dy} = \frac{dU}{dydz} - \frac{dU}{dzdy} = 0.$$

(per il teorema delle derivate parziali: $dU/dydz = dU/dzdy$). Dovrà, dunque, essere necessariamente:

$$\frac{dF_y}{dz} = \frac{dF_z}{dy},$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{dF_z}{dx} &= \frac{dF_x}{dz}, \\ \frac{dF_y}{dx} &= \frac{dF_x}{dy}. \end{aligned}$$

Condizione, questa, necessaria (e che si potrebbe dimostrare anche sufficiente) per l'esistenza del potenziale nel campo dato.

In genere, i campi di forza uniformi ammettono potenziale. Ne è un esempio il peso. In questo caso, infatti, supponendo la forza diretta secondo il verso negativo dell'asse z , avremo:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg$$

e quindi:

$$F_x = \frac{dU}{dx} = 0, \quad F_y = \frac{dU}{dy} = 0, \quad F_z = \frac{dU}{dz} = -mg.$$

La U risulta, dunque, data come funzione della sola z . Integrando le tre precedenti relazioni, avremo:

$$U = -mgz$$

(le tre costanti che comparirebbero, sono superflue, poiché, considerandosi generalmente differenze di potenziale, esse si eliminano).

Passiamo, ora, a dimostrare che anche i campi di forze centrali ammettono potenziale.

Sappiamo essere $|F| = f(r)$, quindi risulterà, anzitutto, che la forza sarà costante sulla sfera di raggio r . Riguardo ai coseni direttori di F , essendo x, y, z , le coordinate di P , essi ci risulteranno dati da:

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r},$$

e, quindi, per le componenti di F avremo:

$$\begin{cases} F_x &= |F| \frac{x}{r} = f(r) \frac{x}{r} \\ F_y &= |F| \frac{y}{r} = f(r) \frac{y}{r} \\ F_z &= |F| \frac{z}{r} = f(r) \frac{z}{r}, \end{cases}$$

Se il campo ammette potenziale sappiamo che deve essere

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{y}{r} f(r) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{z}{r} f(r) \right]. \quad (4.25)$$

Per ciò che riguarda il primo membro, osserviamo che esso si può, identicamente, scrivere:

$$y \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(r)}{r} \right]. \quad (4.26)$$

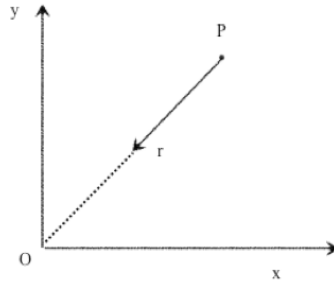


Figura 4.5: Potenziale centrale.

Ma, essendo: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, derivando, rispetto a z , si avrà:

$$2r \frac{\partial r}{\partial z} = 2z,$$

ossia:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

e sostituendo nella (4.26)

$$y \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = \frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right]. \quad (4.27)$$

Ponendo a primo membro, nella (4.25), il secondo membro di quest'ultima, otteniamo:

$$\frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = z \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f(r)}{r} \right].$$

Ed essendo, analogamente:

$$z \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = z \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = z \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right]$$

risulterà infine:

$$\frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = \frac{zy}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right],$$

che è l'identità cercata.

In modo analogo avremo altre due relazioni simili alla precedente; potremo, in conclusione, porre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{y}{r} f(r) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{z}{r} f(r) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{r} f(r) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{r} f(r) \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x}{r} f(r) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{z}{r} f(r) \right]\end{aligned}$$

relazioni che dimostrano come i campi di forze centrali ammettano potenziale.

Di ciò possiamo dare, anche, una dimostrazione geometrica. Consideriamo, infatti, una sfera di raggio r qualsiasi, col centro nel punto O (centro delle forze centrali), tale che il punto P , su cui agiscono le forze del campo, sia racchiuso in essa. Consideriamo, inoltre, una sfera concentrica alla precedente e sia $r + dr$ il suo raggio.

Proponiamoci di calcolare il lavoro infinitesimo, dL , che le forze del campo compiono mentre il punto passa dalla sfera di raggio r a quella di raggio $r + dr$, supponendo che il punto passi dalla posizione P , interna alle due sfere, alla posizione Q esterna ad esse, seguendo una traiettoria generica, la quale attraverserà le due sfere, ed una parte di essa rimarrà chiusa fra queste. Per la definizione di lavoro, essendo, F , la forza:

$$dL = |F| ds \cdot \cos \theta,$$

dove ds è l'elemento di traiettoria compreso fra le due sfere, e θ l'angolo compreso tra ds ed il raggio condotto per uno dei suoi estremi. Ma, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si può porre:

$$dr = ds \cos \theta$$

ed avremo, quindi, per dL :

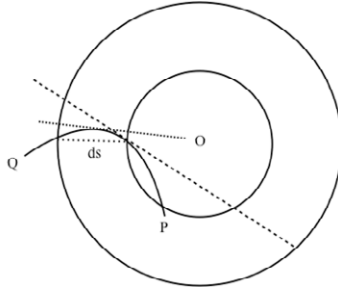
$$dL = f(r) dr,$$

essendo la forza considerata, funzione della distanza, r , dal centro O .

Per il lavoro eseguito, tra i valori r_1 ed r_2 , di r , avremo:

$$L = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr,$$

ed anche in questo caso il lavoro dipende unicamente dalle posizioni, iniziale e finale del punto. Per calcolare, ora, il potenziale, fissiamo il punto

Figura 4.6: La relazione tra ds e dr .

di riferimento in O , e, se P è il punto variabile, di cui si vuole il potenziale, avremo:

$$U(P) = L_{O,P} = \int_0^r f(r) dr,$$

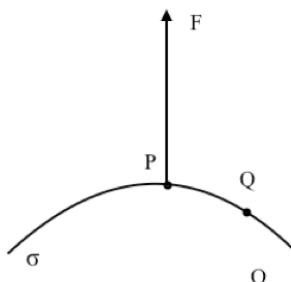
e, per il potenziale del punto P , si avrà, senz'altro:

$$U(P) = \int f(r) dr,$$

dato che si può considerare il solo integrale indefinito, poiché i potenziali corrispondenti alle varie posizioni di P differiscono tra loro unicamente per una costante additiva.

4.9 Superfici equipotenziali

Diconsi superfici equipotenziali quelle su cui il potenziale è costante; per ogni punto di un campo di forza passa una, ed una sola, di tali superfici. Per la relazione tra lavoro e potenziale, risulta, dunque, che, mentre il punto si muove su di una superficie equipotenziale, le forze del campo non compiono lavoro. se il punto si sposta da P ad una posizione infinitamente vicina, Q , posta sopra la superficie equipotenziale σ , passante per P , il lavoro effettuato, per quanto più sopra si è detto, risulta nullo; dovrà, quindi, la forza essere perpendicolare allo spostamento, cioè perpendicolare alla superficie equipotenziale considerata.

Figura 4.7: La superficie equipotenziale σ .

4.10 Principio di conservazione dell'energia nella dinamica del punto

Si può, ora, stabilire una relazione che lega potenziale e forza viva. Sappiamo, dal teorema della forza viva, che sussiste l'identità:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = L_{1,2}.$$

dove V_1 e V_2 sono le velocità del punto di massa m , nelle posizioni P_1 e P_2 , rispettivamente ed $L_{1,2}$ è il lavoro compiuto per portare il punto da P_1 a P_2 .

Se il punto si muove in un campo che ammette potenziale, risulterà:

$$L_{1,2} = U(P_2) - U(P_1),$$

e, quindi:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = U(P_2) - U(P_1).$$

Se P_1 è fisso la precedente espressione diventa:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - U(P_2) = \frac{1}{2}mV_1^2 - U(P_1),$$

il che, chiaramente, ci dice che, nel passare da P_1 a P_2 , la differenza tra l'energia cinetica (forza viva) e il potenziale in P_2 , è rimasta costante. Se chiamiamo energia potenziale il potenziale cambiato di segno, e la indichiamo col simbolo $W(P)$, le relazioni precedenti divengono:

$$\frac{1}{2}mV^2 + W(P) = \text{cost.}$$

Si conclude, perciò, che in un campo che ammette potenziale, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rimane costante. Questa somma dicesi energia totale del punto.

Se consideriamo, ad esempio, l'energia totale di un punto materiale di massa m , posto ad una certa altezza dal suolo, e soggetto alla forza di gravità, vediamo che, mentre il punto è fermo, essendo la sua velocità, V , nulla, l'energia totale è uguale alla sola energia potenziale che il punto possiede in quella posizione. Mentre, però, esso scende verso il suolo, cresce V e, conseguentemente, cresce $1/2mV^2$, mentre diminuisce $W(P)$, finché, quando il punto giunge al suolo, è:

$$W(P) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}mV^2 = \text{energia tot. ;}$$

l'energia potenziale iniziale si sarà, dunque, trasformata in energia cinetica.

Le energie, cinetica e potenziale, non sono le uniche forme di energia che si considerano nella fisica. P.es., nel caso precedente, quando il corpo urta contro il suolo, la sua energia cinetica si trasforma in energia d'altro genere, in particolare in calore.

4.11 *Quantità di moto e impulso*

Dato un punto, di massa m e di velocità V , dicesi quantità di moto il vettore:

$$\vec{q} = mV.$$

Dicesi impulso di una forza, F , il prodotto di questa per il tempo durante il quale essa agisce.

Per una forza costante (in grandezza, direzione e senso), l'impulso, I , che è, dunque, un vettore, ci è dato, per una forza agente durante il tempo t , dalla relazione:

$$I = Ft. \tag{4.28}$$

Se la forza è variabile e, se, ad esempio, essa è funzione del tempo, potremo scomporre l'intervallo di tempo, durante il quale essa agisce, in tempuscoli infinitesimi, tali che, per la durata di uno qualsiasi di essi, la forza possa considerarsi come costante. L'impulso, tra due valori generici del tempo, t_1

e t_2 , ci sarà, allora, espresso da:

$$I_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt.$$

Si noti che il precedente è un integrale vettoriale; per calcolarlo bisognerà, perciò, calcolare i tre integrali scalari:

$$\begin{cases} I_{x,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt \\ I_{y,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt \\ I_{z,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t) dt \end{cases}$$

Analogamente a quanto si è fatto per l'energia cinetica e per il lavoro, vediamo di stabilire una relazione che leghi i vettori quantità di moto ed impulso. Dall'equazione fondamentale, ricaviamo identicamente:

$$m \frac{dV}{dt} = F$$

e, moltiplicando ambo i membri della precedente per dt :

$$m dV = F dt.$$

Quest'espressione, integrata tra t_1 e t_2 , ci dà:

$$mV_2 - mV_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt = I_{1,2}.$$

Cioè: la variazione della quantità di moto è uguale all'impulso.

Scalarmente, si giunge allo stesso risultato. Infatti, proiettando l'equazione fondamentale della dinamica sugli assi, avremo:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z, \end{cases}$$

e, limitandoci, per semplicità, a considerare solo la prima delle precedenti, osserviamo che essa può scriversi identicamente:

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x,$$

ovvero:

$$m d\dot{x} = F_x dt,$$

espressione, questa, che integrata tra t_1 e t_2 , ci dà:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

che è la componente, secondo l'asse x , dell'equazione vettoriale già considerata:

$$q_2 - q_1 = I_{1,2}.$$

4.12 Moto dell'oscillatore isocrono

Consideriamo un punto materiale, P , di massa m , soggetto ad una forza diretta verso un punto O , e proporzionale alla distanza \overline{OP} . Se, ad un istante generico, il punto si trova in una certa posizione P_x , e la sua velocità è parallela alla retta $\overline{OP_x}$, esso si muoverà su questa retta (infatti, per il principio di ragion sufficiente, non vi sarebbe ragione alcuna, perché, essendo soggetto ad una forza diretta verso O , uscisse dalla traiettoria rettilinea $\overline{OP_x}$).

Scegliendo, come asse delle ascisse, la retta in parola, orientata da O verso P_x , l'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{x} = F = -\kappa x$$

ovvero, identicamente:

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m} x = 0.$$

Sappiamo (vedi (2.28)) che l'equazione precedente ammette un integrale generale della forma:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t - \alpha\right) \quad (4.29)$$

dove x_0 ed α sono delle costanti, per determinare le quali basta conoscere la posizione e la velocità iniziali del punto. Se, per $t = 0$, è, p.es.³:

$$x = a \quad \text{e,} \quad \text{quindi} \quad \dot{x} = 0,$$

³Com'è ovvio, $\dot{x} = 0$ non è conseguenza di $x = a$. Le due condizioni su posizione e velocità al tempo $t = 0$ sono indipendenti. [NdR]

derivando la (4.29), e ponendovi $t = 0$, otteniamo:

$$\dot{x} = -x_0 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \alpha = 0$$

da cui $\alpha = 0$. Ponendo, poi, nella (4.29), $t = 0$ e $x = a$, e tenendo presente il valore ora ricavato per α , abbiamo:

$$a = x_0 \cos 0 = x_0.$$

Riassumendo, é, dunque:

$$x_0 = a; \quad \alpha = 0$$

Per il periodo, T , risulterà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}};$$

Per la frequenza, ν , infine:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

4.13 Moto dell'oscillatore smorzato

Diconsi moti oscillatori smorzati quelli in cui, oltre ad una forza proporzionale allo spostamento, agisce sul punto materiale un'altra forza che ha direzione uguale, senso opposto e grandezza proporzionale alla velocità.

Indicando con h la costante di proporzionalità relativa a questa nuova forza, l'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{x} = -\kappa x - h\dot{x},$$

Oppure, identicamente:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + \kappa x = 0. \quad (4.30)$$

Per risolvere quest'equazione differenziale, poniamo:

$$x = e^{\alpha t}$$

con $\alpha =$ costante da determinarsi.

Derivando due volte:

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}; \quad \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Sostituendo nella (4.30) tali valori, otteniamo:

$$m\alpha^2 e^{\alpha t} + h\alpha e^{\alpha t} + \kappa e^{\alpha t} = 0,$$

e dividendo per $e^{\alpha t}$ (che è sempre diverso da zero):

$$m\alpha^2 + h\alpha + \kappa = 0. \quad (4.31)$$

Così la risoluzione dell'equazione differenziale (4.30) è ricondotta a quella di un'equazione ordinaria di secondo grado, che è l'equazione caratteristica della (4.30). Il discriminante della (4.31) è:

$$\Delta = \sqrt{h^2 - 4m\kappa},$$

e, quindi, le radici, α_1 e α_2 , di essa hanno la forma:

$$\alpha_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4m\kappa}}{2m}, \quad \alpha_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - 4m\kappa}}{2m}. \quad (4.32)$$

Avremo, dunque, i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}, \quad x_2 = e^{\alpha_2 t},$$

da cui si ricava l'integrale generale:

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}, \quad (4.33)$$

con A e B costanti.

Esaminiamo, ora, separatamente, il caso in cui sia $\Delta > 0$ e quello in cui sia $\Delta < 0$.

Nel primo caso le due radici sono entrambe negative, il che si deduce immediatamente dal fatto che l'equazione (4.31) presenta due permanenze di segno e, quindi, la regola di Cartesio ci dice essere le sue radici negative. La (4.33), ci dice quindi, che, essendo α_1 ed α_2 negative, mentre t cresce indefinitamente, x tende a zero. Il grafico del movimento è quello della figura. Questo tipo di moto si dice aperiodico.

Esaminiamo, ora, il caso in cui Δ è minore di zero; le radici, α_1 e α_2 , immaginarie coniugate hanno la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{h}{2m} + i \frac{\sqrt{4m\kappa - h^2}}{2m} \\ \alpha_2 = -\frac{h}{2m} - i \frac{\sqrt{4m\kappa - h^2}}{2m} \end{array} \right.$$

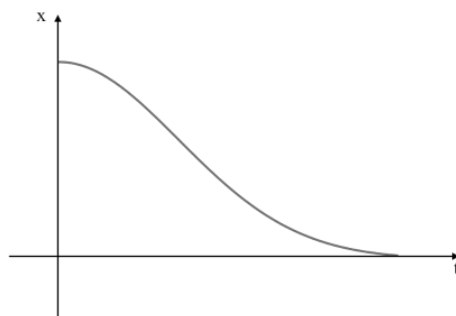


Figura 4.8: Grafico di un moto aperiodico.

dove: $4m\kappa - h^2 > 0$.

Ponendo, per brevità:

$$\frac{h}{2m} = \beta \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{4m\kappa - h^2}}{2m} = \gamma,$$

avremo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\beta + i\gamma \\ \alpha_2 = -\beta - i\gamma, \end{cases}$$

e, quindi, i due integrali particolari, x_1 ed x_2 , divengono:

$$\begin{cases} x_1 = e^{(-\beta+i\gamma)t} \\ x_2 = e^{(-\beta-i\gamma)t}, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-\beta t + i\gamma t} \\ x_2 = e^{-\beta t - i\gamma t}. \end{cases}$$

È chiaro, che, invece di fare una combinazione lineare dei due integrali precedenti, si può, identicamente, fare una combinazione lineare della loro somma e della loro differenza. La somma è:

$$x_1 + x_2 = e^{-\beta t + i\gamma t} + e^{-\beta t - i\gamma t} = e^{-\beta t} \cdot e^{i\gamma t} + e^{-\beta t} \cdot e^{-i\gamma t} = e^{-\beta t} (e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t});$$

e la differenza:

$$x_1 - x_2 = e^{-\beta t + i\gamma t} - e^{-\beta t - i\gamma t} = e^{-\beta t} (e^{i\gamma t} - e^{-i\gamma t});$$

Introducendo le formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

la somma e la differenza precedenti divengono:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= e^{-\beta t} \cos \gamma t \\ x_1 - x_2 &= e^{-\beta t} \sin \gamma t, \end{cases}$$

avendo trascurato, nei primi membri, i fattori 2 e $2i$, che si possono assimilare alle costanti di integrazione. In definitiva, l'integrale generale dell'equazione (4.30) assume la forma:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos \gamma t + Be^{-\beta t} \sin \gamma t. \quad (4.34)$$

Il primo termine a secondo membro, a prescindere dalla costante A , è il prodotto di un esponenziale che (essendo $-\beta < 0$) tende a zero per $t \rightarrow \infty$, e di un coseno, il cui argomento è funzione lineare del tempo t .

Quanto alla rappresentazione grafica: la funzione esponenziale è rappresentata dalla solita curva che tende asintoticamente all'asse delle x ; la funzione trigonometrica da una sinusoide:

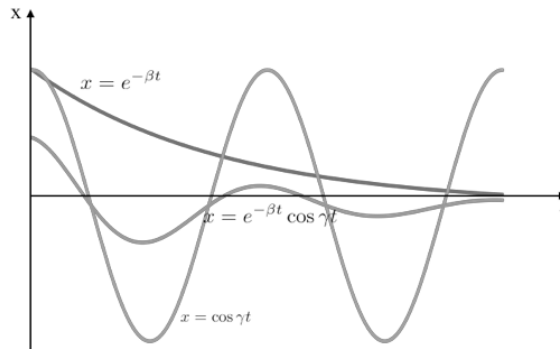


Figura 4.9: I vari grafici discussi nel testo.

La funzione prodotto assume il massimo valore, $e^{-\beta t}$, per $\cos \gamma t = 1$, il minimo $-e^{-\beta t}$, per $\cos \gamma t = -1$. Perciò la funzione prodotto sarà graficamente rappresentata, ancora, da una curva sinusoidale, che ha i punti di massimo sulla curva esponenziale. Epperò, al crescere di t , l'ampiezza della curva sinusoidale (che è, per l'appunto, la curva caratteristica dei moti

oscillatori smorzati) va decrescendo. L'altra funzione: $e^{-\beta t} \sin \gamma t$, è perfettamente simile a quella ora considerata, astraendo da uno spostamento di fase di 90° . È facile vedere che la rapidità dello smorzamento dipende unicamente da β ; infatti, quanto più grande è β , tanto più rapidamente la curva esponenziale tende all'asse delle ascisse, e, di conseguenza, tanto più rapidi sono i decrementi di ampiezza della curva sinusoidale. In particolare, se $\beta = 0$, risulta $h = 0$, ed il moto si riduce ad un ordinario moto oscillatorio non smorzato. Ciò si può, anche, dedurre agevolmente dalla rappresentazione grafica, osservando che, se è: $\beta = 0$, per qualsiasi valore di t è: $e^{-\beta t} = 1$; la curva esponenziale si riduce, quindi, ad una retta parallela all'asse x , alla distanza 1 dall'asse medesimo, mentre la curva sinusoidale diventa un'ordinaria sinusoidale che ha i suoi massimi valori, +1, sulla retta medesima.

Per il periodo, poiché esso è, come già altrove si è visto, quel valore del tempo di cui bisogna aumentare l'argomento affinché la funzione riassuma uno stesso valore, dovrà essere (essendo il coseno una funzione periodica di periodo 2π):

$$\gamma T = 2\pi$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4m\kappa - h^2}}.$$

In particolare, se fosse: $h = 0$, risulterebbe

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4m\kappa}} = \frac{4\pi m}{2\sqrt{m\kappa}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}},$$

che è l'espressione del periodo di un oscillatore non smorzato.

Supponiamo, ora, che agisca sull'oscillatore, oltre la forza centrale e la resistenza più sopra considerate, anche una forza esterna sinusoidale, di frequenza ν .

L'equazione del moto sarà allora:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + \kappa x = A \cos 2\pi \nu t. \quad (4.35)$$

Quest'equazione differenziale del secondo ordine non è omogenea; sappiamo, perciò, dal calcolo infinitesimale, che l'integrale generale di tale equazione, è dato dalla somma di un integrale particolare dell'equazione considerata e dell'integrale generale della stessa, resa omogenea.

Cerchiamo se esiste un integrale particolare della forma

$$x = M \cos 2\pi \nu t + N \sin 2\pi \nu t. \quad (4.36)$$

Dobbiamo, ora, determinare le costanti M ed N in modo da soddisfare alla (4.35) da cui siamo partiti. In altre parole, sostituendo nella (4.35), per \dot{x} e per \ddot{x} , i seguenti valori, ottenuti, con due successive derivazioni, dalla (4.36):

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\pi \nu M \sin 2\pi \nu t + 2\pi \nu N \cos 2\pi \nu t \\ \ddot{x} = -4\pi^2 \nu^2 M \cos 2\pi \nu t - 4\pi^2 \nu^2 N \sin 2\pi \nu t, \end{cases}$$

e ponendo per x la (4.36) stessa, otteniamo:

$$\begin{aligned} m(-4\pi^2 \nu^2 M \cos 2\pi \nu t - 4\pi^2 \nu^2 N \sin 2\pi \nu t) \\ + h(-2\pi \nu M \sin 2\pi \nu t + 2\pi \nu N \cos 2\pi \nu t) \\ + \kappa(M \cos 2\pi \nu t + N \sin 2\pi \nu t) = A \cos 2\pi \nu t \end{aligned} \quad (4.37)$$

Eguagliando, nella (4.37), i coefficienti di $\cos 2\pi \nu t$ e di $\sin 2\pi \nu t$, otteniamo:

$$\begin{cases} -4\pi^2 \nu^2 m M + 2\pi \nu h N + \kappa M = A \\ -4\pi^2 \nu^2 m N - 2\pi \nu h M + \kappa M = 0, \end{cases}$$

od, anche:

$$\begin{cases} M(\kappa - 4\pi^2 \nu^2 m) + 2\pi \nu h N = A \\ N(\kappa - 4\pi^2 \nu^2 m) - 2\pi \nu h M = 0. \end{cases}$$

Abbiamo, così, un sistema di due equazioni nelle due incognite M ed N , delle quali, mediante la regola di Cramer, potremo determinare i valori. Risulta:

$$M = \frac{\begin{vmatrix} A & 2\pi \nu h \\ 0 & \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m & 2\pi \nu h \\ -2\pi \nu h & \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m \end{vmatrix}}$$

$$N = \frac{\begin{vmatrix} \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m & A \\ -2\pi \nu h & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m & 2\pi \nu h \\ -2\pi \nu h & \kappa - 4\pi^2 \nu^2 m \end{vmatrix}}$$

da cui, sviluppando:

$$M = \frac{A(\kappa - 4\pi^2 \nu^2 m)}{(\kappa - 4\pi^2 \nu^2 m)^2 + 4\pi^2 \nu^2 h^2} \quad (4.38)$$

$$N = \frac{A2\pi\nu\kappa}{(\kappa - 4\pi^2\nu^2 m)^2 + 4\pi^2\nu^2 h^2} \quad (4.39)$$

Infine, per ottenere l'integrale generale della (4.35), dovremo aggiungere, come già si è detto, all'integrale particolare (4.36), l'integrale generale dell'equazione resa omogenea che ci è dato (vedi (4.33) e seguenti) dall'una o dall'altra delle espressioni:

$$\begin{cases} x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \\ x = Ae^{-\beta t} \cos \gamma t + Be^{-\beta t} \sin \gamma t, \end{cases}$$

secondo che α_1 ed α_2 sono reali od immaginarie. In conclusione il moto del punto materiale risulta dato dalla somma di un moto periodico colla frequenza della forza sinusoidale, e di un moto oscillatorio smorzato. Dopo un certo tempo (in pratica, finito) il moto oscillatorio smorzato cesserà, ed il punto resterà animato dal solo moto periodico.

Riprendendo l'integrale particolare dell'equazione non omogenea:

$$x = M \cos 2\pi\nu t + N \sin 2\pi\nu t,$$

sappiamo che lo si può porre anche sotto la forma

$$x = P \cos(2\pi\nu t - \alpha). \quad (4.40)$$

Dobbiamo, però, determinare, convenientemente, i valori delle costanti P ed α . Sviluppando la (4.40), abbiamo:

$$x = P(\cos 2\pi\nu t \cos \alpha + \sin 2\pi\nu t \sin \alpha)$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (4.36), risulta

$$\begin{cases} M = P \cos \alpha \\ N = P \sin \alpha, \end{cases} \quad (4.41)$$

da cui, dividendo la seconda delle precedenti per la prima, otteniamo:

$$\frac{N}{M} = \tan \alpha,$$

che ci determina α . Quadrando le (4.41) e sommandole membro a membro, si ha

$$P^2 = M^2 + N^2$$

da cui:

$$P = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad (4.42)$$

espressione, quest'ultima, che ci determina P (ampiezza del moto). Sostituendo nella (4.42), per M^2 ed N^2 , i valori che si ricavano dalle formule (4.38), (4.39), avremo infine:

$$P = \frac{A}{\sqrt{(\kappa - 4\pi^2 v^2 m)^2 + 4\pi^2 v^2 h^2}} \quad (4.43)$$

Supponiamo che sia: $h = 0$, cioè l'oscillatore non sia smorzato. La (4.43), in questo caso, diventa:

$$P = \frac{A}{\kappa - 4\pi^2 v^2 m}.$$

Di qui si deduce che quando v assume un valore tale da annullare il denominatore dell'espressione precedente, l'ampiezza delle oscillazioni forzate diventa infinita. In tal caso, dunque:

$$\kappa - 4\pi^2 v^2 m = 0$$

da cui

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Osserviamo, ora, che il valore di v , così trovato, coincide con quello della frequenza di un oscillatore non smorzato; possiamo, cioè, concludere che se ad un oscillatore è applicata una forza di periodo eguale a quello dell'oscillatore in questione, le oscillazioni forzate del punto materiale, assumerebbero, se non ci fosse smorzamento, ampiezza infinita. Questo fenomeno è detto: risonanza.

Se, dunque, nella pratica si ha un oscillatore con smorzamento non nullo, ma minimo, e si fa agire su di esso una forza periodica sinusoidale di periodo (e, quindi, di frequenza) uguale a quello proprio dell'oscillatore, l'ampiezza delle oscillazioni del punto va sempre più crescendo, e raggiunge valori grandissimi, benché finiti (perché lo smorzamento, seppur minimo, non è nullo).

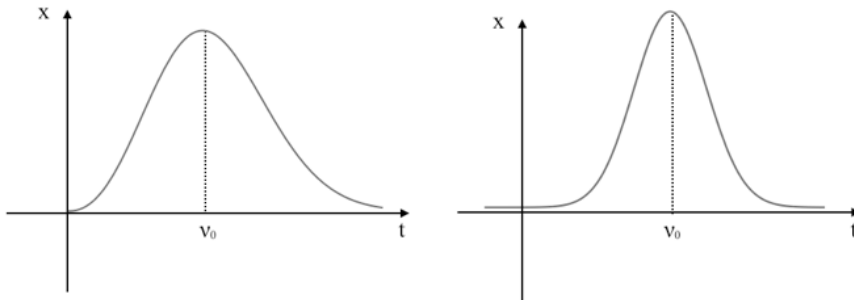


Figura 4.10: Illustrazione della risonanza per uno smorzamento grande (a sinistra) e piccolo (a destra).

Graficamente, riportando in ascisse i valori della frequenza della forza esterna, ed in ordinate le ampiezze corrispondenti delle oscillazioni forzate del punto: detto ν_0 il punto che corrisponde sull'asse delle ascisse alla frequenza propria dell'oscillatore, si vede che la curva, in corrispondenza di tale valore di ν , presenta un massimo. In pratica, in ogni moto oscillatorio vi sarà sempre uno smorzamento apprezzabile, per quanto piccolo, quindi, anche nei punti di massimo, l'ampiezza delle oscillazioni avrà un valore finito.

I grafici precedenti rappresentano le ampiezze delle oscillazioni forzate nel caso che sia h (smorzamento) grande o piccolo, rispettivamente.

Capitolo 5

GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Legge di Newton.

La legge di Newton che dà la forza esercitantesi tra due corpi di massa M e m , rispettivamente, è espressa dalla relazione:

$$F = f \frac{mM}{r^2} \quad (5.1)$$

dove r è la distanza tra i due corpi ed f la cosiddetta costante di attrazione universale.

Nell'applicare questa legge all'astronomia, data la grandissima distanza tra due corpi celesti, questi possono, in prima approssimazione, essere considerati come punti.

Si nota, anzitutto, che la forza, F , espressa dalla (5.1), è diretta secondo la congiungente i centri dei due corpi; quanto alla sua grandezza, osserviamo che essa forza può considerarsi tanto come quella che attrae m verso M , quanto come quella che attrae M verso m ; per quel che riguarda il senso, infine, F agisce sui due corpi in sensi opposti, in guisa cioè, da muoverli l'uno verso l'altro. In genere, supponendo: $m \neq M$, i due corpi, per effetto della forza suddetta, assumono accelerazioni inversamente proporzionali alle rispettive masse. Nel caso particolare, poi del sole e di un pianeta (la terra, p.es.), detta M la massa del sole, che risulterà grandissima in confronto della massa della terra, l'accelerazione assunta dal sole sarà così piccola in confronto di quella assunta dalla terra, da potersi senz'altro considerare il sole come fermo.

Considerando il moto di un pianeta come dovuto soltanto alla attrazione solare, ed ammettendo il sole fermo, il moto del pianeta è un moto centrale ed, in particolare, esso è perciò piano.

Consideriamo, ora, un moto centrale, in genere.

Detto r il vettore variabile che unisce il punto P col centro O del moto, la forza F agente su P risulterà funzione di r , ed indicando con φ tale funzione, avremo:

$$F = \varphi(r).$$

Se supponiamo il sole S , in O (centro di una terna di riferimento), il moto si svolgerà in un piano che sceglieremo per piano xy . Dette x ed y le coordinate di P , per i coseni direttori di F risulteranno le espressioni

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}$$

e quindi, per le componenti:

$$F \equiv \begin{cases} F_x = -\varphi(r) \frac{x}{r} \\ F_y = -\varphi(r) \frac{y}{r} \end{cases}$$

In definitiva, le equazioni del moto saranno:

$$m\ddot{x} = -\varphi(r) \frac{x}{r}, \quad (5.2)$$

$$m\ddot{y} = -\varphi(r) \frac{y}{r}, \quad (5.3)$$

da cui dedurremo il noto teorema delle aree.

A tal scopo, moltiplichiamo la (5.2) per y , la (5.3) per $-x$, e sommiamo membro a membro. Avremo:

$$m(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = 0,$$

ovvero, identicamente, dividendo per m :

$$\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) = 0,$$

ed integrando:

$$y\dot{x} - x\dot{y} = \text{cost.}$$

infine, cambiando di segno

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cost.} \quad (5.4)$$

A questo punto, osserviamo che il raggio vettore r , ha componenti

$$x, \quad y, \quad 0,$$

e la velocità V del punto

$$\dot{x}, \dot{y}, 0.$$

Moltiplicando vettorialmente r per V , la sola componente non nulla del vettore prodotto è quella secondo l'asse z , che ci è data, per l'appunto, dal primo membro della (5.4). Per la grandezza di detto prodotto, avremo:

$$|r \wedge V| = |r| \cdot |V| \sin \theta \quad (5.5)$$

dove θ è l'angolo che r fa con V . Notando, poi, che è:

$$|V| = \frac{ds}{dt},$$

la (5.5) diventa:

$$|r \wedge V| = |r| \frac{ds}{dt} \sin \theta.$$

Siano ora P_1 e P_2 , le posizioni del punto ai tempi t e $t + dt$. L'area dS del triangolo infinitesimo OP_1P_2 , è data da:

$$dS = \frac{1}{2} r h.$$

essendo h la normale condotta da P_2 alla $\overline{OP_1}$.

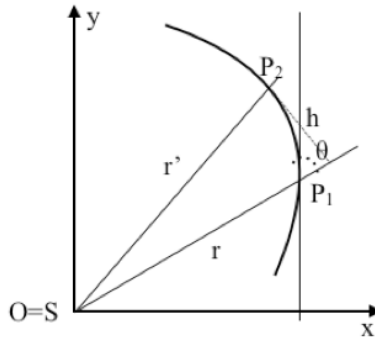


Figura 5.1: Il triangolo OP_1P_2 .

Ma, evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è

$$h = ds \sin \theta,$$

e quindi:

$$dS = \frac{1}{2} r ds \sin \theta.$$

Di qui¹:

$$2 \frac{dS}{dt} = \frac{r ds \sin \theta}{dt} = |r \wedge V| = C, \quad (5.6)$$

da cui, infine:

$$2dS = C dt$$

e, integrando tra t_1 e t_2 :

$$2S_{1,2} = C(t_2 - t_1) \quad (5.7)$$

1^a Legge di Keplero.

La formula (5.7) esprime la prima legge di Keplero: **Le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.**

La (5.6), che si può anche scrivere:

$$dS = \frac{1}{2} C dt,$$

esprime non una proprietà speciale del moto dei pianeti, bensì una proprietà generale dei moti centrali. Scriviamola in coordinate polari. Evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è:

$$h = r d\theta$$

dove $d\theta$ è l'angolo formato da due posizioni infinitamente vicine di r . Sarà perciò:

$$2dS = rh = r^2 d\theta = C dt,$$

da cui:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C. \quad (5.8)$$

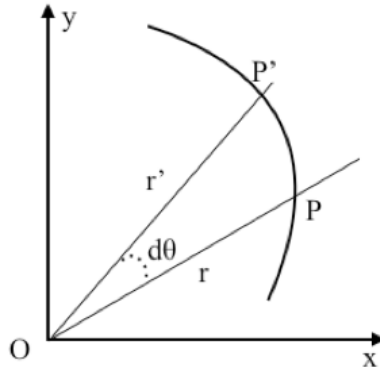
Questo vale per tutti i moti centrali. Nel caso particolare dei pianeti, si ha, poi:

$$\varphi(r) = f \frac{mM}{r^2}$$

e quindi l'equazioni (5.2) e (5.3), divengono:

$$m\ddot{x} = -f \frac{mM}{r^3} x \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = -f \frac{mM}{r^3} y. \quad (5.9)$$

¹Nell'equazione seguente, C è la costante dell'eq.(5.4) (NdR).

Figura 5.2: L'angolo infinitesimo $d\theta$.

Eseguiamo ora, la trasformazione in coordinate polari. Essendo:

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta \quad (5.10)$$

Avremo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt};$$

ma la (5.8) ci dà:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

sarà quindi:

$$\dot{x} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dx}{d\theta}.$$

Tenendo presente quest'ultima relazione, derivando la prima delle (5.10):

$$\dot{x} = \frac{C}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) = C \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \right)$$

e infine

$$\dot{x} = -C \left(\frac{1}{r} \sin \theta - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \right) \quad (5.11)$$

Osserviamo ora che è:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}$$

e, sostituendo questo valore nella (5.11) abbiamo:

$$\dot{x} = -C \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \cos\theta + \frac{1}{r} \sin\theta \right)$$

Passiamo, ora, a calcolare la derivata seconda della x . A tal scopo notiamo che è:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

e, poiché abbiamo visto essere:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

otterremo:

$$\ddot{x} = \frac{C}{r^2} \frac{d\dot{x}}{d\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \cos\theta \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right).$$

Sostituendo alle (5.9), per \ddot{x} , questo valore, e ricordando che $x = r \cos\theta$, troviamo:

$$-\frac{C^2}{r^2} m \cos\theta \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = -f \frac{mM}{r^3} r \cos\theta.$$

Cambiando segno e semplificando:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = f \frac{mM}{C^2}$$

Questa equazione ove si riguardi $1/r$ come incognita, è una equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea. Un integrale particolare di essa è, evidentemente:

$$\frac{1}{r} = f \frac{mM}{C^2}.$$

Quanto all'integrale generale, esso si trova aggiungendo a questo integrale particolare, l'integrale generale dell'equazione resa omogenea che, ponendo per brevità: $1/r = z$ ci è data da:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0 \tag{5.12}$$

Due integrali particolari di questa equazione sono: $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Infatti, per il primo, ad esempio, derivando due volte, abbiamo: $-\sin\theta$, e sostituendo nella (5.12):

$$-\sin\theta + \sin\theta = 0.$$

Analogamente per $\cos\theta$.

Per ottenere l'integrale generale della (5.12), dovremo fare una combinazione lineare dei due integrali particolari soprascritti:

$$z = A\cos\theta + B\sin\theta,$$

espressione che, come già sappiamo, si può porre sotto la forma:

$$z = D\cos(\theta - \alpha).$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea sarà dunque:

$$\frac{1}{r} = f\frac{mM}{C^2} + D\cos(\theta - \alpha) = f\frac{mM}{C^2}(1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)) \quad (5.13)$$

dove ϵ è una costante data da:

$$\epsilon = \frac{D}{f\frac{M}{C^2}}.$$

Risolvendo l'equazione (5.13) rispetto ad r , otteniamo:

$$r = \frac{C^2}{fM} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)},$$

espressione, quest'ultima che rappresenta, in coordinate polari, l'equazione di una conica riferita ad uno dei fuochi come polo; tale conica sarà una ellisse, una parabola od un'iperbole a seconda che sia:

$$\epsilon < 1, \quad \epsilon = 1, \quad \epsilon > 1$$

rispettivamente (orbite ellittiche dei pianeti, paraboliche ed iperboliche delle comete). Osserviamo, ora, che si può sempre porre: $\alpha = 0$, spostando opportunamente l'asse polare, e quindi l'espressione di r assume la forma:

$$r = \frac{\frac{C^2}{fM}}{1 + \epsilon\cos\theta},$$

da cui, immediatamente, si riconosce che se è:

$$\epsilon < 1,$$

r risulta massimo per: $\cos\theta = -1$, cioè per: $\theta = \pi$. La posizione occupata, rispetto al sole da un pianeta, quando r è massimo, dicesi afelio. Il valore r_1 di r è allora:

$$r_1 = \frac{C^2}{fM(1-\epsilon)}$$

r assumerà, invece il suo minimo valore, r_2 , per $\cos\theta = 1$, cioè, per $\theta = 0$. In tal caso si dice che il pianeta è al perielio, ed è:

$$r_2 = \frac{C^2}{fM(1+\epsilon)}.$$

Sempre nel caso che sia: $\epsilon < 1$, cioè che l'orbita sia ellittica, si vede immediatamente come la somma dei valori massimo e minimo di r , ci dia la lunghezza $2a$ dell'asse maggiore dell'ellisse. Sarà dunque

$$r_1 + r_2 = 2a = \frac{C^2}{fM} \left(\frac{1}{1+\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon} \right)$$

da cui:

$$a = \frac{C^2}{fM} \frac{1}{1-\epsilon^2} \quad (5.14)$$

Abbiamo così la 2^a legge di Keplero:

I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi.

Si è visto che è:

$$dS = \frac{C}{2} dt$$

dove dS è l'area del triangolo infinitesimo che ha per lati due successive posizioni di r , e l'archetto infinitesimo, ds , di traiettoria. Integrando la precedente espressione da 0 a T (tempo impiegato a descrivere l'intera orbita) otteniamo:

$$\frac{C}{2} T = S(\text{area dell'ellisse}) = \pi a b. \quad (5.15)$$

Cerchiamo, ora, di determinare il semiasse minore b . Data un'ellisse di centro O , detta ϵ l'eccentricità, F_1 e F_2 i fuochi, risulta:

$$\begin{aligned} \overline{OF_1} &= \epsilon a \\ \overline{F_1C} &= \overline{F_2C} = a \end{aligned}$$

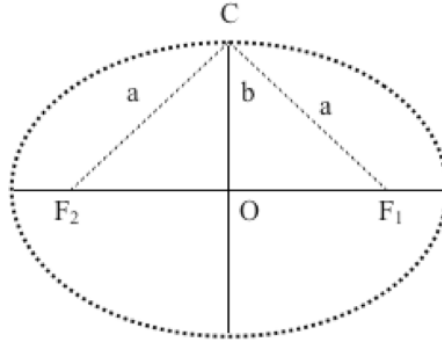


Figura 5.3: L'ellisse di fuochi F_1, F_2 e semiassi a, b .

Il triangolo rettangolo OFC ci dà:

$$b^2 = a^2 - \epsilon^2 a^2,$$

da cui:

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2},$$

Sostituendo nella (5.15) il valore così ricavato per b , otteniamo:

$$S = \frac{C}{2} T = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Ma la (5.14) ci dà:

$$1 - \epsilon^2 = \frac{C^2}{fMa}$$

quindi avremo:

$$\frac{C}{2} T = \pi a^2 \frac{C}{\sqrt{fMa}} = \frac{\pi a^{3/2} C}{\sqrt{fM}},$$

da cui si ricava:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{fM}}$$

ed elevando al quadrato ambo i membri:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{fM}$$

da cui infine:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM} \quad (5.16)$$

Quest'espressione, poiché il secondo membro è costante, ci dice che **i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le loro orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori**; in ciò consiste, per l'appunto, la: terza legge di Keplero.

La (5.16) può servire, p. es., a determinare la massa del sole; infatti a , f , T , si possono ricavare da misure dirette, e la formula suddetta ci dà allora il valore di M . Questo valore risulta, però, approssimato per la difficoltà di determinare f con precisione.

Dalla formula:

$$g = f \frac{m \cdot 1}{R^2}$$

che ci dà la forza esercitata dalla terra di massa m sopra l'unità di massa, essendo $R = 6600 \text{ Km}$. circa, il raggio del nostro pianeta; e $g \approx 980 \text{ cm/sec.}^2$; si può dedurre m con un errore del 2 o 3 %.

Capitolo 6

MOTI VINCOLATI

6.1 Moto di un punto vincolato

Finora abbiamo considerato il moto di un punto libero di muoversi comunque nello spazio. Passiamo, ora, a studiare il moto di un punto vincolato, e, come primo esempio, consideriamo il moto di un punto costretto a seguire una traiettoria prefissata (p.es. il moto di una pallina dentro un tubo).

Se, ora, il punto mobile, per effetto delle forze ad esso direttamente applicate, tendesse ad abbandonare la traiettoria prefissata, verrebbe ad esercitarsi su di esso una forza tale da impedirglielo. Potremo, dunque, considerare il punto come libero, purché oltre alla forza direttamente applicata, lo si consideri soggetto anche ad un'altra forza che dicesi reazione del vincolo.

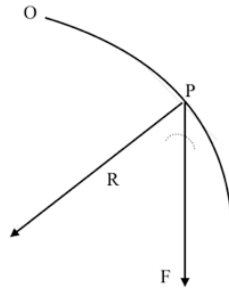


Figura 6.1: La forza F e la reazione vincolare agenti sul punto P .

Noi ammetteremo, che questa reazione sia perpendicolare alla curva (o alla superficie) su cui avviene il moto. Il punto si muoverà, dunque, sotto l'azione della forza F direttamente applicata e della reazione \mathcal{R} (normale alla traiettoria). L'equazione del moto assumerà, quindi, la forma:

$$mA = F + \mathcal{R} \tag{6.1}$$

equazione vettoriale che ne rappresenta tre scalari che serviranno a determinare l'ascissa curvilinea s e la reazione \mathcal{R} . Noto s , il moto del punto resterà determinato. Quanto, poi, ad \mathcal{R} , basterà determinarne solo due elementi (poiché essa è normale alla tangente alla traiettoria nel punto). Proiettando la (6.1) sulla tangente, avremo (essendo: $A = A_t + A_n$):

$$mA_t = F_t = F(s, \dot{s}), \quad (6.2)$$

poiché è:

$$\mathcal{R}_t = 0.$$

Dalla (6.2) si può ricavare s in funzione del tempo. Infatti, essendo: $A_t = dv/ds$, e sostituendo nella (6.2):

$$m \frac{dv}{dt} = F_t,$$

oppure, notando che è:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (6.3)$$

avremo infine

$$s = s(t, C_1, C_2) \quad (6.4)$$

che è l'integrale generale della (6.3).

Per determinare le costanti, C_1 e C_2 , bisogna, al solito, conoscere i valori di s e di v corrispondenti ad un dato valore del tempo. Se, ad esempio, per $t = t_0$, è:

$$s = s_0 \quad \text{e} \quad v = v_0$$

sostituendo questo valore di s nella (6.4), abbiamo:

$$s_0 = s(t_0, C_1, C_2), \quad (6.5)$$

e derivando la (6.4) stessa e ponendovi $t = t_0$ e $v = v_0$:

$$v_0 = \dot{s}(t_0, C_1, C_2). \quad (6.6)$$

Le (6.5) e (6.6) permettono di determinare C_1 e C_2 .

Per determinare \mathcal{R} proiettiamo la (6.1) sul piano normale in P alla traiettoria, si ha:

$$mA_n = F_n + \mathcal{R}$$

da cui:

$$\mathcal{R} = mA_n - F_n \quad (6.7)$$

Nel caso in cui F è tangente alla traiettoria, o nulla, risulta:

$$F_n = 0 \quad \text{e quindi: } \mathcal{R} = mA_n$$

Osserviamo che nella (6.7) tutto è noto all'infuori di \mathcal{R} ; infatti, la massa m è data, ed A_n è conosciuta essendo noto s .

Più particolarmente, sia $F = 0$; risulterà allora:

$$F_n = 0 \quad \text{e} \quad F_t = 0$$

e sarà perciò:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

da cui integrando:

$$\frac{ds}{dt} = C$$

ed infine, moltiplicando per dt ambo i membri ed integrando ancora una volta:

$$s = Ct + \text{cost.} \quad (6.8)$$

risulta, cioè, s funzione lineare del tempo e, quindi, la velocità è costante ed uguale a C . La costante additiva che compare nell'integrale (6.8) dipende dalla lunghezza dell'arco che porta, dall'origine degli archi, alla posizione del punto origine dei tempi. Per \mathcal{R} , in questo caso, si trova il valore:

$$\mathcal{R} = mA_n,$$

ed essendo $|A_n| = v^2/\rho$ (vedi (2.43)), risulta:

$$\mathcal{R} = m \frac{v^2}{\rho}.$$

In questo caso la reazione vincolare prende il nome di forza centripeta.

6.2 Pendolo semplice

Si chiama pendolo qualunque corpo soggetto alla sola azione del suo peso e girevole attorno ad un punto o ad un asse orizzontale superiore al suo centro di gravità; ci limitiamo, per ora, a considerare il pendolo semplice, che, in una schematica idealizzazione, può riguardarsi costituito da un punto materiale, O , attaccato ad un filo, \overline{CO} , inestensibile e senza peso.

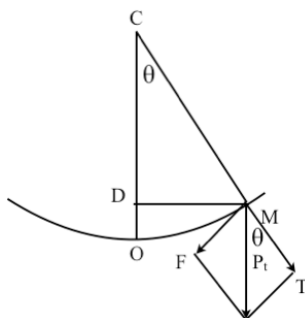


Figura 6.2: Pendolo semplice

La posizione di O (di cui indichiamo con m la massa) è determinata quando si conosca l'arco s , contato a partire dalla posizione più bassa.

Detta l la lunghezza del pendolo, l'angolo θ di cui esso è spostato rispetto alla posizione di equilibrio, avremo

$$\theta = \frac{s}{l}$$

dove s è l'arco di traiettoria corrispondente all'angolo θ . Scegliamo, inoltre, come verso positivo degli archi quello che va da sinistra a destra. Proiettiamo, poi, la forza $P = mg$, agente sul punto, sulla tangente alla traiettoria in O ; otterremo, notando che l'angolo, formato dalle direzioni positive della forza e della tangente, è il complemento di θ :

$$P_t = -mg \sin \theta = -mg \sin \frac{s}{l},$$

e dovendo essere:

$$P_t = m\ddot{s},$$

risulterà:

$$-mg \sin \frac{s}{l} = m\ddot{s};$$

oppure, dividendo per m e portando tutto a primo membro:

$$\ddot{s} + g \sin \frac{s}{l} = 0 \quad (6.9)$$

Quest'equazione differenziale si integra con le funzioni ellittiche; se, però, le oscillazioni sono di ampiezza così piccola, da poter sostituire, senza apprezzabile errore, al seno di θ l'arco corrispondente, la (6.9) diventa:

$$\ddot{s} + g \frac{s}{l} = 0.$$

Quest'equazione ammette un integrale generale del tipo:

$$s = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$$

con α costante di fase. Se il punto si trova, per $t = 0$, all'estremo della sua oscillazione, risulta:

$$\alpha = 0.$$

Per il periodo si avrà:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi. \quad (6.10)$$

Per la frequenza ν , infine

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Osserviamo come, in queste espressioni del periodo e della frequenza, non figurino l'ampiezza delle oscillazioni, il che è vero in prima approssimazione; però, nel caso di oscillazioni assai grandi, il periodo e, conseguentemente, la frequenza, dipendono dall'ampiezza dell'oscillazioni medesime.

Dalla (6.10) elevando al quadrato:

$$T^2 = 4\pi \frac{l}{g}$$

da cui otteniamo:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

formula, questa, di cui ci si serve, nella pratica per determinare l'accelerazione di gravità g .

6.3 *Vincoli unilaterali*

Sono vincoli unilaterali quelli che esercitano una reazione diretta in un solo senso; l'esempio più semplice è quello che si presenta nel considerare il moto di un punto obbligato a muoversi da una sola banda di una superficie senza poterla attraversare.

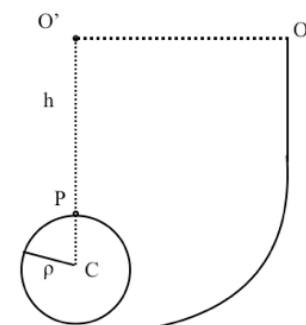


Figura 6.3: Esempi di vincolo unilaterale

Esempio. A titolo di esempio immaginiamo una pista del tipo più sotto riprodotto, su cui, da una certa altezza si faccia scorrere un punto di massa m .

La variazione di energia cinetica, subita dal punto nel passare, dalla posizione iniziale O alla posizione P , ci è data (essendo la velocità iniziale nulla) da:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.11)$$

essendo v la velocità del mobile, ed h la differenza fra le altezze di O e di P .

Per la \mathcal{R} , reazione del vincolo, abbiamo:

$$\mathcal{R} = mA_n - F_n = m\frac{v^2}{\rho} - mgh. \quad (6.12)$$

La (6.11) ci dà:

$$mv^2 = 2mgh,$$

e sostituendo nella (eq:6.12), avremo:

$$\mathcal{R} = 2\frac{mgh}{\rho} - mg.$$

Osserviamo, ora, che la pista può esercitare sul corpo una reazione diretta solo verso di esso; \mathcal{R} deve, dunque, essere positiva se non si vuole che il mobile abbandoni la pista. Dovrà, dunque, essere:

$$2\frac{mgh}{\rho} - mg > 0,$$

ovvero, dividendo per mg :

$$\frac{2h}{\rho} - 1 > 0,$$

da cui, infine:

$$\frac{2h}{\rho} > 1;$$

epperò dovrà essere

$$h > \frac{\rho}{2}.$$

Concludendo, affinché il mobile percorra la pista senza abbandonarla, bisognerà che $\overline{O'P}$ sia maggiore di $h/2$.

6.4 Moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie

Consideriamo, ora, il moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie. Supponiamo l'equazione di questa risolta rispetto a z ; sarà allora:

$$z = z(x, y),$$

e, quindi, per determinare il moto basterà conoscere due sole coordinate del punto.

Anche qui supporremo \mathcal{R} normale alla superficie. Al solito, l'equazione del moto assumerà la forma

$$mA = F + \mathcal{R}, \tag{6.13}$$

equazione vettoriale che servirà a determinare la x e la y , nonché la grandezza di \mathcal{R} (essendone già nota la direzione). Anzitutto, proiettiamo la (6.13) sul piano tangente nel punto alla superficie, ottenendo così:

$$mA_t = F_t.$$

Questa è un'equazione vettoriale; dalle due scalari che essa rappresenta, potremo ricavare x ed y in funzione del tempo. Proiettando, poi, la (6.13) stessa sulla normale alla superficie, si ha:

$$mA_n = F_n + \mathcal{R},$$

da cui, per \mathcal{R} , si ottiene:

$$\mathcal{R} = mA_n - F_n.$$

Notiamo, ora, che, essendo \mathcal{R} normale alla superficie (o alla linea) nel punto, e quindi normale alla direzione della velocità, il lavoro compiuto dalla \mathcal{R} medesima sul mobile è nullo; quindi, anche nel caso di un punto vincolato, varrà la relazione:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = L_e$$

dove L_e è il lavoro della forza direttamente applicata. Se poi è: $F = 0$, risulta:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0,$$

cioè: l'energia cinetica del mobile, e quindi la grandezza della sua velocità rimane costante.

Nel caso che sia: $F = 0$, il punto si muove soltanto sotto l'azione di \mathcal{R} . Si ha dunque:

$$mA = \mathcal{R}.$$

Ora si sa, dalla cinematica, che A è contenuto nel piano osculatore della traiettoria; siccome \mathcal{R} è normale alla superficie, si trova, dunque, per la traiettoria la proprietà geometrica che il suo piano osculatore è normale alla superficie.

Questa proprietà è caratteristica delle cosiddette linee geodetiche della superficie, e si può dimostrare che le geodetiche segnano le linee di minimo percorso tra due punti della superficie medesima.

Capitolo 7

STATICA DEL PUNTO

7.1 Cerchiamo la condizione perché un punto libero sia in equilibrio

Diciamo che una certa posizione è posizione di equilibrio quando il punto, posto fermo in essa, non si muove. La velocità del punto sarà nulla e nulla, quindi, l'accelerazione. L'equazione fondamentale della dinamica ci dà allora:

$$F = 0,$$

che ci rappresenta la condizione di equilibrio cercata: per l'equilibrio deve annullarsi la forza totale agente sul punto.

Supponiamo, ora, che sia data la forza, F , agente sul punto, e che essa sia funzione delle coordinate di esso:

$$F \equiv \begin{cases} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z). \end{cases}$$

Per trovare la posizione (o le posizioni) d'equilibrio del punto, dobbiamo eguagliare a zero F . Avremo così:

$$F \equiv \begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z , ci darà, se esistono, le posizioni di equilibrio che possono essere in numero finito od, anche, infinito.

7.2 Equilibrio stabile e instabile

Se P_0 è una posizione di equilibrio, supponendo di porre il punto materiale non esattamente in P_0 , ma in una posizione infinitamente vicina,

e non con velocità nulla, bensì infinitesima, diciamo che P_0 è **posizione di equilibrio stabile** se il mobile si muove sempre in un intorno sufficientemente piccolo di P_0 ; se, invece, il punto si allontana sempre più, diciamo che P_0 è **posizione di equilibrio instabile**. Consideriamo, ad esempio, un punto materiale soggetto all'azione di una forza centrale: sappiamo che la grandezza di detta forza è funzione della distanza, \overline{OP} , del punto dal centro O del moto.

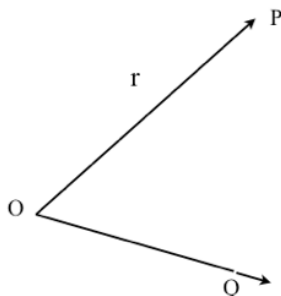


Figura 7.1: Il punto P soggetto ad una forza centrale.

Scelto come verso positivo quello che va da O verso P , e detta, k , una conveniente costante, a seconda che la forza, F , sia attrattiva o repulsiva avremo, rispettivamente:

$$F = -kr \quad \text{e} \quad F = kr$$

dove è: $r = \overline{OP}$.

Immaginiamo, ora, di porre il punto materiale in una posizione, Q , infinitamente vicina ad O , con velocità infinitesima V_Q . Se la forza è attrattiva, cioè data da: $F = -kr$, sappiamo che il punto descrive un'ellisse (in questo caso infinitesima anch'essa) con centro in O . Se, invece, posto il punto, come precedentemente, in Q colla medesima velocità V_Q , e la forza agente è la: $F = kr$, cioè repulsiva, il punto materiale si allontana sempre di più da O . Nel primo caso l'equilibrio è stabile, nel secondo instabile. In O , il punto materiale è sempre in posizione di equilibrio stabile, anche se la forza è repulsiva, perché essendo in questo caso $F = kr$, il secondo membro si annulla con r .

Se la forza agente sul punto ammette potenziale, rappresentato, quest'ultimo, dalla funzione:

$$U = U(x, y, z),$$

sappiamo che le componenti della forza sono

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Se il punto si trova in posizione di equilibrio, essendo allora: $F = 0$, sarà:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Queste equazioni coincidono formalmente con quelle per la ricerca dei massimi e dei minimi della funzione U .

Ora, si può dimostrare che **un punto materiale posto in una posizione in cui il potenziale è massimo, si trova in equilibrio stabile.**

Facciamo, dunque, l'ipotesi che in un punto, O , il potenziale abbia un massimo; vogliamo dimostrare che, in quella posizione, il punto materiale si trova in equilibrio stabile. Per dimostrarlo bisogna far vedere che, preso δ piccolo a piacere, si può determinare un intorno di O e una velocità V_0 , tali che, lasciando il mobile in un punto del detto intorno, con velocità iniziale minore di V_0 , esso non si allontani da O di una distanza maggiore di δ .

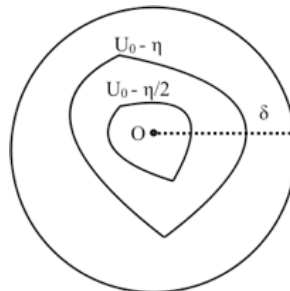


Figura 7.2: Le due superfici equipotenziali $U_0 - \eta$ e $U_0 - \eta/2$ racchiuse nella sfera di raggio δ .

Osserviamo ora che, siccome U ha un massimo in O , le superfici equipotenziali su cui U ha un valore minore di U_0 circondano il punto O e si vanno restringendo fino a riunirsi nel punto stesso, quando il potenziale diventa eguale ad U_0 .

Scegliamo, ora, una superficie equipotenziale tale che su di essa U abbia il valore: $U_0 - \eta$, essendosi preso per η un valore tale che la superficie suddetta risulti interna alla sfera di raggio δ . Consideriamo poi la superficie equipotenziale su cui è $U = U_0 - \eta/2$; evidentemente essa risulterà interna alla superficie precedentemente considerata, e, quindi, interna alla sfera di raggio δ . Passiamo, ora, a determinare V_0 (limite superiore delle velocità da imprimersi al mobile) in modo che sia:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{\eta}{2},$$

e, poniamo, inizialmente, il punto materiale in una posizione P_1 , interna alla superficie $U_0 = \eta/2$, con velocità iniziale: $V_1 < V_0$, tale che sia:

$$\frac{1}{2}mV_1^2 < \frac{\eta}{2}. \quad (7.1)$$

In questa posizione il potenziale, U_1 , risulta tale che:

$$U_1 > U_0 - \frac{\eta}{2}. \quad (7.2)$$

Cambiando segno alla (7.2) e sommando membro a membro con la (7.1), otteniamo:

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - U_1 < -U_0 + \eta. \quad (7.3)$$

ma sappiamo che la somma delle energie cinetica e potenziale deve rimanere costante; in un tempo qualsiasi sarà dunque:

$$\frac{1}{2}mV^2 - U = \frac{1}{2}mV_1^2 - U_1. \quad (7.4)$$

tenendo conto della (7.3), la (7.4) precedente diventa:

$$\frac{1}{2}mV^2 - U < -U_0 + \eta,$$

e, a fortiori, sopprimendo nel primo termine della disuguaglianza precedente: $mV^2/2$, che è positivo, risulterà

$$-U < -U_0 + \eta,$$

e, infine, cambiando segno

$$U > U_0 - \eta. \quad (7.5)$$

La disuguaglianza (7.5) deve valere per qualsiasi posizione del mobile; ammettendo, quindi, che questo possa uscire dalla superficie equipotenziale $U_0 - \eta$, nell'istante in cui esso lo attraversasse, risulterebbe:

$$U = U_0 - \eta,$$

ed essendo impossibile la coesistenza di quest'ultima e della (7.5), concludiamo essere assurda l'ipotesi che il mobile possa uscire dalla superficie $U_0 - \eta$, e, a maggior ragione, dalla sfera di raggio δ prefissato.

Resta quindi dimostrato che la posizione O , in cui U è massimo (e, quindi è minima l'energia potenziale) è posizione di equilibrio stabile.

7.3 Equilibrio di un punto vincolato

Analogamente a quanto si è fatto per un punto libero, studieremo, ora, le condizioni di equilibrio per un punto vincolato.

In questo caso, sul mobile, oltre alla forza F data in funzione della posizione di esso, agisce la reazione vincolare \mathcal{R} che, come già sappiamo, è normale alla traiettoria.

Per l'equilibrio dovrà dunque essere:

$$F + \mathcal{R} = 0, \quad (7.6)$$

cioè, F ed \mathcal{R} debbono avere eguali la grandezza e la direzione, e opposto il senso. Dovrà, quindi, anche F essere normale alla traiettoria. Se si verifica l'equilibrio, noto F , dalla (7.6) si può determinare \mathcal{R} , e viceversa.

Analoghe considerazioni valgono per un punto vincolato a muoversi su di una superficie.

Nel caso di un punto materiale soggetto alla forza peso, e vincolato a muoversi su di una traiettoria, esso si trova in equilibrio in quei punti della superficie, o linea, in cui il piano tangente, o la tangente, è orizzontale.

In tali punti, infatti la forza peso, che è diretta verticalmente, risulta normale alla traiettoria. Nei punti di massimo della traiettoria (P_1 , p. es.) l'equilibrio è instabile, nei punti di minimo (P_2) stabile. Infatti, nel primo caso, spostando, pur minimamente, il mobile dalla posizione di equilibrio, esso, cadendo, se ne allontana definitivamente; nel secondo, invece, spostando

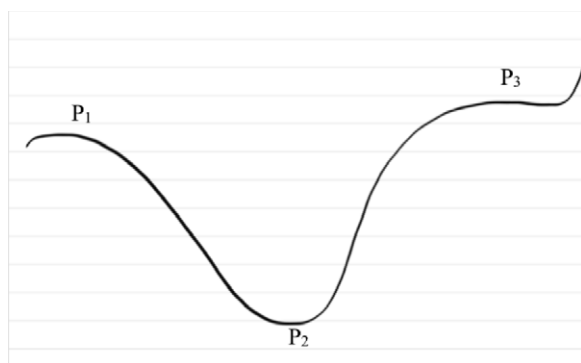


Figura 7.3: Il punto è in equilibrio nelle posizioni P_1, P_2, P_3 che hanno tangente orizzontale.

il punto materiale, entro un conveniente intorno, dalla posizione di equilibrio, con velocità sufficientemente piccola, esso descrive attorno a detta posizione, oscillazioni di grandezza limitata.

Nei punti di flesso (P_3 , p.es.) ove il piano tangente, o la tangente, è orizzontale, si hanno posizioni di equilibrio instabile.

7.4 Posizioni d'equilibrio indifferente

Se avviene che tutti i punti nell'intorno di una posizione di equilibrio, sono ancor essi posizioni di equilibrio, si dice che questi punti sono posizioni di equilibrio indifferente.

Per la forza peso, ad esempio, sono posizioni di equilibrio indifferente tutti i punti di un piano orizzontale.

Capitolo 8

DINAMICA DEI SISTEMI

In modo analogo allo studio della dinamica del punto, consideriamo, ora, la dinamica dei sistemi. Nel caso più generale, supponiamo che il sistema sia costituito da n punti, P_1, P_2, \dots, P_n , e limitandoci, per brevità, a considerare solo uno di essi, P_1 p.es., proponiamoci di determinare le forze agenti su di esso. Queste forze si possono dividere in due gruppi: forze esterne e forze interne. Le prime sono quelle esercitate da cause esterne su tutti i punti del sistema; le seconde, invece, sono quelle che gli altri punti del sistema esercitano sul punto considerato. Ad esempio, nel caso di due punti materiali carichi di elettricità, la forza esterna è rappresentata dal peso che agisce su di essi; la forza interna è, invece, la forza Coulombiana, attrattiva o repulsiva, che i punti esercitano tra di loro.

In conclusione, potremo supporre applicate, ad ogni punto, P_k , del sistema, due forze: $F_{k,i}$ ed $F_{k,e}$, rispettivamente, risultante delle forze interne e risultante delle forze esterne che agiscono sul punto.

Per ciò che riguarda la prima di queste forze, per ciascuno degli n punti del sistema, essa ci sarà data rispettivamente dalle somme:

$$\begin{aligned} F_{1,i} &= F_{1,2} + F_{1,3} + \dots + F_{1,n} \\ F_{2,i} &= F_{2,1} + F_{2,3} + \dots + F_{2,n} \\ &\dots \quad \dots\dots \\ F_{n,i} &= F_{n,1} + F_{n,2} + \dots + F_{n,n-1}, \end{aligned}$$

dove $F_{h,k}$ indica la forza agente su P_h per effetto di P_k .

Facciamo l'ipotesi, che realmente si verifica in tutte le applicazioni della fisica, che le forze $F_{h,k}$ ed $F_{k,h}$ abbiano direzione comune secondo la congiungente i punti P_h e P_k , eguale grandezza e, quanto al senso, poi, $F_{h,k}$ sia diretta da P_k verso P_h ed $F_{k,h}$ da P_h a P_k .

Vediamo, ora, come si determina la posizione degli n punti: bisognerà dare le coordinate di ciascuno di essi in funzione del tempo. In totale, dunque occorrono $3n$ condizioni. Notando poi che F_h , risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti su P_h , ci è dato da:

$$F_h = F_{h,e} + F_{h,i} = F_{h,e} + F_{h,1} + F_{h,2} + \dots + F_{h,n},$$

le equazioni di moto degli n punti (con evidente significato dei simboli) saranno:

$$\begin{aligned} m_1 A_1 &= F_{1,e} + F_{1,i} \\ m_2 A_2 &= F_{2,e} + F_{2,i} \\ &\dots \quad \dots\dots \\ m_n A_n &= F_{n,e} + F_{n,i}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Queste n equazioni vettoriali ne rappresentano $3n$ scalari. Proiettando le (8.1) sull'asse x avremo:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_{1,e_x} + F_{1,i_x} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_{2,e_x} + F_{2,i_x} \\ &\dots \quad \dots\dots \\ m_n \ddot{x}_n &= F_{n,e_x} + F_{n,i_x} \end{aligned}$$

ed avremo ancora altre $2n$ espressioni analoghe proiettando le (8.1) sull'asse y e sull'asse z . In totale, dunque, otterremo $3n$ equazioni differenziali costituenti un sistema, da cui si potranno ricavare le $3n$ coordinate in funzione del tempo e di $6n$ costanti arbitrarie. Avremo, dunque:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}) \\ y_1 &= y_1(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}) \\ z_1 &= z_1(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}) \\ &\dots \quad \dots\dots \\ x_n &= x_n(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}) \\ y_n &= y_n(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}) \\ z_n &= z_n(t, C_1, C_2 \dots C_{6n}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Per determinare le $6n$ costanti, debbono, al solito esser note $6n$ condizioni iniziali. Se, ad esempio, per $t = t_0$, è:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0}, & y_1 &= y_{1,0}, & z_1 &= z_{1,0} \\ x_2 &= x_{2,0}, & y_2 &= y_{2,0}, & z_2 &= z_{2,0} \\ &\dots & \dots\dots & & & \\ x_n &= x_{n,0}, & y_n &= y_{n,0}, & z_n &= z_{n,0}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

ed

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_{1,0}, & \dot{y}_1 &= \dot{y}_{1,0}, & \dot{z}_1 &= \dot{z}_{1,0} \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_{2,0}, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_{2,0}, & \dot{z}_2 &= \dot{z}_{2,0} \\ &\dots & \dots\dots & & & \\ \dot{x}_n &= \dot{x}_{n,0}, & \dot{y}_n &= \dot{y}_{n,0}, & \dot{z}_n &= \dot{z}_{n,0}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

sostituendo nelle (8.2) i valori forniti dalle (8.3) e ponendo: $t = t_0$; derivando le (8.2) medesime ponendovi ancora: $t = t_0$, e sostituendovi i valori dati dalle (8.4), si ottiene, infine un sistema di $6n$ equazioni nelle $6n$ incognite C_1, C_2, \dots, C_{6n} , che possono così essere determinate. Le $6n$ condizioni iniziali possono essere date anche in altro modo, ad esempio, dando, per due distinti valori del tempo, le corrispondenti coordinate di ciascuno degli n punti del sistema.

8.1 Risultante delle forze di un sistema

Il risultante delle forze di un sistema (somma vettoriale delle forze) ci è dato da

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n;$$

e, tenendo presente che è:

$$F_h = F_{h,e} + F_{h,i}$$

avremo

$$R = F_{1,e} + F_{2,e} + \dots + F_{n,e} + F_{1,i} + F_{2,i} + \dots + F_{n,i} = R_e + R_i$$

dove R_e ed R_i sono, rispettivamente, il risultante delle forze esterne e il risultante delle forze interne.

Vogliamo dimostrare che è:

$$R_i = 0.$$

Infatti è:

$$R_i = F_{1,2} + F_{1,3} + \dots + F_{1,n} + \dots + F_{2,1} + \dots + F_{n,n-1},$$

e si può vedere immediatamente che tale somma è formata di termini che si elidono a due a due, poiché è: $F_{h,k} + F_{k,h} = 0$.

Concludiamo, quindi, che il risultante delle forze di un sistema, si identifica col solo risultante delle forze esterne.

8.2 Quantità di moto e impulso nei sistemi

Riprendiamo le equazioni del moto degli n punti di un sistema:

$$\begin{aligned} m_1 A_1 &= F_{1,e} + F_{1,i} \\ m_2 A_2 &= F_{2,e} + F_{2,i} \\ &\dots \dots\dots \\ m_n A_n &= F_{n,e} + F_{n,i} \end{aligned} \tag{8.5}$$

e sommiamole membro a membro; otterremo:

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n = R_e$$

ovvero, identicamente:

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} + m_2 \frac{dV_2}{dt} + \dots + m_n \frac{dV_n}{dt} = R_e;$$

e poichè le masse sono costanti, potremo scrivere la precedente:

$$\frac{d}{dt} (m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n) = R_e.$$

L'espressione tra parentesi rappresenta, evidentemente, la quantità di moto del sistema e, indicando questa con q , avremo:

$$\frac{dq}{dt} = R_e, \quad (8.6)$$

espressione, questa, che integrata tra due valori t_1 e t_2 , del tempo, ci dà:

$$q_2 - q_1 = \int_{t_1}^{t_2} R_e dt.$$

Quest'ultima espressione è analoga a quella trovata nel caso di un sol punto materiale; potremo, quindi, anche per i sistemi, concludere che **la variazione della quantità di moto è uguale all'impulso del risultante delle forze esterne.**

Nel caso in cui tutte le forze esterne siano nulle, sarà:

$$R_e = 0,$$

e quindi

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{da cui} \quad q = \text{cost.}$$

La variazione della quantità di moto di un sistema¹ rimane costante al variare del tempo. In ciò consiste il **teorema di conservazione della quantità di moto.**

¹isolato, cioè non soggetto a forze esterne (NdR)

8.3 Centro di gravità

Dato un sistema discreto costituito di n punti: P_1, P_2, \dots, P_n , le cui coordinate sono:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n),$$

rispettivamente, e le cui masse sono: m_1, m_2, \dots, m_n ; si definisce centro di gravità del sistema un punto P_0 , le cui coordinate, x_0, y_0, z_0 , sono date dalle relazioni:

$$P_0 \equiv \begin{cases} x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}.$$

Oltre alla precedente definizione scalare se ne può dare anche una vettoriale.

A tal uopo, scelta la solita terna cartesiana di riferimento, considerando il vettore $(P_0 - O)$, che unisce il centro di gravità con l'origine degli assi, ed i vettori: $(P_1 - O), (P_2 - O), \dots, (P_n - O)$, definiremo, in modo analogo a quanto si è fatto scalarmente, centro di gravità quel punto, P_0 , tale che il

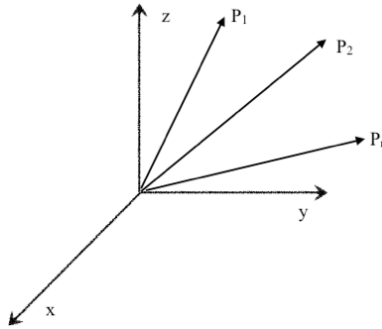


Figura 8.1: I vettori $(P_i - O)$, $i = 1, \dots, n$, usati per definire il centro di gravità.

suo raggio vettore, $(P - O)$, sia dato dall'espressione:

$$(P_0 - O) = \frac{m_1(P_1 - O) + m_2(P_2 - O) + \dots + m_n(P_n - O)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (8.7)$$

che si può, più brevemente, scrivere:

$$(P_0 - O) = \frac{\sum m_i(P_i - O)}{\sum m_i}.$$

Vogliamo, ora, dimostrare come l'arbitrarietà della scelta del punto O di riferimento, non influisca affatto sulla determinazione del centro di gravità, il quale risulta, quindi, una proprietà geometrica del sistema considerato, indipendente dal riferimento.

Supponiamo, infatti, di riferirci ad un nuovo punto O' , e sia $P_{O'}$ la nuova posizione trovata per il centro di gravità. Avremo

$$(P_{O'} - O') = \frac{m_1(P_1 - O') + m_2(P_2 - O') + \cdots + m_n(P_n - O')}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \quad (8.8)$$

Sottraendo, membro a membro, la (8.8) dalla (8.7), otteniamo

$$(P_0 - P_{O'}) + (O' - O) = \frac{m_1(O' - O) + m_2(O' - O) + \cdots + m_n(O' - O)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Raccogliendo, nel secondo membro, $(O' - O)$ a fattor comune si ha:

$$(P_0 - P_{O'}) + (O' - O) = (O' - O) \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = (O' - O)$$

da cui, infine, sopprimendo il primo e terzo membro della precedente espressione il termine $(O' - O)$:

$$(P_0 - P_{O'}) = 0.$$

Concludiamo, quindi, che P_0 e $P_{O'}$ coincidono.

8.4 Centro di gravità per un sistema continuo.

Estendiamo, ora, il concetto di centro di gravità ad un sistema continuo, sistema che potrà essere esteso in volume, in superficie, o linearmente.

Vediamo, anzitutto, cosa s'intenda, in ciascuno di questi tre casi per densità.

Per un sistema esteso in volume, consideriamo un elemento infinitesimo di volume, τ , e detta m la massa in esso contenuta, facciamo il rapporto: m/τ , e consideriamone il limite per $\tau \rightarrow 0$. Avremo:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m}{\tau} = \frac{dm}{d\tau} = \rho \quad (\text{densità}); \quad (8.9)$$

cioè, definiscisi densità di volume il limite (determinato e finito) del rapporto tra la massa ed il corrispondente volume quando quest'ultimo tenda a zero.

Dalla (8.9) ricaviamo immediatamente:

$$m = \rho d\tau.$$

Se il sistema non è omogeneo, integreremo la precedente espressione, estendendo l'integrale al volume del sistema stesso, ed avremo così la sua massa totale. Se il sistema, invece, è omogeneo ed è, quindi: $\rho = \text{cost.}$, la sua massa ci sarà data, senz'altro, dal prodotto della densità per il volume. Per un sistema esteso in superficie considereremo un elemento infinitesimo, σ , di questa e, in modo analogo al caso precedente, avremo

$$\frac{dm}{d\sigma} = \rho \quad \text{e} \quad dm = \rho d\sigma.$$

Per un sistema filiforme, infine:

$$\frac{dm}{dl} = \rho \quad \text{e} \quad dm = \rho dl$$

dove dl rappresenta un elemento infinitesimo della lunghezza.

Per la massa totale di un corpo esteso in volume, in superficie, o linearmente, avremo, rispettivamente i tre integrali:

$$m_\tau = \int \rho d\tau; \quad m_\sigma = \int \rho d\sigma; \quad m_l = \int \rho dl.$$

Il primo di questi è un integrale triplo, ed è precisamente:

$$m_\tau = \iiint \rho dx dy dz;$$

Il secondo è un integrale doppio ed il terzo è un integrale semplice.

Tenendo conto delle formule ora stabilite, per le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in volume avremo:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho x d\tau}{\int \rho d\tau} \\ y_0 &= \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho y d\tau}{\int \rho d\tau} \\ z_0 &= \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho z d\tau}{\int \rho d\tau}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Per le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in superficie:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho x d\sigma}{\int \rho d\sigma} \\ y_0 &= \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho y d\sigma}{\int \rho d\sigma} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Infine nel caso di un sistema esteso linearmente:

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho x dl}{\int \rho dl}$$

Vettorialmente, per un sistema, ad esempio, esteso in volume, si avrà:

$$P_0 - O = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i} = \frac{\int \rho (P - O) d\tau}{\int \rho d\tau}.$$

Se il sistema è omogeneo, ρ è costante quindi si potrà portar fuori dal segno di integrale, risulterà cioè:

$$(P_0 - O) = \frac{\rho}{\rho} \frac{\int (P - O) d\tau}{\int d\tau} = \frac{\int (P - O) d\tau}{\int d\tau};$$

si riconosce così come la posizione del centro di gravità dipenda unicamente dalle proprietà geometriche del sistema e non dalla sua densità. Analogamente per sistemi omogenei estesi in superficie o linearmente.

8.5 Determinazione del centro di gravità di alcuni particolari sistemi

Consideriamo, dapprima, il caso più semplice in cui i punti del sistema si riducono a due. Siccome la posizione del centro di gravità non dipende dalla scelta del sistema di assi, adottiamo come origine di questo uno dei punti del sistema, e come asse delle ascisse la retta passante per l'altro punto. I due punti avranno le coordinate:

$$\begin{cases} P_1 \equiv (0, 0, 0) \\ P_2 \equiv (a, 0, 0). \end{cases}$$

Applicando le formule che danno il centro di gravità, otteniamo:

$$G \equiv \begin{cases} x_0 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

dove m_1 ed m_2 rappresentano, rispettivamente, le masse di P_1 e P_2 . Il centro di gravità giace, quindi, sulla congiungente i due punti, e la sua distanza da

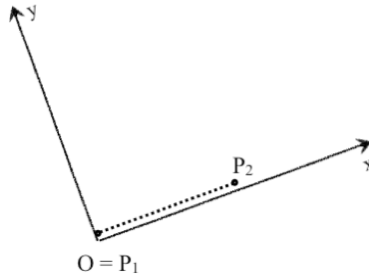


Figura 8.2: Il sistema di due punti considerato nel testo.

P_1 (quando si sia scelto tale punto come origine degli assi) ci è data dalla (8.12). La distanza da P_2 , in questo caso, sarà dunque:

$$a - \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2},$$

e facendo il rapporto tra queste due distanze:

$$\frac{\overline{GP_1}}{\overline{GP_2}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

La distanza, dunque, del centro di gravità dai due punti è in ragione inversa delle loro masse.

Consideriamo, ora, in generale un sistema di punti in numero qualunque. Per determinare il centro di gravità, G , del sistema, divideremo questo in α sistemi parziali di n punti ciascuno. Di ciascun sistema parziale troviamo il centro di gravità, e ad ognuno di questi centri attribuiamo una massa eguale alla somma delle masse proprie dei punti del sistema parziale. Avremo dunque un nuovo sistema formato dagli α centri di gravità. Ci proponiamo di dimostrare che il centro di gravità di questo sistema coincide con quello del primitivo. Indichiamo un punto del sistema dato con due indici, il primo relativo al sistema parziale cui il punto appartiene, il secondo indicante il numero d'ordine del punto nel sistema parziale stesso; sia, poi, G_i il centro di gravità del sistema parziale i -esimo:

$$\begin{array}{cccc|c}
 P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,n_1} & G_1 \\
 P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,n_2} & G_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{\alpha,1} & P_{\alpha,2} & \dots & P_{\alpha,n_\alpha} & G_\alpha
 \end{array}$$

Consideriamo ora, ad esempio il primo sistema parziale. Le masse degli n_1 punti di esso sono:

$$m_{1,1} \quad m_{1,2} \quad \dots \quad m_{1,n_1},$$

dovremo quindi attribuire a G_1 una massa m_1 data dalla somma:

$$m_{1,1} + m_{1,2} \quad \dots + m_{1,n_1} = m_1.$$

Analoghe considerazioni valgono per gli altri sistemi parziali.

Poichè si vuol dimostrare che il centro di gravità, G , del sistema $G_1, G_2, \dots, G_\alpha$, coincide con quello del sistema dato, osserviamo che le coordinate, $x_{G_1}, x_{G_2}, \dots, x_{G_\alpha}$, dei centri di gravità parziali ci son date, rispettivamente dalle relazioni:

$$\begin{array}{l}
 x_{G_1} = \frac{m_{1,1}x_{1,1} + m_{1,2}x_{1,2} \quad \dots + m_{1,n_1}x_{1,n_1}}{m_{1,1} + m_{1,2} \quad \dots + m_{1,n_1}} \\
 x_{G_2} = \frac{m_{2,1}x_{2,1} + m_{2,2}x_{2,2} \quad \dots + m_{2,n_2}x_{2,n_2}}{m_{2,1} + m_{2,2} \quad \dots + m_{2,n_2}} \\
 \dots \\
 x_{G_\alpha} = \frac{m_{\alpha,1}x_{\alpha,1} + m_{\alpha,2}x_{\alpha,2} \quad \dots + m_{\alpha,n_\alpha}x_{\alpha,n_\alpha}}{m_{\alpha,1} + m_{\alpha,2} \quad \dots + m_{\alpha,n_\alpha}}
 \end{array} \quad (8.13)$$

Il centro di gravità del sistema formato dai centri di gravità parziali avrà per coordinata secondo l'asse x :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G_1} + m_2 x_{G_2} + \dots + m_\alpha x_{G_\alpha}}{M},$$

ove M è la massa totale del sistema dato. Ma per la (8.13) l'espressione precedente diviene:

$$\begin{aligned}
 x_G = \frac{1}{M} & (m_{1,1}x_{1,1} + m_{1,2}x_{1,2} \quad \dots + m_{1,n_1}x_{1,n_1} \\
 & + m_{2,1}x_{2,1} + m_{2,2}x_{2,2} \quad \dots + m_{2,n_2}x_{2,n_2} \\
 & + m_{\alpha,1}x_{\alpha,1} + m_{\alpha,2}x_{\alpha,2} \quad \dots + m_{\alpha,n_\alpha}x_{\alpha,n_\alpha})
 \end{aligned}$$

Quest'espressione, assieme alle analoghe per y_G e z_G , coincide con quella che si ottiene quando si calcoli il centro di gravità del sistema primitivo, applicando la definizione di centro di gravità. Il nostro asserto è così dimostrato.

Vediamo, ora, di applicare quanto sopra ad alcuni casi concreti:

I) Sia da determinarsi il centro di gravità di un sistema costituito da tre punti A, B, C , non allineati, supponendo (per semplicità) che sia:

$$m_A = m_B = m_C = 1.$$

Scomponiamo il sistema dato in due sistemi parziali, dei quali il primo

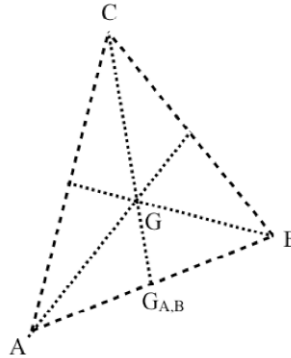


Figura 8.3: Il centro di gravità di tre punti di massa uguale.

costituito, p.es., dai punti A e B , il secondo dal solo punto C .

Il centro di gravità del primo sistema parziale, $G_{A,B}$, come già si è visto si trova sulla congiungente i due punti e, in questo caso, ad uguale distanza da essi. La massa che dobbiamo attribuire a $G_{A,B}$ ci è data dalla somma:

$$m_A + m_B = 2.$$

Passiamo ora a determinare il centro di gravità del sistema costituito da $G_{A,B}$ e C . Anche in questo caso il centro di gravità si troverà sulla congiungente i due punti, ma, essendo differenti le loro masse, la sua distanza da essi sarà in ragione inversa di queste. Avremo quindi:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GG_{A,B}}} = \frac{2}{1} = 1.$$

La distanza, dunque, del centro di gravità G dal punto C è doppia di quella che divide G da $G_{A,B}$. È facile riconoscere che G coincide col punto di incontro delle mediane del triangolo ABC .

II) Centro di gravità di un triangolo omogeneo.

Vediamo come, anche in questo caso il centro di gravità si trovi nel punto di incontro delle mediane. Dividiamo mediante rette parallele, ad

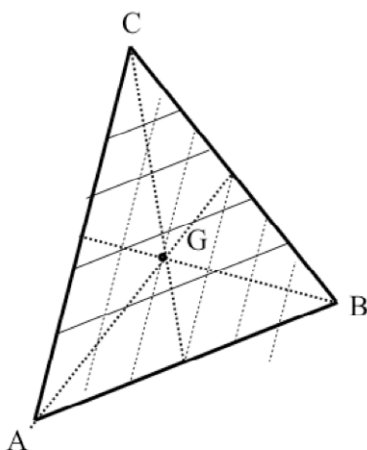


Figura 8.4: Il centro di gravità di un triangolo omogeneo.

esempio, al lato \overline{AB} , il triangolo in tanti trapezi di altezza infinitesima, trapezi che potremo, perciò assimilare a rettangoli della stessa altezza. Si vede che il centro di gravità di ognuno di questi rettangolini, coincide col loro centro di figura, e come tutti questi centri di gravità risultino allineati su di una medesima retta che si riconosce essere una delle mediane del triangolo. Essendo, dunque, tutti i punti del nuovo sistema, costituito dai centri di gravità dei rettangolini, allineati su di una mediana, il centro di gravità del sistema costituito da detti punti sarà situato sulla mediana medesima. Se osserviamo che le medesime considerazioni avremmo potuto fare dividendo il triangolo mediante rette parallele agli altri due lati, è chiaro che il centro di gravità del triangolo si troverà nel punto d'incontro delle mediane, dovendo appartenere a ciascuna di esse.

III) Centro di gravità di un semicerchio omogeneo.

Per un cerchio, evidentemente, si troverebbe come baricentro il centro stesso di figura. Per determinare, invece, il centro di gravità di un semicerchio omogeneo, procederemo come segue.

Dividiamo il semicerchio per mezzo di tante rette parallele al diametro, ponendo, per brevità, la densità eguale ad 1, ed indicando con dx l'altezza di uno dei rettangoli infinitesimi in cui il semicerchio è stato diviso.

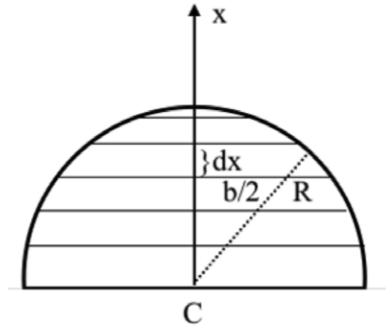


Figura 8.5: Il centro di gravità di un semicerchio omogeneo.

La lunghezza della base, b , di un rettangolino generico, ci è data da

$$b = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

(dove R è il raggio del semicerchio); e, quindi, per l'area infinitesima, avremo:

$$dA = 2dx\sqrt{R^2 - x^2},$$

formula, questa, che, essendo unitaria la densità, ci dà anche la massa del rettangolino considerato. Osserviamo poi che (per la stessa ragione) la massa totale ci è data da:

$$M = \frac{\pi}{2}R^2;$$

poichè, per evidenti ragioni di simmetria, il centro di gravità dovrà trovarsi sul raggio normale al diametro del semicerchio, se scegliamo questo raggio come asse x , essendo da determinare la sola ascissa x_0 (contata a partire dal centro del cerchio) del baricentro, avremo per essa:

$$x_0 = \frac{2 \int_0^R x dx \sqrt{R^2 - x^2}}{\frac{\pi}{2} R^2}.$$

Operando, nella precedente, la sostituzione:

$$R^2 - x^2 = z \quad \text{da cui} \quad -2x dx = dz$$

essa diviene:

$$x_0 = -\frac{\int_{R^2}^0 \sqrt{z} dz}{\frac{\pi}{2} R^2} = -\frac{\left[\frac{2}{3} z^{3/2}\right]_{R^2}^0}{\frac{\pi}{2} R^2} = -\frac{\left[\frac{2}{3} (\sqrt{R^2 - x^2})^{3/2}\right]_0^R}{\frac{\pi}{2} R^2},$$

da cui, infine:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi}{2} R^2} = \frac{4}{3\pi} R.$$

IV) Sia da determinare il centro di gravità del sistema costituito da due sfere omogenee, esterne l'una all'altra, di raggio R_1 ed R_2 , rispettivamente. Al solito, supponiamo che la densità sia unitaria. La massa della prima sfera

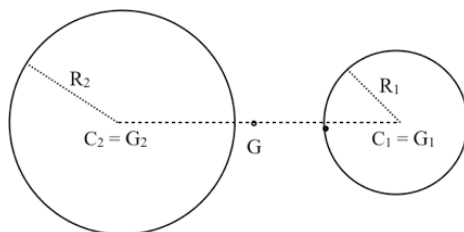


Figura 8.6: Il centro di gravità di due sfere omogenee di raggio R_1 ed R_2 , rispettivamente.

sarà:

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3,$$

e quella della seconda

$$M_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3,$$

Scisso il sistema dato in due sistemi parziali, costituito, ciascuno, da una delle sfere, il centro di gravità di questi sistemi coinciderà col centro della sfera, e la massa da attribuire a ciascuno dei due centri di gravità parziali sarà quella stessa della sfera corrispondente. Il centro di gravità del sistema primitivo si troverà sulla congiungente i centri di gravità parziali G_1 e G_2 , a distanza da essi inversamente proporzionale alle rispettive masse.

V) Proponiamoci di determinare il centro di gravità di un triangolo omogeneo, mediante la suddivisione in sistemi parziali.

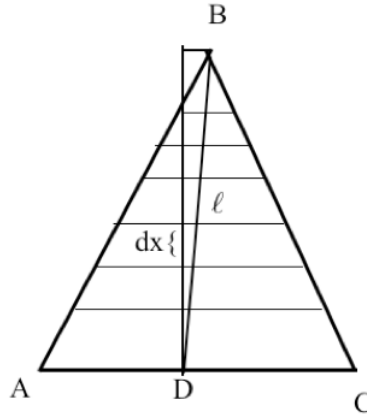


Figura 8.7: Il centro di gravità di un triangolo omogeneo.

Dividiamo il triangolo mediante rette parallele ad uno dei lati, p.es. \overline{AC} , in tanti trapezi di altezza infinitesima e che si possono, perciò, assimilare a dei rettangoli. Osserviamo, ora, che il centro di gravità dei rettangoli in parola coincide col centro di figura, quindi, per evidenti proprietà geometriche, i centri di gravità risulteranno situati su di una medesima retta che è una mediana del triangolo. La massa, poi, da attribuire a ciascuno dei centri di gravità parziali, è data dal prodotto della densità ρ (costante) per l'area del rettangolino corrispondente. Indichiamo con x la distanza variabile della base di uno dei rettangoli dal vertice B , presa sulla mediana \overline{BD} . L'altezza h di un rettangolino generico sarà data dal prodotto dell'incremento dx della variabile per il coseno dell'angolo che la \overline{BD} forma con la n normale ad \overline{AC} . Essendo questo coseno eguale per tutti i rettangoli infinitesimi che si considerano, possiamo porre per l'area di uno di questi dA :

$$dA = \kappa x dx.$$

La massa, poi, di ciascun rettangolino (supposta concentrata nel centro di gravità) :

$$dM = \rho dA.$$

Applicando quindi la prima delle formule che ci danno le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in superficie (vedi (8.11)), abbiamo:

$$x_0 = \frac{\int_0^l \rho x dA}{\int_0^l \rho dA} = \frac{\int_0^l \rho \kappa x^2 dx}{\int_0^l \rho \kappa x dx} = \frac{\int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x dx} = \frac{\frac{l^3}{3}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{2}{3}l,$$

essendosi indicata con l la lunghezza della mediana \overline{BD} .

Si conclude quindi che il centro di gravità di un triangolo omogeneo si trova su ogni mediana a $2/3$ della sua lunghezza a partire dal vertice.

VI) Vediamo ora di determinare il centro di gravità di una piramide omogenea a base triangolare. Dividiamo la piramide, mediante piani paralleli alla base, in tanti solidi di altezza infinitesima. Questi piccoli prismi si potranno confondere (dato che l'altezza è infinitesima) con i triangoli base dei quali ultimi sappiamo determinare i centri di gravità che risulteranno tutti situati sulla retta che congiunge il vertice, D , della piramide col baricentro della base ABC .

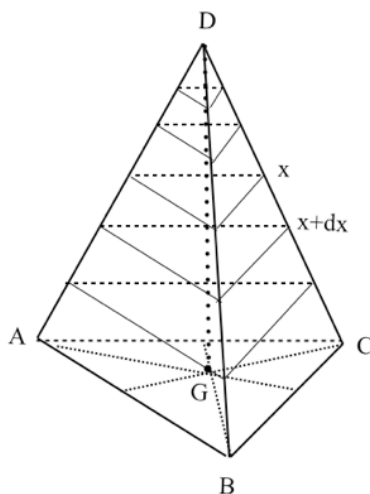


Figura 8.8: Il centro di gravità di una piramide omogenea.

La base di un prismetto generico risulterà proporzionale al quadrato della sua distanza, x , dal vertice D ; l'altezza, a parte un fattore di pro-

porzionalità, sarà proporzionale a dx . Il volume dV di un prismetto sarà allora

$$dV = \kappa x^2 dx.$$

Quindi per l'ascissa x_0 del centro di gravità (vedi (8.10)) avremo:

$$x_0 = \frac{\int_0^l x dm}{\int_0^l dm} = \frac{\int_0^l \rho \kappa x^2 dx}{\int_0^l \rho \kappa x^2 dx} = \frac{\int_0^l x^3 dx}{\int_0^l x^2 dx},$$

e, infine, eseguendo la quadratura:

$$x_0 = \frac{\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^l}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l} = \frac{\frac{l^4}{4}}{\frac{l^3}{3}} = \frac{3}{4} l$$

essendo l la lunghezza della congiungente il vertice col baricentro della base, a $3/4$ della lunghezza a partire dal vertice, o, ciò che è lo stesso, il baricentro della piramide coincide con quello della sezione parallela alla base praticata a $1/4$ dell'altezza a partire dalla base stessa.

8.6 Proprietà dinamiche del centro di gravità

Consideriamo un sistema di punti P_1, P_2, \dots, P_n , di masse m_1, m_2, \dots, m_n , rispettivamente, e agisca su ogni punto una forza esterna, F_e , ed una interna, F_i . Indichiamo con X, Y, Z , le componenti di una forza generica F . Limitandoci, per brevità, a considerare solo le componenti x delle equazioni del moto degli n punti, avremo (con significato evidente degli indici):

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_{1,e} + X_{1,i} \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_{2,e} + X_{2,i} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= X_{n,e} + X_{n,i}. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le precedenti relazioni, e tenendo conto che il risultante delle forze interne è nullo, otteniamo:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + \dots + m_n \ddot{x}_n = X_{1,e} + X_{2,e} + \dots + X_{n,e} = R_{e,x}, \quad (8.14)$$

Ma la (8.14) può scriversi:

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + \dots + m_n\dot{x}_n) = R_{e,x},$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per dt ed integrando, si perviene alla nota relazione che lega la quantità di moto all'impulso.

In altro modo, possiamo scrivere la (8.14) sotto la forma:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) = R_{e,x};$$

moltiplicando e dividendo, poi, il primo membro di quest'ultima per la massa totale, M , del sistema, otterremo:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = R_{e,x} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e, poiché è:

$$\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = x_0 \quad (\text{ascissa del centro di gravità}), \quad (8.15)$$

concludiamo che è:

$$M\ddot{x}_0 = R_{e,x}.$$

ed analogamente:

$$M\ddot{y}_0 = R_{e,y}, \quad M\ddot{z}_0 = R_{e,z}.$$

Queste relazioni ci definiscono il moto del centro di gravità. Si vede come esse presentino perfetta analogia con le equazioni del moto di un punto dotato di massa eguale alla massa totale del sistema e soggetto ad una forza risultante delle forze esterne agenti sul sistema stessa. Nel caso poi in cui si annulli il risultante delle forze esterne, il centro di gravità avrà accelerazione nulla e si muoverà, quindi, di moto rettilineo uniforme.

8.7 Momento di vettori applicati

Introduciamo, a questo punto, il concetto di vettore applicato. Mentre sinora abbiamo considerato i vettori avendo riguardo solo alla loro grandezza, direzione e senso, a prescindere dalla loro ubicazione nello spazio, diremo vettore applicato un vettore determinato mediante i suoi tre elementi caratteristici e che abbia l'origine in un punto prefissato dello spazio.

Scelto, un punto, O , qualsiasi, dicesi momento, μ , di un vettore A applicato in un punto P , rispetto ad O , il prodotto vettoriale:

$$(P - O) \wedge A = \mu.$$

Si vede immediatamente che μ è un vettore normale al piano di $(P - O)$

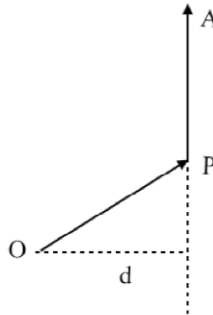


Figura 8.9: Vettore applicato A e braccio del vettore, d .

e di A , la cui grandezza è data dall'area del parallelogrammo costruito sui due vettori o, ciò che è lo stesso, dall'area del rettangolo avente per base la normale, d , abbassata da O sulla retta di applicazione di A , e per altezza la grandezza del vettore; d si chiama braccio del vettore. Il momento di un sistema di vettori applicati, rispetto ad un punto, è uguale alla somma dei momenti dei singoli vettori rispetto al punto stesso.

8.8 Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta

Definiscesi momento di un vettore A , applicato in un punto P , rispetto ad una retta r la proiezione, sulla retta stessa, del momento di A rispetto ad un punto generico della retta.

Dimostriamo, ora, che il momento del vettore applicato, rispetto ad una retta, è indipendente dal punto della retta cui ci si riferisce. Osserviamo che i momenti calcolati rispetto a due punti, O ed O' , della retta ci sono dati rispettivamente da:

$$\begin{aligned} (P - O) \wedge A &= \mu \\ (P - O') \wedge A &= \mu'. \end{aligned} \tag{8.16}$$

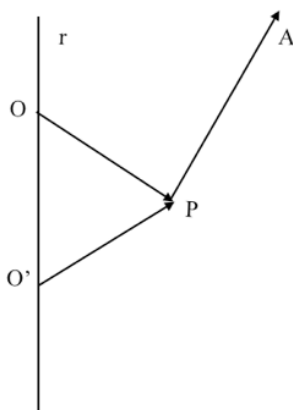


Figura 8.10: Momento del vettore A rispetto ad una retta.

Sottraendo membro a membro la seconda parte di queste relazioni dalla prima, otteniamo:

$$\mu - \mu' = (O' - O) \wedge A. \quad (8.17)$$

Di qui si vede come il vettore $(\mu - \mu')$ sia normale ad $(O' - O)$ e quindi alla retta r . La proiezione della differenza $\mu - \mu'$ su r sarà, quindi, nulla e siccome la proiezione di una differenza è uguale alla differenza delle proiezioni, se ne conclude che queste proiezioni sono eguali e, quindi, sono eguali i momenti del vettore A rispetto ad r , calcolati rispetto ad O ed O' , rispettivamente.

Significato geometrico del momento di un vettore rispetto ad una retta

Supponiamo, in un primo tempo, che il vettore giaccia in un piano normale alla retta.

In questo caso, evidentemente, il momento del vettore rispetto alla retta coincide in grandezza col momento calcolato rispetto al punto d'incontro del piano con la retta stessa.

Se, invece, poniamo che la direzione del vettore A sia sghemba con la retta r rispetto alla quale si debba calcolare il momento, ma non giaccia nel piano α normale ad r . Potremo allora scomporre questo vettore in due componenti, l'una parallela ad r , e l'altra normale e giacente, quindi, nel piano α . È intuitivo che il momento della prima componente, A' , è nullo, poiché la proiezione del momento di A' , calcolato rispetto al punto O d'intersezione di α con r , su R coincide col punto O stesso. Ci si riduce, dunque a considerare

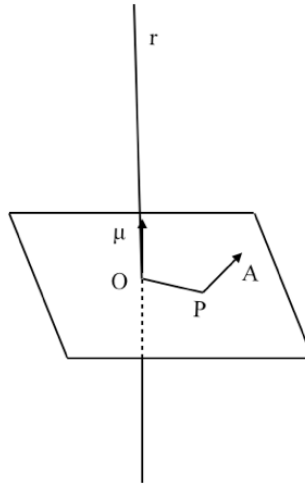


Figura 8.11: Significato geometrico del momento di un vettore rispetto ad una retta.

la sola componente A'' che giace nel piano α ; così ci siamo ricondotti al caso precedentemente studiato.

Rappresentazione analitica del momento di un vettore applicato.

Vediamo di studiare il momento di un vettore A rispetto ad un punto O , dal punto di vista analitico. Prendiamo, a questo scopo, una terna cartesiana di riferimento, scegliendola in modo che il punto O coincida con l'origine degli assi. Il vettore, A , sia dato mediante le sue componenti, A_x, A_y, A_z , e siano x, y, z , le coordinate del punto P cui A è applicato. Le tre componenti del momento, μ , di A rispetto ad O , ci saranno date da:

$$\begin{aligned}\mu_x &= yA_z - zA_y \\ \mu_y &= zA_x - xA_z \\ \mu_z &= xA_y - yA_x,\end{aligned}$$

essendo queste espressioni le tre componenti, secondo x, y, z , del prodotto vettoriale:

$$(P - O) \wedge A$$

Il momento del vettore rispetto ad un punto di coordinate: x_1, y_1, z_1 , non

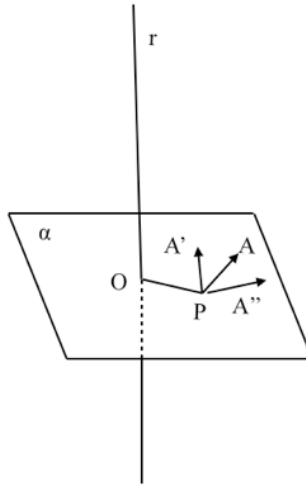


Figura 8.12: Momento di una forza sghemba rispetto ad un piano.

coincidente con l'origine degli assi, ha per componenti:

$$\begin{aligned}\mu_{1,x} &= (y - y_1)A_z - (z - z_1)A_y \\ \mu_{1,y} &= (z - z_1)A_x - (x - x_1)A_z \\ \mu_{1,z} &= (x - x_1)A_y - (y - y_1)A_x\end{aligned}$$

8.9 Momento delle forze interne di un sistema

Vogliamo, ora, dimostrare che il momento delle forze interne di un sistema è nullo.

Consideriamo dapprima due soli punti: P e Q . Detta $F_{P,Q}$ la forza che agisce su P per effetto di Q , ed $F_{Q,P}$ quella che agisce su Q per effetto di P , abbiamo fatta l'ipotesi che queste due forze abbiano direzione comune coincidente con la congiungente \overline{PQ} , grandezza eguale e senso opposto; risulti quindi

$$F_{P,Q} = -F_{Q,P}.$$

Calcoliamo il momento di queste due forze rispetto ad un punto O generico. Il momento di $F_{P,Q}$ ci è dato dall'espressione:

$$\mu = (P - O) \wedge F_{P,Q}$$

e quello di $F_{Q,P}$ da:

$$\mu' = (Q - O) \wedge F_{Q,P}.$$

sommando le due precedenti espressioni otteniamo il momento totale:

$$M = (P - O) \wedge F_{P,Q} + (Q - O) \wedge F_{Q,P} = (P - O) \wedge F_{P,Q} - (Q - O) \wedge F_{P,Q} = (P - Q) \wedge F_{P,Q}.$$

Ma i due vettori del precedente prodotto vettoriale sono paralleli fra loro, e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. Si conclude che il momento delle forze interne dei due punti, rispetto ad un punto generico, è nullo.

Questo risultato si estende ad un sistema costituito da un numero qualsiasi di punti, osservando che l'espressione del momento totale delle forze interne di un sistema è costituita da una somma i cui addendi si elidono a due a due. È implicito che questo momento è nullo anche rispetto ad una qualsiasi retta; infatti, il momento rispetto ad una retta non è altro che la proiezione su di essa del momento rispetto ad un suo punto.

8.10 Teorema del momento della quantità di moto

Consideriamo un sistema di n punti, P_1, P_2, \dots, P_n , di massa m_1, m_2, \dots, m_n e velocità: V_1, V_2, \dots, V_n , rispettivamente. Possiamo considerare le quantità di moto di questi punti

$$m_1 V_1, m_2 V_2, \dots, m_n V_n.$$

Queste quantità di moto sono dei vettori applicati nei punti di egual indice; potremo quindi considerarne il momento. Fissiamo, per semplicità la nostra attenzione sul solo punto P_1 , ed osserviamo che il momento della sua quantità di moto ($q_1 = m_1 V_1$) rispetto ad un punto generico, o ad una retta, coincide col prodotto della massa m_1 (che è uno scalare) per il momento della velocità V_1 rispetto al punto o alla retta.

Vogliamo ora calcolare le componenti del momento della quantità di moto di P_1 . A tal uopo, per quanto si è detto, dovremo calcolare il momento di V_1 . Le componenti di questo momento, calcolato rispetto ad O , ci sono date da:

$$\begin{cases} \mu_{O,x} = & y_1 V_{z_1} - z_1 V_{y_1} \\ \mu_{O,y} = & z_1 V_{x_1} - x_1 V_{z_1} , \\ \mu_{O,z} = & x_1 V_{y_1} - y_1 V_{x_1} \end{cases}$$

e moltiplicando per m_1 avremo le componenti del momento della quantità di moto.

Il momento della quantità di moto si dice anche quantità di moto areale perché, nel caso di un moto piano centrale, la sua espressione coincide con quella della costante del teorema delle aree.

8.11 Relazioni tra il momento delle forze agenti su di un sistema ed il momento della quantità di moto del sistema stesso

Le equazioni di moto degli n punti di un sistema, sono:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dV_1}{dt} &= F_{1,e} + F_{1,i} \\ m_2 \frac{dV_2}{dt} &= F_{2,e} + F_{2,i} \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ m_n \frac{dV_n}{dt} &= F_{n,e} + F_{n,i}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

Limitandosi, al solito, a considerare soltanto la prima delle precedenti espressioni, moltiplichiamo vettorialmente ambo i membri per $(P_1 - O)$, essendo O un punto fisso:

$$(P_1 - O) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} = (P_1 - O) \wedge (F_{1,e} + F_{1,i}).$$

Osserviamo, a questo punto, che il primo membro della precedente si può identicamente scrivere:

$$\frac{d}{dt} [(P_1 - O) \wedge m_1 V_1];$$

infatti, derivando otteniamo:

$$(P_1 - O) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} + \frac{d}{dt} (P_1 - O) \wedge m_1 V_1; \quad (8.19)$$

Vediamo ora come il secondo addendo della precedente sia nullo: notando che è:

$$\frac{d(P_1 - O)}{dt} = \frac{dP_1}{dt} - \frac{dO}{dt} = V_1 - V_O = V_1$$

perché, essendo O un punto fisso, la sua velocità V_O è nulla; il secondo addendo della (8.19) diventa:

$$V_1 \wedge m_1 V_1,$$

ma questo prodotto è nullo per il parallelismo dei due vettori V_1 e $m_1 V_1$. Operando analogamente sulle rimanenti delle (8.18), e sommando membro a membro, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n [(P_i - O) \wedge m_i V_i] = M_e$$

dove con M_e si indica il momento delle forze esterne (quello delle forze interne abbiamo già visto che è nullo). Indicando con Q il momento della quantità di moto del sistema, avremo dunque:

$$\frac{dQ}{dt} = M_e.$$

Possiamo, quindi, concludere che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema, rispetto ad un punto fisso, è uguale al momento delle sole forze esterne agenti sul sistema, rispetto al punto stesso. quanto sopra costituisce il **teorema delle quantità di moto areali**.

Identiche considerazioni valgono anche per il momento rispetto ad una retta; infatti, per ottenere il momento rispetto ad una retta, bisognerà prima trovare il momento rispetto ad un punto di essa, e quindi proiettare questo momento sulla direzione della retta medesima.

Se, poi, il momento delle forze esterne si annulla, avremo:

$$M_e = 0, \quad \text{e quindi:} \quad \frac{dQ}{dt} = 0,$$

espressione, quest'ultima, che ci dice essere, in tal caso, costante il momento della quantità di moto. Abbiamo, dunque il **teorema della conservazione del momento della quantità di moto** che dice che se il momento delle forze esterne, rispetto ad un punto o ad una retta, è nullo, resta costante la quantità di moto areale rispetto al punto o alla retta.

Vediamo, ora, come il teorema del momento della quantità di moto continui a valere anche quando si calcoli il momento, invece che rispetto ad un punto fisso O , rispetto a quel particolare punto mobile che è il centro di gravità, G , del sistema. Infatti, moltiplicando la prima della (8.18) vettorialmente per $(P_1 - G)$, abbiamo:

$$(P_1 - G) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} = (P_1 - G) \wedge (F_{1,e} + F_{1,i}).$$

Considerando, poi, l'espressione:

$$\frac{d}{dt} [(P_1 - G) \wedge m_1 V_1] = (P_1 - G) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} + \frac{d(P_1 - G)}{dt} \wedge m_1 V_1 \quad (8.20)$$

notiamo che è:

$$\frac{d(P_1 - G)}{dt} = \frac{dP_1}{dt} - \frac{dG}{dt} = V_1 - V_G;$$

e quindi la (8.20) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(P_1 - G) \wedge m_1 V_1] &= (P_1 - G) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} + (V_1 - V_G) \wedge m_1 V_1 \\ &= (P_1 - G) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} - V_G \wedge m_1 V_1, \end{aligned}$$

da cui, per $(P_1 - G) \wedge m_1 dV_1/dt$, ricaviamo:

$$(P_1 - G) \wedge m_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{d}{dt} [(P_1 - G) \wedge m_1 V_1] + V_G \wedge m_1 V_1.$$

Operando analogamente sulle rimanenti delle (8.18), e sommando membro a membro, infine otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n (P_i - G) \wedge m_i V_i = \frac{dQ_G}{dt} + V_G \wedge \sum_1^n m_i V_i = M_{e,G}. \quad (8.21)$$

A questo punto osserviamo che $V_G \wedge \sum_1^n m_i V_i$ si annulla. Infatti, detto O un punto fisso qualsiasi, abbiamo:

$$(G - O) = \frac{\sum_1^n (P_i - O) m_i}{\sum_1^n m_i},$$

e derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d(G - O)}{dt} = V_G - V_O = V_G = \frac{\sum_1^n m_i V_i}{\sum_1^n m_i},$$

ed essendo: $\sum_1^n m_i$, uno scalare, V_G e $\sum_1^n m_i V_i$ risultano paralleli, quindi è:

$$V_G \wedge \sum_1^n m_i V_i = 0$$

L'equazione (8.21) ci dà allora:

$$\frac{dQ_G}{dt} = M_{e,G}.$$

Si conclude, dunque, che la derivata del momento della quantità di moto del sistema, calcolato rispetto ad un punto fisso o al centro di gravità, G , del sistema, è uguale al momento delle forze esterne calcolato riferendosi ad O o a G , rispettivamente.

Capitolo 9

SISTEMI RIGIDI

Vedemmo già nella cinematica che, per fissare la posizione di un sistema rigido, sono necessarie e sufficienti sei grandezze scalari; per determinare il movimento basteranno quindi sei equazioni pure esse scalari. Ora, abbiamo le due equazioni vettoriali:

$$\frac{dq}{dt} = R_e \quad (9.1)$$

e

$$\frac{dQ}{dt} = M_e \quad (9.2)$$

che legano la quantità di moto al risultante delle forze esterne e la quantità di moto areale al momento delle forze esterne stesse; [esse] ci danno per l'appunto le sei equazioni scalari che ci occorrono. Importa osservare come nelle due equazioni vettoriali suddette, sia scomparso ogni elemento inerente alle forze interne del sistema, e ciò perché la quantità di moto di un sistema ed il momento di essa sono indipendenti dall'azione delle forze interne stesse. Le (9.1) e (9.2) sono, dunque, le equazioni fondamentali del moto di un corpo rigido.

9.1 Statica dei corpi rigidi

Si presenta il problema di trovare le relazioni che devono passare tra le forze agenti su di un corpo rigido perché esso sia in equilibrio.

Risulta evidente, per la definizione stessa di equilibrio, che questo si verifica quando è nulla la velocità del corpo, e quindi nulli e la sua quantità di moto q , e il momento di essa Q . Ponendo, dunque, nelle (9.1) e (9.2), $q = 0$ e $Q = 0$, avremo:

$$R = 0 \quad (9.3)$$

ed

$$M = 0 \quad (9.4)$$

(non essendoci tema di ambiguità tralascieremo d'ora innanzi l'indice e). La (9.3) e la (9.4) precedenti ci danno, dunque, le condizioni per l'equilibrio.

Si potrebbe supporre che le due equazioni vettoriali, or ora stabilite dessero luogo ad un numero infinito di relazioni scalari a seconda del punto rispetto a cui si calcola il momento. Vogliamo dimostrare che questo non è, e, precisamente che se sono verificate la (9.3) e la (9.4), è nullo il momento $M_{O'}$, rispetto ad un qualsiasi punto O' . Infatti si ha:

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_1^n F_i = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

e:

$$M_O = \sum_1^n [(P_i - O) \wedge F_i] = 0.$$

Ora, il momento rispetto ad O' è:

$$M_{O'} = \sum_1^n [(P_i - O') \wedge F_i], \quad (9.5)$$

ed essendo:

$$(P_i - O') = (P_i - O) + (O - O'),$$

la (9.5) si può scrivere:

$$M_{O'} = \sum_1^n [(P_i - O) \wedge F_i] + (O - O') \wedge \sum_1^n F_i,$$

cioè in definitiva

$$M_{O'} = M_O + (O - O') \wedge R. \quad (9.6)$$

Si deduce dalla (9.6) che se valgono la (9.3) e la (9.4), si ha anche

$$M_{O'} = 0$$

Considerato, in tal guisa, il problema dal lato vettoriale, vediamo, ora, di studiarlo dal punto di vista analitico.

Data, a tal uopo, una terna d'assi cartesiani x, y, z , consideriamo un punto generico del sistema, P_i , di coordinate x_i, y_i, z_i ; a questo punto sia applicata una forza, F_i , di componenti X_i, Y_i, Z_i . Per l'equilibrio sappiamo che

deve annullarsi il risultante delle forze, ed il loro momento. La prima condizione si esprime scalarmente annullando le componenti, secondo tre assi, del risultante:

$$\sum_1^n X_i = 0, \quad \sum_1^n Y_i = 0, \quad \sum_1^n Z_i = 0.$$

Le condizioni dell'annullarsi del momento delle forze, si scriverà invece:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ \sum_1^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \\ \sum_1^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{array} \right.$$

Considerando, ora, un corpo rigido cui siano applicati due sistemi di forza (che distingueremo con uno e due apici rispettivamente), il totale delle forze applicate ad un generico punto P_i è dato dalla somma: $F'_i + F''_i$, e così anche, anche il momento è dato dalla somma dei momenti. Per l'equilibrio dovrà essere:

$$R = R' + R'' = 0, \quad \text{e} \quad M = M' + M''.$$

Poiché nelle espressioni precedenti, dei due sistemi di forze non compare che il risultante ed il suo momento, le condizioni di equilibrio non verranno alterate se ad uno dei due sistemi se ne sostituisca un altro con risultante e momento eguali. Due sistemi di forze che abbiano lo stesso risultante e lo stesso momento, si dicono equivalenti agli effetti dell'equilibrio.

A questo proposito, vediamo le operazioni elementari, che ci consentono di mutare un sistema di forze in uno equivalente.

Proviamo a considerare il caso di un sistema formato da una sola forza F . Vediamo come si ottiene un sistema equivalente spostando il punto, cui F è applicata, lungo la linea di applicazione.

Infatti, trattandosi di due sistemi formati da una sola forza di eguale grandezza ed ugualmente orientate, è evidente che avranno eguale risultante. Quanto al momento, che calcoleremo rispetto ad un arbitrario punto O , per F applicata in P , avremo:

$$(P - O) \wedge F = M_{P,O},$$

e per F applicata in Q :

$$(Q - O) \wedge F = M_{Q,O}.$$

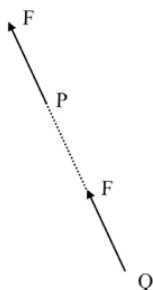


Figura 9.1: Lo spostamento di una forza lungo la sua linea di applicazione dà una forza equivalente.

Questi due momenti sono egualmente orientati essendo ambedue normali al piano di O e di F ed hanno eguale grandezza, poiché sono eguali le aree dei parallelogrammi costruiti su \overline{OP} ed F e su \overline{OQ} ed F , rispettivamente.

Un'altra operazione ancora più evidente, per trasformare un sistema di forze in un altro equivalente, è quello di applicare ad uno stesso punto due forze eguali e contrarie. Sarà evidentemente per esse:

$$R = 0, \quad \text{ed} \quad M = 0$$

Una terza operazione è quella mediante la quale ad una forza si sostituiscono due o più sue componenti.

9.2 Coppie di forze

Dicesi coppia un sistema costituito da due forze eguali e contrarie. Evidentemente, il risultante di una coppia è nullo, mentre il momento è indipendente dal punto rispetto al quale lo si calcoli. Infatti, sappiamo (vedi (9.6)) che è:

$$M_{O'} = M_O + (O - O') \wedge R,$$

ma il secondo addendo del secondo membro è nullo essendo $R = 0$. Risulta dunque:

$$M_{O'} = M_O.$$

Questa proprietà è generale per tutti i sistemi di forze a risultante nulla. Il momento di una coppia ha grandezza eguale all'area del parallelogramma

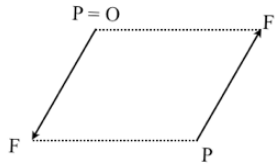


Figura 9.2: Il parallelogramma di area eguale al momento della coppia di forze.

costruito coi due vettori della coppia e con le distanze dall'origine dell'uno dall'estremo dell'altro. Infatti, possiamo scegliere, come punto rispetto a cui si calcola il momento, il punto d'applicazione di una delle forze, allora il momento di questa sarà nullo essendo nullo il braccio; resterà, quindi, da calcolarsi solo il momento dell'altra forza. Tale momento avrà grandezza eguale all'area del parallelogramma costruito sulla forza e dalla distanza di O da un punto qualsiasi della sua linea di applicazione. È evidente che il momento di una coppia ha direzione normale al suo piano.

Un qualsiasi sistema di forze è equivalente ad un altro formato da una forza più una coppia.

Supponiamo, p. es., di avere un sistema formato da tre forze, F_1, F_2, F_3 , applicate in P_1, P_2, P_3 , rispettivamente. In un punto qualsiasi, O , applichiamo tre forze, F'_1, F'_2, F'_3 , eguali a F_1, F_2, F_3 , rispettivamente, e tre forze eguali e contrarie alle precedenti¹. È chiaro che si ha, così, un sistema di forze equivalenti al dato, poichè non si è fatto altro che aggiungere e togliere forze eguali. Osserviamo, ora, che alle F'_1, F'_2 ed F'_3 , possiamo sostituire il loro risultante R . Avremo, così, un sistema equivalente al dato, costituito da una forza R , e da tre coppie: F_1'' ed F_1 , F_2'' ed F_2 , F_3'' ed F_3 ; coppie, queste che avranno, ciascuna, un proprio momento. Agli effetti dell'equilibrio, potremo sostituire, a queste tre, una unica coppia che abbia momento eguale alla somma dei loro momenti.

Avremo, così, sostituito, al sistema primitivo, un nuovo sistema equivalente, formato di una forza R e di una coppia.

¹Queste ultime saranno indicate con F_1'', F_2'', F_3'' . [NdR]

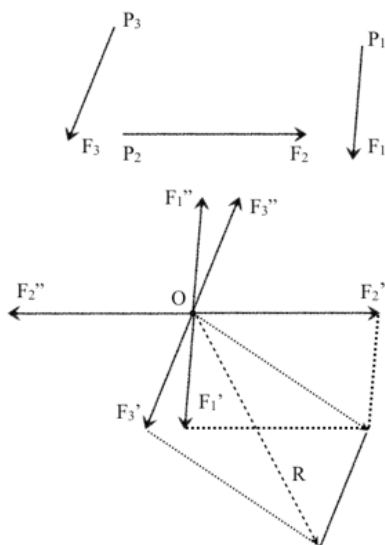


Figura 9.3: Il sistema di forze equivalente a F_1, F_2, F_3 .

9.3 Momento del peso

Detti P_1, P_2, \dots, P_n , i punti di un sistema rigido, soggetto alla forza peso, a ciascuno di questi n punti sarà applicata una forza data dal prodotto: $m_i g$, ove m_i è la massa di un punto generico. Tutte queste n forze risulteranno parallele ed orientate verso il basso. Ci proponiamo, ora, di dimostrare come sia possibile sostituire a questo sistema di forze, un altro sistema formato da un'unica forza orientata come le $m_i g$, applicata nel baricentro, e di grandezza: $\sum_1^n m_i g$.

A tal uopo, basterà provare l'eguaglianza del risultante e del momento nei due sistemi di forze in parola. Per il risultante, l'eguaglianza è evidente, quanto, poi, al momento, osserviamo che scegliendo gli assi coordinati con l'asse z verticale ed orientato verso l'alto, le componenti della forza $m_i g$, applicata ad un punto generico, $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, ci sono date da:

$$(0, 0, -m_i g)$$

e quelle del momento della forza suddetta, calcolata rispetto all'origine O degli assi:

$$\mathfrak{M}_{i,x} = -m_i y_i g; \quad \mathfrak{M}_{i,y} = m_i x_i g; \quad \mathfrak{M}_{i,z} = 0$$

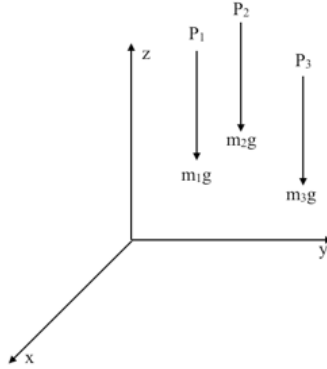


Figura 9.4: Il sistema di forze peso discusso nel testo.

Eseguendo la sommatorie, estese a tutti i punti del sistema, delle prime due espressioni precedenti, otteniamo le componenti, secondo gli assi x e y , rispettivamente, del momento totale del sistema

$$\mathfrak{M}_x = \sum_1^n -m_i y_i g; \quad \mathfrak{M}_y = \sum_1^n m_i x_i g, \quad (9.7)$$

Passando, ora, a calcolare, rispetto as O , il momento dell'unica forza, $F = \sum_1^n m_i g$, sostituita alle n date, applicata al centro di gravità, G , osserviamo che le coordinate di G sono:

$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i};$$

le componenti di F :

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -\sum_1^n m_i g;$$

e quindi le componenti del momento \mathfrak{M} sono:

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} \sum_1^n m_i g, \quad \mathfrak{M}_y = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} \sum_1^n m_i g,$$

e, semplificando:

$$\mathfrak{M}_x = -\sum_1^n m_i y_i g, \quad \mathfrak{M}_y = \sum_1^n m_i x_i g,$$

espressioni, queste, identiche alle (9.7). Il nostro asserto è così dimostrato.

Generalizzando, dato un sistema rigido cui siano applicate n forze parallele sulla cui particolare natura non facciamo alcuna ipotesi; detta F_i la forza applicata al punto generico $P \equiv (x_i, y_i, z_i)$; potremo, analogamente a quanto si è fatto nel caso della forza peso, sostituire, al sistema delle forze considerate, un'unica forza, egualmente diretta, la cui grandezza è data dalla somma algebrica delle grandezze, applicata in un punto P_O del corpo, tale che le sue coordinate, x_O, y_O, z_O , soddisfino alle relazioni:

$$x_O = \frac{\sum_1^n x_i F_i}{\sum_1^n F_i}, \quad y_O = \frac{\sum_1^n y_i F_i}{\sum_1^n F_i}, \quad z_O = \frac{\sum_1^n z_i F_i}{\sum_1^n F_i},$$

9.4 Equilibrio di un corpo rigido vincolato

Noi considereremo tre tipi di vincoli di un sistema rigido.

- I) Debba rimanere fisso uno, ed un solo punto del corpo.
- II) Debbano restare fissi due punti (e, di conseguenza, la retta che li congiunge).
- III) Il corpo sia appoggiato ad un piano.

In tutti questi casi il sistema si potrà considerare come libero, purché, oltre alle forze direttamente applicate, lo si assoggetti anche all'azione di altre forze, le reazioni vincolari.

Nel primo caso, detto O il punto fisso date le forze F_1, F_2, \dots, F_n , agenti sul corpo, noi sappiamo costruire il risultante R , e, se inoltre indichiamo con \mathcal{R} la reazione del vincolo, che è una forza applicata al punto O , per l'equilibrio, dovendo annullarsi la forza totale agente sul sistema, avremo:

$$R + \mathcal{R} = 0, \quad \text{e quindi} \quad R = -\mathcal{R}; \quad (9.8)$$

e ancora:

$$\mathfrak{M} = 0, \quad (9.9)$$

dove \mathfrak{M} è il momento totale delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto ad O .

Osserviamo come nella (9.9) non compaiano affatto elementi inerenti alla \mathcal{R} (infatti, essendo il momento calcolato rispetto ad O , il momento di \mathcal{R} rispetto a questo punto è nullo), quest'equazione ci servirà, dunque, a determinare le condizioni di equilibrio. Dalla (9.8), poi, mediante la conoscenza delle n forze direttamente applicate, e quindi di R , si può ricavare il valore di \mathcal{R} .

Nel secondo caso, detti O_1 ed O_2 i punti fissi, ed \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , rispettivamente, in modo analogo al primo caso, avremo la condizione di equilibrio:

$$R + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = 0. \quad (9.10)$$

Dovrà, inoltre, per l'equilibrio, annullarsi il momento totale delle forze agenti sul sistema, momento che calcoleremo rispetto uno qualsiasi dei due punti fissi, ad esempio, rispetto ad O_1 . Indicando con \mathfrak{M} ed \mathcal{M}_2 , rispettivamente, i momenti del risultante² R e della reazione \mathcal{R}_2 , avremo:

$$\mathfrak{M} + \mathcal{M}_2 = 0, \quad (9.11)$$

essendo, al solito, il momento di \mathcal{R}_1 , rispetto ad O_1 (suo punto di applicazione) nullo.

L'equazione vettoriale (9.11), ne rappresenta tre scalari, per determinare le quali scegliamo una opportuna terna d'assi avente l'origine in O_1 , e l'asse a coincidente con la retta $\overline{O_1O_2}$. Per le componenti della (9.11) si avrà allora:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_x + \mathcal{M}_{2,x} = 0 \\ \mathfrak{M}_y + \mathcal{M}_{2,y} = 0 \\ \mathfrak{M}_z + \mathcal{M}_{2,z} = 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

e, poiché $\mathcal{M}_{2,z} = 0$ (perché il momento di \mathcal{R}_3 rispetto ad O_1 è normale alla $\overline{O_1O_2}$, ossia all'asse z , e quindi la sua proiezione su tale asse è nulla), la terza delle equazioni ci dà:

$$\mathfrak{M}_z = 0.$$

Quest'equazione ci dà la condizione di equilibrio: "Il momento delle forze applicate, rispetto alla retta fissa, deve essere nullo".

Le prime due delle (9.12) assieme alla (9.10) (in totale 5 equazioni scalari) servono per la determinazione della reazione \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 ; siccome, però,

²N.B. il momento M è quello delle forze applicate. [Ndr]

le incognite sono sei (le sei componenti di \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , e le equazioni sono cinque, il problema della determinazione completa, di questa reazione, risulta staticamente indeterminato.

Nel terzo caso, infine, per studiare l'equilibrio di un corpo appoggiato su di un piano, facciamo l'ipotesi essenziale che non vi siano attriti. Dette: F_1, F_2, \dots, F_n , le forze applicate al corpo, ed R il loro risultante, e dette ancora: $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_m$, le reazioni esercitate dal vincolo sui punti di contatto del corpo col piano, per l'equilibrio dovremo avere:

$$R + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_m = 0$$

ed

$$\mathfrak{M} + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_m = 0,$$

dove \mathfrak{M} è al solito il momento³ di R , ed $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_m$ quelli delle reazioni vincolari di indice omonimo. Le relazioni vettoriali precedenti ne rappresentano sei scalari; dovremo scegliere gli assi in modo da ottenere delle relazioni scalari in cui non compaiano elementi inerenti alle reazioni dei vincoli. A tal uopo disponiamo la terna cartesiana in guisa che gli assi x ed y giacciono nel piano che costituisce il vincolo. Avremo, allora per le componenti del risultante:

$$\begin{aligned} R_x + \mathcal{R}_{1,x} + \mathcal{R}_{2,x} + \dots + \mathcal{R}_{m,x} &= 0 \\ R_y + \mathcal{R}_{1,y} + \mathcal{R}_{2,y} + \dots + \mathcal{R}_{m,y} &= 0 \\ R_z + \mathcal{R}_{1,z} + \mathcal{R}_{2,z} + \dots + \mathcal{R}_{m,z} &= 0; \end{aligned} \quad (9.13)$$

ma, essendo le reazioni vincolari normali al piano del vincolo sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,x} + \mathcal{R}_{2,x} + \dots + \mathcal{R}_{m,x} &= 0 \\ \mathcal{R}_{1,y} + \mathcal{R}_{2,y} + \dots + \mathcal{R}_{m,y} &= 0; \end{aligned}$$

dovrà, quindi, essere:

$$R_x = 0, \quad \text{ed} \quad R_y = 0.$$

Essendo poi positive le \mathcal{R} , e, quindi, positiva la loro somma:

$$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{1,z} + \mathcal{R}_{2,z} + \dots + \mathcal{R}_{n,z},$$

dalla terza delle (9.13) si deduce:

$$R = R_z < 0$$

³N.B. vedi nota precedente. [Ndr]

Queste condizioni sono necessarie, ma non ancora sufficienti per l'equilibrio.

Consideriamo, perciò, il poligono convesso ottenuto unendo tra loro i più esterni dei punti di contatto del corpo col piano, in modo che tutti i punti di contatto, indistintamente, siano in esso contenuti (poligono d'appoggio) e calcoliamo il momento totale delle forze applicate al sistema, successivamente, rispetto a ciascun lato di detto poligono. Se tutti questi momenti hanno direzione tale da far ruotare il corpo attorno al lato considerato, dall'esterno verso l'interno del poligono d'appoggio, si ha l'equilibrio; in caso contrario il corpo non si trova in posizione d'equilibrio. Nel caso della forza peso, l'equilibrio si verifica quando la proiezione del centro di gravità, nel piano orizzontale cade entro il poligono d'appoggio.

9.5 L'equilibrio in alcune macchine semplici

Bilancia

La bilancia si può considerare come un particolare tipo di leva di primo genere, avente eguali i bracci della potenza e della resistenza. Tale leva, che costituisce il giogo è girevole attorno ad un asse orizzontale fisso, detto coltello. Agli estremi del giogo sono sospesi due piatti ad accogliere i pesi che dovranno essere confrontati.

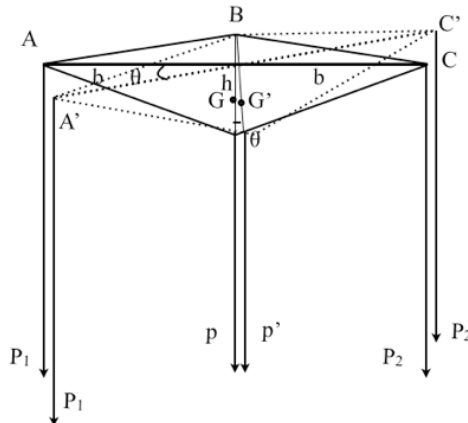


Figura 9.5: La bilancia vista in sezione.

Questo sistema sarà sollecitato dalla forza peso, p , forza che potremo supporre applicata al centro di gravità G .

Perché la bilancia stia in equilibrio, basterà che sia nullo il momento delle forze agenti sul sistema, rispetto all'asse fisso. Evidentemente, tale momento è nullo quando G giace nel piano verticale passante per l'asse, perché in tal caso è nullo il braccio del peso. L'equilibrio è stabile quando il centro di gravità si trova al di sotto dell'asse, instabile in caso contrario. Supponiamo, per semplicità di operare una sezione della bilancia, mediante un piano verticale passante per i punti di sospensione dei piatti. Detti P_1 e P_2 i due pesi da confrontare, supponiamo che P_1 , p. es., diventi maggiore di P_2 , allora il giogo, traboccando dalla parte di P_1 , ruoterà di un angolo θ , e del medesimo angolo ruoterà la congiungente l'asse medesimo col centro di gravità G . Il sistema raggiungerà una nuova posizione d'equilibrio, quando il momento di P_1 sarà eguale alla somma dei momenti di P_2 e di p .

Sia b la distanza comune di P_1 e P_2 dall'asse, di sospensione, e sia h la distanza di G dall'asse stesso; si avrà per i momenti di p, P_1 e P_2 , rispettivamente:

$$\begin{cases} \mu &= p h \sin \theta \\ \mu_1 &= -P_1 b \cos \theta \\ \mu_2 &= P_2 b \cos \theta; \end{cases}$$

e, siccome per l'equilibrio deve essere:

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 = 0,$$

ossia:

$$\mu + \mu_2 = -\mu_1,$$

avremo:

$$p h \sin \theta + P_2 b \cos \theta = P_1 b \cos \theta,$$

e dividendo ambo i membri per $\cos \theta$:

$$p h \tan \theta + P_2 b = P_1 b,$$

da cui otterremo, infine, per $\tan \theta$:

$$\tan \theta = \frac{b(P_1 - P_2)}{p h}.$$

La tangente dell'angolo di cui ruota la bilancia, quando su uno dei piatti si carichi un peso, ci dà la sensibilità della bilancia stessa. Si vede subito come restando costante la differenza $P_1 - P_2$ tra i pesi applicati agli estremi del

giogo, la $\tan\theta$ aumenti col crescere del valore di b (ossia con crescere della lunghezza del giogo) e diminuisca col crescere del peso p e della distanza h del centro di gravità, G , dall'asse di sospensione.

Cuneo

Il cuneo è costituito da un prisma triangolare generalmente isoscele; nelle considerazioni che seguono faremo l'ipotesi che la potenza P si eserciti normalmente alla base del cuneo, e che il corpo in cui esso penetra sia omogeneo. Vediamo di stabilire le condizioni dell'equilibrio.

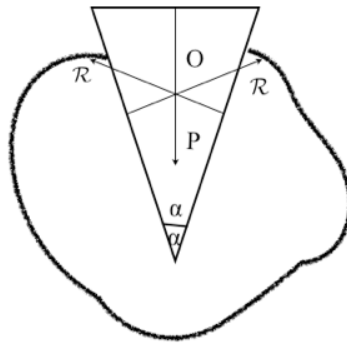


Figura 9.6: Il cuneo.

A tal uopo, osservando che la sezione del cuneo con un piano normale alle facce laterali è un triangolo isoscele, scelto un punto P , qualsiasi dell'altezza h di quest'ultimo, si vede immediatamente come in O si incontrino due delle reazioni che il corpo esercita sul cuneo normalmente alle facce laterali ma d'altra parte la stessa P si esercita anch'essa nella direzione di h , quindi, se scegliamo come punto rispetto al quale calcolano i momenti, il punto O , i momenti della potenza e delle reazioni si annullano, perché le direzioni di queste tre forze passano tutte per il punto suddetto.

Quanto poi alla condizione dell'annullarsi del risultante delle forze, osserviamo che, indicando con \mathcal{R} il valore comune alle due reazioni (eguali per la supposta omogeneità del corpo) che il corpo esercita perpendicolarmente alle facce laterali del cuneo, siccome la potenza si esercita nella direzione di h , per l'equilibrio dovrà annullarsi la somma di essa e delle due componenti delle reazioni secondo la direzione suddetta; quindi, detto α

l'angolo opposto alla base del cuneo, avremo:

$$P - 2\mathcal{R} \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

che è la condizione di equilibrio cercata.

Vite

Per stabilire le condizioni d'equilibrio della vite, supponiamo questa, per semplicità, cilindrica e mobile entro la sua madre-vite fissa. Se immaginiamo di sviluppare una spira di quest'ultima su di un piano, vediamo come questa spira si disponga in un piano inclinato la cui lunghezza è quella della spira stessa, la cui altezza è data dal passo della vite, e la cui base è eguale alla circonferenza della vite medesima.

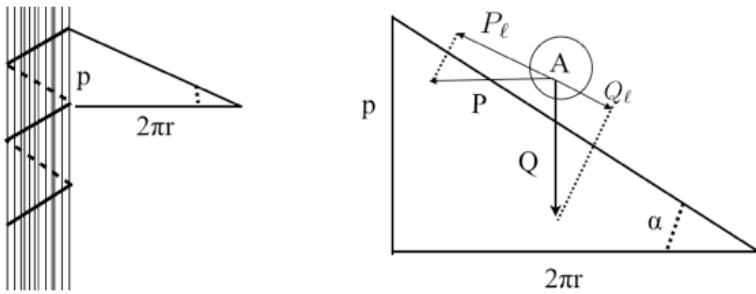


Figura 9.7: La vite e il suo sviluppo in un piano.

Il nostro problema si riduce, quindi, alla determinazione delle condizioni d'equilibrio per un punto, A , della vite che poggia su detto piano inclinato. Evidentemente, l'equilibrio si verificherà quando le componenti della potenza P e della resistenza Q , secondo la lunghezza del piano inclinato, avranno eguale grandezza e segno contrario. A tal uopo, osservando che la potenza P si esercita tangenzialmente alla testa della vite, mentre la resistenza Q si esercita normalmente alla testa medesima, nello sviluppo della spira su di un piano, la potenza P risulterà parallela alla base e la resistenza Q all'altezza del piano inclinato. Detto α l'angolo d'inclinazione di quest'ultimo, per la componente di P secondo la lunghezza ℓ , avremo:

$$P_\ell = P \cos \alpha,$$

e, per la componente di Q secondo la stessa direzione:

$$Q_\ell = Q \sin \alpha.$$

Per l'equilibrio dovrà essere:

$$P \cos \alpha = Q \sin \alpha,$$

da cui, infine:

$$\frac{P}{Q} = \tan \alpha.$$

Notando ora che $\tan \alpha$ è uguale al rapporto tra l'altezza e la base del piano inclinato, siccome queste ci sono date rispettivamente, da p (passo della vite) e da $2\pi r$ (circonferenza della medesima), la relazione precedente diviene

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{2\pi r},$$

che è la condizione di equilibrio cercata.

Da quest'ultima relazione si deduce come, pur disponendo di una potenza limitata, rendendo r sufficientemente grande, si possa far equilibrio ad una resistenza molto maggiore.

9.6 Momento d'inerzia

Le equazioni fondamentali del moto di un corpo rigido:

$$\frac{dq}{dt} = R, \tag{9.14}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{9.15}$$

rappresentano sei relazioni scalari, le quali, poiché un sistema rigido ha sei gradi di libertà, possono servire a determinare il movimento.

Per il moto di un corpo rigido vincolato ad avere due punti fissi (ossia a ruotare attorno ad un asse), dette F_1, F_2, \dots, F_n , le forze agenti su di esso, ed R il loro risultante, dette \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 le reazioni esercitate dai due punti fissi O_1 ed O_2 , la (9.14) e la (9.15) precedenti divengono:

$$\frac{dq}{dt} = R + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2, \tag{9.16}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M} + \mathcal{M}_2, \tag{9.17}$$

ove, nella (9.17), \mathcal{M}_2 ed \mathfrak{M} rappresentano, rispettivamente il momento di \mathcal{R}_2 ed il momento totale delle forze direttamente applicate, calcolati entrambi rispetto ad O_1 . Le equazioni (9.16) e (9.17) non si prestano a determinare il moto del sistema perché compaiono in esse le reazioni \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 . Nel caso nostro, poiché il sistema ha un solo grado di libertà è sufficiente una sola equazione scalare, in cui non compaiano elementi inerenti alla reazione dei vincoli, a determinare il moto. Scelta una terna cartesiana avente l'origine in O_1 e l'asse z coincidente con la retta $\overline{O_1O_2}$, per la componente della (9.17) secondo detta terna, avremo:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \mathfrak{M}_x + \mathcal{M}_{2,x}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \mathfrak{M}_y + \mathcal{M}_{2,y}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \mathfrak{M}_z + \mathcal{M}_{2,z}.$$

Dall'ultima delle precedenti, essendo $\mathcal{M}_{2,z} = 0$ (perché $\mathcal{M}_{2,z}$ è normale in O_1 alla $\overline{O_1O_2}$, e quindi all'asse z , si ricava:

$$\frac{dQ_z}{dt} = \mathfrak{M}_z.$$

equazione, questa, in cui non compaiono le reazioni vincolari, e che, perciò, può servirci a determinare il movimento del corpo.

Per determinare, istante per istante, la posizione del sistema che ruota attorno alla $\overline{O_1O_2}$, basterà conoscere, in funzione del tempo, l'angolo θ (azimut) che un piano fisso, passante per l'asse, forma con un piano, passante anch'esso per l'asse, ma solidale, durante il moto, col sistema. La velocità angolare ω ci è data da: $\omega = d\theta/dt = \dot{\theta}$, e quindi, per la velocità, V_i , lungo la traiettoria, di un punto generico P_i (di massa m_i), avremo:

$$|V_i| = \omega r_i = r_i \dot{\theta},$$

ove r_i è la distanza del punto dall'asse di rotazione. Per la quantità di moto q_i , si avrà:

$$|q_i| = m_i r_i \dot{\theta},$$

ed, infine, per il momento di questa:

$$m_i r_i^2 \dot{\theta},$$

(poiché V_i giace in un piano normale all'asse, ed r_i è il suo braccio). Se n sono i punti del sistema (supposto discreto), per la quantità di moto areale di esso, calcolata rispetto all'asse avremo l'espressione:

$$Q_z = \sum_1^n m_i r_i^2 \dot{\theta},$$

che si può identicamente scrivere:

$$Q_z = \dot{\theta} \sum_1^n m_i r_i^2,$$

potendosi portare fuori del sommatorio il fattore $\dot{\theta}$ che non varia con l'indice i . Invece il secondo fattore, $\sum_1^n m_i r_i^2$, dipende esclusivamente dalla posizione che l'asse di rotazione occupa nel sistema e dalla configurazione geometrica del corpo e non varia quindi con il tempo. Esso definiscesi: momento inerziale I , del corpo, si pone, cioè:

$$I = \sum_1^n m_i r_i^2$$

Avremo allora: $Q_z = I\dot{\theta}$, da cui:

$$\mathfrak{M}_z = \frac{dQ_z}{dt} = I \frac{d\dot{\theta}}{dt} = I\ddot{\theta},$$

che è l'equazione del moto di un sistema rigido attorno ad un asse, e che presenta analogia formale con l'equazione fondamentale della dinamica:

$$F = mA.$$

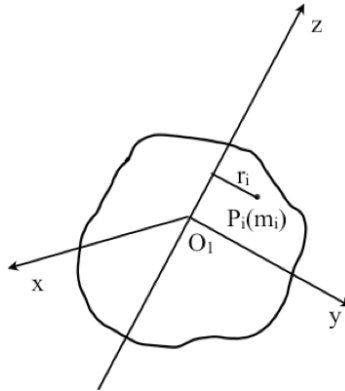


Figura 9.8: Illustrazione del momento d'inerzia.

In particolare se è: $\mathfrak{M}_z = 0$, cioè se il corpo non è soggetto ad alcuna forza, oppure se le direzioni delle forze passano tutte per l'asse, risulta:

$$\mathfrak{M}_z = I\ddot{\theta} = 0,$$

da cui: $\ddot{\theta} = 0$, e quindi: $\dot{\theta} = C_1$ ed integrando ancora:

$$\theta = C_1 t + C_2$$

(funzione lineare del tempo che caratterizza i moti uniformi). In questo caso, dunque, il moto sarebbe una rotazione uniforme. Se il sistema è continuo ed esteso in volume ed è ρ_τ la sua densità, considerata attorno ad un punto generico, di distanza r dall'asse, l'elemento di volume $d\tau$, per la massa dm , racchiusa in esso, avremo l'espressione

$$dm = \rho_\tau d\tau,$$

e per il momento d'inerzia:

$$I = \int r^2 d\tau = \int r^2 \rho_\tau d\tau \quad (\text{integrale triplo}).$$

se il sistema è esteso in superficie, ponendo in luogo della densità di volume, ρ_τ , la densità superficiale ρ_σ , ed in luogo di $d\tau$, $d\sigma$, si ottiene un integrale doppio.

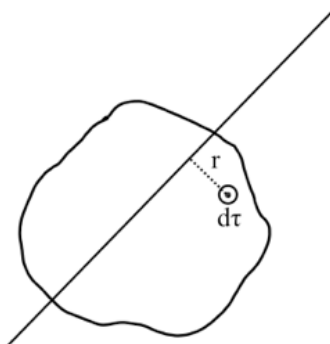


Figura 9.9: Illustrazione del momento d'inerzia per un sistema continuo.

Se, infine, il sistema è esteso linearmente, con densità lineare ρ_ℓ , si ha un integrale semplice.

Esempi

1) - Momento d'inerzia di una sbarra omogenea:

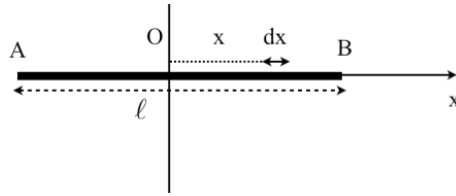


Figura 9.10: Illustrazione del calcolo del momento d'inerzia di una sbarra rispetto al baricentro.

1° calcolato rispetto ad un asse normale alla sbarra e passante per il punto di mezzo (baricentro) di essa;

2° calcolato rispetto ad un asse normale alla sbarra in uno degli estremi.

1°: data ℓ la lunghezza della sbarra e ρ la densità, scegliamo l'asse delle x coincidente con la direzione della sbarra medesima, ponendo l'origine, O , nel punto mediano di questa. Le formule precedentemente stabilite ci danno, allora, per I , il valore:

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho x^2 dx = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx,$$

ed eseguendo la quadratura:

$$I = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \rho \left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24} \right] = \rho \frac{\ell^3}{12}.$$

2°: se l'asse passa, ad esempio, per l'estremo A della sbarra, collocando ivi l'origine delle ascisse avremo:

$$I = \int_0^{\ell} \rho x^2 dx = \rho \frac{\ell^3}{3},$$

oppure, ponendo in evidenza $\rho \ell = M$ (massa della sbarra):

$$I = M \frac{\ell^2}{3}.$$

II) - Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo rispetto al suo asse:
 Detta h l'altezza ed R il raggio del cilindro, scegliamo come asse z l'asse

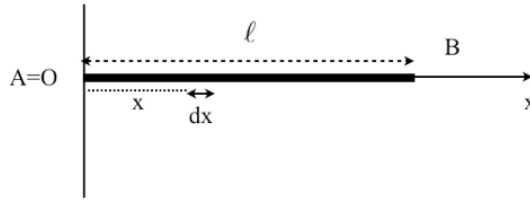


Figura 9.11: Illustrazione del calcolo del momento d'inerzia di una sbarra rispetto ad un estremo.

del cilindro medesimo. Dobbiamo scegliere un elemento di volume tale da potersi, per esso, considerare costante la distanza dall'asse, quindi detti r e $r + dr$ i raggi di due cilindri coassiali contenuti nel dato, assumeremo come elemento di volume quello infinitesimo compreso fra i due cilindri suddetti; onde avremo:

$$d\tau = 2\pi r h dr,$$

e, per l'elemento di massa:

$$dm = 2\pi\rho h r dr.$$

Il contributo dato al momento d'inerzia dell'elemento di massa dm , è, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$2\pi\rho h r dr \cdot r^2.$$

Quindi, per il momento d'inerzia, I , si avrà:

$$I = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} h\rho R^4,$$

ovvero, ponendo in evidenza la massa totale, $M = \pi\rho R^2 h$, del cilindro:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

III) - Momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un suo diametro: Sia R il raggio della sfera; scegliamo una terna cartesiana ortogonale, x, y, z , coll'origine nel centro. Osserviamo, anzitutto, che il momento d'inerzia

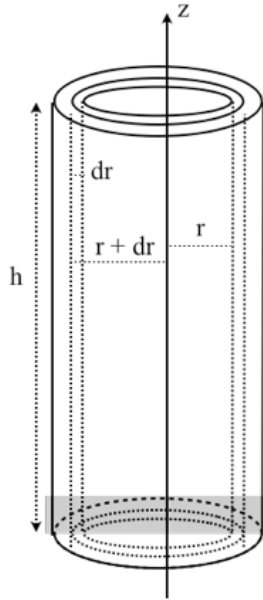


Figura 9.12: Illustrazione del calcolo del momento d'inerzia di un cilindro rispetto al suo asse.

di una sfera è lo stesso rispetto a qualsiasi suo diametro. Per calcolarlo, ad esempio, rispetto all'asse x , notiamo che $y^2 + z^2$ è il quadrato della distanza r_x di un punto generico della sfera dall'asse x , quindi avremo:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm, \text{ ed analogamente } I_y = \int (x^2 + z^2) dm, \text{ e } I_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Queste tre espressioni, come si è visto, sono tra loro equivalenti, e perciò, indicando con I il valore comune e sommando membro a membro, otteniamo:

$$3I = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm. \quad (9.18)$$

Per calcolare l'elemento di massa dm , consideriamo due sfere concentriche, interne alla data, i cui raggi siano r ed $r + dr$; scegliendo come elemento di massa quella infinitesima tra esse; detta ρ la densità costante della sfera, avremo, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$dm = 4\pi\rho dr \cdot r^2,$$

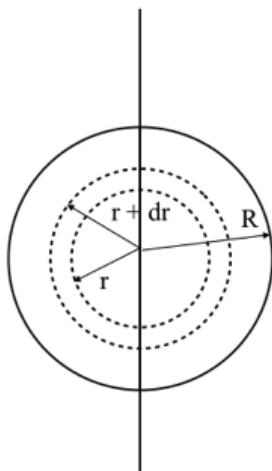


Figura 9.13: Illustrazione del calcolo del momento d'inerzia di una sfera rispetto ad un suo diametro.

valore, questo che sostituito nella (9.18), ci dà:

$$3I = 8\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{5}\pi\rho R^5,$$

da cui, infine:

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5,$$

ovvero, ponendo in evidenza la massa, $M = 4/3\pi\rho R^3$, della sfera:

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

Vediamo come vari il momento d'inerzia di un corpo rigido al variare dell'asse, e limitiamoci, per ora a considerare il caso in cui l'asse si sposti parallelamente a sé stesso. Si abbia, dunque, un sistema discreto, costituito dagli n punti: P_1, P_2, \dots, P_n , di masse: m_1, m_2, \dots, m_n , rispettivamente, e sia a l'asse dato. Fra gli infiniti assi paralleli ad a , ve ne sarà uno, ed uno solo, passante per il centro di gravità, G , del sistema. Chiamando: I_a , il momento

di inerzia rispetto ad a , con: I_g , quello rispetto all'asse g , ci proponiamo di dimostrare che è:

$$I_a = I_g + M\Delta^2$$

ove M è la massa totale del sistema e Δ è la distanza fra i due assi a e g . Infatti, conducendo per G un piano normale ai due assi, nella sezione che ne risulta, il segmento \overline{GA} (essendo A il punto d'incontro dell'asse a e del piano) risulta eguale a Δ , e proiettando sul piano a le distanze r_i ed r'_i di un punto P_i , del sistema dagli assi g e a , rispettivamente, queste si proiettano in vera grandezza.

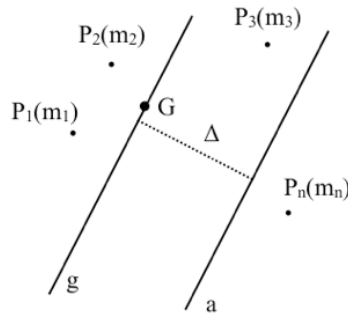


Figura 9.14: I due assi a e g .

Dato ciò, potremo svolgere le nostre considerazioni rispetto alla sezione suddetta. Per la definizione stessa di momento d'inerzia, abbiamo:

$$I_g = \sum_1^n m_i r_i^2, \quad \text{ed} \quad I_a = \sum_1^n m_i r'_i{}^2.$$

Dal triangolo GAP_i si ricava, applicando il teorema di Carnot:

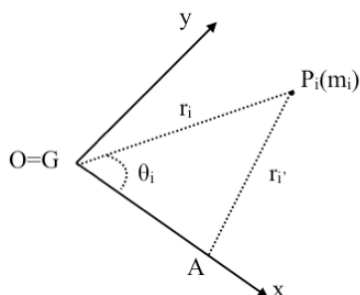
$$r'_i{}^2 = \Delta^2 + r_i^2 - 2\Delta r_i \cos \theta_i,$$

ove θ_i è l'angolo compreso tra i lati \overline{GA} e $\overline{GP_i}$. Sostituendo, nell'espressione di I_a , per $r'_i{}^2$, questo valore, otteniamo:

$$I_a = \sum_1^n m_i \Delta^2 + \sum_1^n m_i r_i^2 - 2 \sum_1^n m_i \Delta r_i \cos \theta_i,$$

ovvero:

$$I_a = M\Delta^2 + I_g - 2\Delta \sum_1^n m_i r_i \cos \theta_i.$$

Figura 9.15: Le distanze di P_i da a e g .

Il nostro asserto sarà dimostrato se proveremo che è:

$$2\Delta \sum_1^n m_i r_i \cos \theta_i = 0. \quad (9.19)$$

A tal uopo scegliamo una terna d'assi con l'origine in G , prendendo \overline{GA} come asse delle x ; poiché x_i , ascissa di P_i , ci è data da:

$$x_i = r_i \cos \theta_i,$$

e, quindi, il primo membro della (9.19) diventa:

$$2\Delta \sum_1^n m_i x_i,$$

espressione, questa, che, a parte il fattore costante 2Δ , rappresenta il numeratore della frazione che dà il valore della coordinata x_G del centro di gravità G . Ma, per la scelta fatta degli assi, tutte le coordinate di G sono nulle, e quindi è:

$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} = 0$$

da cui: $\sum_1^n m_i x_i = 0$, e, infine:

$$2\Delta \sum_1^n m_i x_i = 0$$

come, appunto, si voleva dimostrare.

A titolo d'esempio, applichiamo la formula testé stabilita al calcolo del momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e densità ρ , rispetto ad un asse normale ad essa in uno degli estremi, conoscendo il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo al dato. Avremo:

$$I_a = I_g + M\Delta^2 = \rho \frac{\ell^3}{12} + M \frac{\ell^2}{4} = \rho \frac{\ell^3}{12} + \rho \frac{\ell^3}{4} = \rho \frac{\ell^3}{3}$$

valore, questo, coincidente con quello trovato più addietro per altra via.

Si osserva infine che dalla formula $I_a = I_g + M\Delta^2$, discende che, poiché il prodotto $M\Delta^2$ è una quantità essenzialmente positiva il valore del momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, espresso mediante il valore del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo, cresce al crescere della distanza Δ e diminuisce al diminuire di questa. Quindi detto momento d'inerzia sarà minimo per $\Delta = 0$, cioè calcolato rispetto all'asse baricentrico stesso.

9.7 Pendolo composto

Il pendolo composto è costituito da un corpo rigido sospeso per un asse orizzontale e soggetto soltanto all'azione del suo peso. Detta O la traccia dell'asse, G il baricentro del corpo, la posizione del sistema è individuata quando sia dato l'angolo θ che la verticale fa con \overline{OG} .

La posizione d'equilibrio corrisponderà, evidentemente a $\theta = 0$. La formula:

$$\frac{dQ}{dt} = \mathcal{M},$$

valida per il moto di un sistema rigido attorno ad un asse, assume, nel caso del moto del pendolo composto, la forma:

$$I\ddot{\theta} = -Mgb = -Mg\Delta \sin\theta, \quad (9.20)$$

ove è $\Delta = \overline{OG}$.

La (9.20) precedente, dividendo ambo i membri per I , diviene:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg\Delta}{I} \sin\theta, \quad (9.21)$$

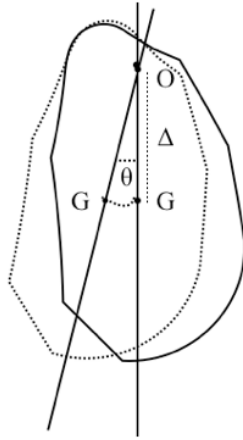


Figura 9.16: Il pendolo composto.

in cui il fattore $Mg\Delta/I$ è costante per un determinato pendolo composto.

Consideriamo ora l'equazione del moto di un pendolo semplice, di lunghezza ℓ e di massa m . Essa è (v. Sezione 6.2):

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta, \quad (9.22)$$

Confrontando la (9.21) con la (9.22), vediamo come esse, matematicamente siano identiche, dato che, tanto $Mg\Delta/I$ quanto g/ℓ , siano costanti; se noi vogliamo che esse rappresentino due moti oscillatori, di egual periodo, dovremo eguagliare le costanti, ponendo dunque:

$$\frac{g}{\ell} = \frac{Mg\Delta}{I},$$

da cui:

$$\ell = \frac{I}{M\Delta}. \quad (9.23)$$

Si conclude, quindi che il pendolo composto oscilla come un pendolo semplice di lunghezza data dalla (9.23) (la lunghezza ridotta del pendolo composto). In particolare, per oscillazioni di piccola ampiezza, θ varierà sinusoidalmente, e le oscillazioni saranno isocrone con periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg\Delta}}.$$

9.8 Teorema d'inversione del pendolo composto

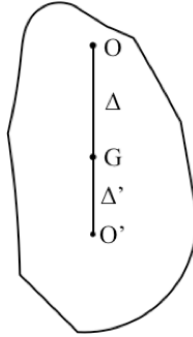


Figura 9.17: Il teorema d'inversione del pendolo composto.

Detto O il centro di sospensione del pendolo composto scelto sulla retta \overline{OG} , un punto O' tale che:

$$\overline{OO'} = \frac{I_O}{M\Delta} \quad (9.24)$$

(ove I_O è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse passante per O), punto che dicesi centro di oscillazione; vogliamo dimostrare che, senza alterare la lunghezza ridotta del pendolo, si possono scambiare tra loro O ed O' . In altre parole, sospendendo il pendolo composto per un asse passante per O' , il nuovo centro di oscillazione coincide con O . Infatti essendo

$$I_O = I_G + M\Delta^2$$

(I_G = momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico). Se sostituiamo, per I_O , questo valore nella (9.24), otteniamo :

$$\overline{OO'} = \frac{I_G}{M\Delta} + \Delta.$$

Ma abbiamo anche che:

$$\overline{OO'} = \Delta + \overline{GO'} = \Delta + \Delta'$$

(Δ' = distanza fra G ed O'), e quindi:

$$\frac{I_G}{M\Delta} + \Delta = \Delta + \Delta'$$

e infine

$$\Delta' = \frac{I_G}{M\Delta},$$

e identicamente,

$$\Delta\Delta' = \frac{I_G}{M},$$

relazione, questa, simmetrica in Δ e Δ' . Si conclude perciò che Δ e Δ' , e quindi O ed O' , sono permutabili tra loro.

Studiamo ora il moto di un corpo rigido con un solo punto fisso, sistema che ha tre gradi di libertà. La posizione del corpo può quindi essere determinata dando tre parametri, ed esempio i nove coseni direttori di una terna solidale con esso, coseni che sono legati tra loro da sei relazioni indipendenti. Le equazioni del moto sono, al solito:

$$\frac{dq}{dt} = R + \mathcal{R}, \quad (9.25)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M} + \mathcal{M}. \quad (9.26)$$

In particolare, calcolando i momenti rispetto al punto fisso O , la (9.26) diviene, più semplicemente:

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M}, \quad (9.27)$$

ed essendo da essa scomparsa la \mathcal{R} , questa relazione servirà a determinare il movimento del sistema. La (9.25), ove occorra, ci servirà alla determinazione di \mathcal{R} . Procediamo anzitutto trasformare opportunamente la (9.27); conviene a tal uopo, premettere uno studio geometrico sui momenti d'inerzia.

Scegliamo una terna cartesiana d'assi con l'origine in O , e proponiamoci di calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto ad una retta r , passante per O , di coseni direttori α, β, γ . Detto P_i un punto generico, ed r_i la sua distanza dalla retta in questione, avremo per il momento d'inerzia, I , l'espressione: $I = \sum_1^n m_i r_i^2$, e, prendendo $\overline{OP_i} = \rho_i$ e l'angolo: $\widehat{\rho_i r} = \theta_i$, per r_i^2 otteniamo:

$$r_i^2 = \rho_i^2 - \overline{OP_i'}^2 = \rho_i^2 - \rho_i^2 \cos^2 \theta_i, \quad (9.28)$$

ove P'_i è la proiezione di P_i sulla retta r . Essendo poi:

$$\cos\theta_i = \frac{1}{\rho_i}(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i),$$

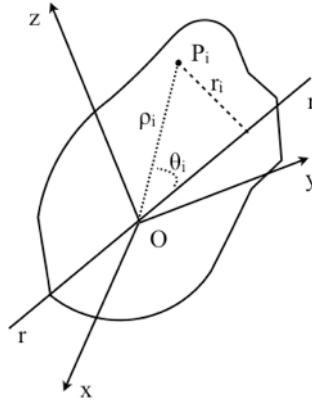


Figura 9.18: Il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto all'asse r .

la (9.28) diviene:

$$r_i^2 = \rho_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2,$$

da cui costruiremo per ρ_i^2 , il suo valore: $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, e sviluppando i quadrati:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2 - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i,$$

ovvero, identicamente:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + y_i^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + z_i^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \\ &\quad - \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2 - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i, \end{aligned}$$

perché è:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Infine, semplificando:

$$r_i^2 = x_i^2(\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2(\alpha^2 + \gamma^2) + z_i^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i.$$

Questo valore, sostituito nell'espressione di I ci dà:

$$I = (\beta^2 + \gamma^2) \sum_1^n m_i x_i^2 + (\alpha^2 + \gamma^2) \sum_1^n m_i y_i^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \sum_1^n m_i z_i^2 - \\ - 2\beta\gamma \sum_1^n m_i y_i z_i - 2\alpha\gamma \sum_1^n m_i x_i z_i - 2\alpha\beta \sum_1^n m_i x_i y_i,$$

od anche, ponendo in evidenza nei primi tre termini a secondo membro, α^2 , β^2 e γ^2 , otteniamo:

$$I = \alpha^2 \sum_1^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_1^n m_i (x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2\beta\gamma \sum_1^n m_i y_i z_i - 2\alpha\gamma \sum_1^n m_i x_i z_i - 2\alpha\beta \sum_1^n m_i x_i y_i. \quad (9.29)$$

Così il calcolo del momento d'inerzia rispetto alla retta r è ridotto al calcolo delle sei costanti:

$$\sum_1^n m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad \sum_1^n m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad \sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2); \\ \sum_1^n m_i y_i z_i; \quad \sum_1^n m_i x_i z_i; \quad \sum_1^n m_i x_i y_i.$$

Quindi, calcolate queste costanti, potremo conoscere il momento d'inerzia del nostro sistema rispetto ad una qualsiasi retta passante per O , quando ne siano dati i coseni direttori. Notando poi che $(x_i^2 + y_i^2)$, $(x_i^2 + z_i^2)$, $(y_i^2 + z_i^2)$, rappresentano i quadrati delle distanze di P_i dall'asse z , y ed x , rispettivamente, vediamo che i primi tre dei sei precedenti coefficienti, rappresentano i momenti di inerzia I_x, I_y, I_z , del sistema rispetto ai tre assi coordinati, la (9.29) diviene allora:

$$I = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\beta\gamma \sum_1^n m_i y_i z_i - 2\alpha\gamma \sum_1^n m_i x_i z_i - 2\alpha\beta \sum_1^n m_i x_i y_i. \quad (9.30)$$

9.9 Ellissoide d'inerzia

Per ottenere una rappresentazione geometrica del modo di variare di I al variare della retta, consideriamo la stella di rette col vertice in O , e sopra

ogni suo raggio, a partire da O riportiamo un segmento di lunghezza ρ , inversamente proporzionale alla radice quadrata di I , momento d'inerzia relativo al considerato raggio della stella, cioè tale che sia

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad (9.31)$$

Gli estremi di tutti gli infiniti segmenti che così si ottengono, costituiscono una superficie che ci proponiamo dimostrare essere un ellissoide. Infatti, detto $P \equiv (x, y, z)$ l'estremo di uno dei segmenti suddetti, avremo:

$$x = \rho\alpha, \quad y = \rho\beta, \quad z = \rho\gamma$$

ove α, β e γ sono i coseni direttori della retta cui il segmento in parola appartiene. Per α, β e γ otterremo quindi i valori:

$$\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \beta = \frac{y}{\rho}, \quad \gamma = \frac{z}{\rho},$$

che, sostituiti nell'ultima espressione trovata per I (v. (9.30)), ci danno

$$I = \frac{1}{\rho^2} \left[I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2yz \sum_1^n m_i y_i z_i - 2xz \sum_1^n m_i x_i z_i - 2xy \sum_1^n m_i x_i y_i \right].$$

Ma dalla (9.31) si ricava $1/\rho^2 = I$; e sostituendo nella espressione precedente questo valore, e dividendo ambo i membri per esso si ottiene:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2yz \sum_1^n m_i y_i z_i - 2xz \sum_1^n m_i x_i z_i - 2xy \sum_1^n m_i x_i y_i = 1.$$

Quest'equazione a coefficienti costanti, rappresenta una quadrica col centro nell'origine; se scegliamo come assi coordinati gli assi della quadrica, scompaiono i termini misti nell'equazione suddetta che assumerà in tal caso la forma

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

che ci rappresenta, manifestamente un ellissoide reale perché i coefficienti I_x, I_y ed I_z sono positivi per la loro stessa qualità di momenti d'inerzia. Gli assi dell'ellissoide suddetti diconsi assi principali d'inerzia. Notiamo che, riferendosi agli assi principali d'inerzia, si ha:

$$\sum_1^n m_i y_i z_i = 0, \quad \sum_1^n m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_1^n m_i x_i y_i = 0.$$

Quando sia dato l'ellissoide d'inerzia, dovendosi calcolare l' I rispetto ad una retta qualsiasi passante per il baricentro, basterà misurare, sulla direzione della retta la distanza ρ compresa tra il centro dell'ellissoide e l'intersezione della retta in parola con la superficie. Noto così ρ , dalla relazione: $\rho = 1/\sqrt{I}$, si ricava immediatamente:

$$I = \frac{1}{\rho^2}$$

Da qui discende come ai massimi valori di ρ corrispondano i minimi valori di I , e viceversa. Quindi il momento d'inerzia sarà massimo quando la retta rispetto a cui lo si calcola coincida con l'asse minore dell'ellissoide, minimo quando essa coincida con l'asse maggiore.

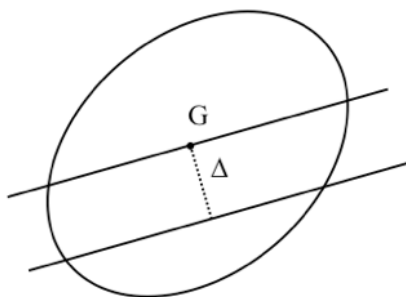


Figura 9.19: Conoscendo il momento d'inerzia rispetto ad una retta passante per il centro di gravità del sistema, è possibile calcolarlo rispetto ad ogni retta parallela ad essa.

Vediamo, ora, come quando si sia costruito l'ellissoide d'inerzia rispetto al centro di gravità, G , del corpo, sia possibile calcolare l' I rispetto ad una retta qualsiasi. Infatti, condotta per G una retta parallela alla data, calcoliamo col metodo descritto, l' I rispetto ad essa; detta, quindi, Δ la distanza fra le due rette, per la nota formula che dà il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, espresso in funzione di quello relativo all'asse baricentrico parallelo, avremo:

$$I = I_G + M\Delta^2$$

dove M è la massa totale del corpo.

Torniamo a considerare il moto di un sistema rigido vincolato ad avere un punto fisso ed avente, quindi, tre gradi di libertà. Scegliamo come terna solidale col corpo, quella formata dagli assi principali d'inerzia. Sappiamo dalla cinematica che il moto può riguardarsi come rotatorio attorno ad un asse variabile da istante a istante. Detta ω la velocità angolare in un istante generico, per la velocità V_i di un punto qualsiasi $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ del sistema: avremo l'espressione:

$$V_i = \omega \wedge (P_i - O), \quad (9.32)$$

e per le componenti di essa (rispetto agli assi mobili x, y, z):

$$V_x = qz_i - ry_i, \quad V_y = rx_i - pz_i, \quad V_z = py_i - qx_i,$$

essendo, al solito, p, q ed r , le componenti di ω . Si noti che mentre x_i, y_i e z_i sono costanti rispetto al tempo, variano invece, p, q ed r .

Per determinare il moto del sistema, occorrono tre equazioni scalari che ci vengono fornite dalla nota equazione vettoriale:

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Proponiamoci quindi di calcolare Q , cioè le sue componenti: Q_x, Q_y, Q_z . Dovremo moltiplicare vettorialmente la (9.32) per $m_i(P_i - O)$, ed eseguendo il sommatorio esteso agli n punti del sistema, ottenendo così:

$$Q = \sum_1^n (P_i - O) \wedge m_i V_i,$$

e per la componente secondo l'asse x

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_1^n m_i [y_i(py_i - qx_i) - z_i(rx_i - pz_i)] \\ &= \sum_1^n m_i [p(y_i^2 + z_i^2) - qy_ix_i - rz_ix_i] \\ &= p \sum_1^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - q \sum_1^n m_i y_i x_i - r \sum_1^n m_i z_i x_i, \end{aligned}$$

ed infine notando che $y_i^2 + z_i^2$ ci rappresenta la distanza di P_i dall'asse x , e che, essendosi scelti per assi coordinati gli assi principali d'inerzia, è:

$$\sum_1^n m_i x_i y_i = \sum_1^n m_i x_i z_i = \sum_1^n m_i y_i z_i = 0.$$

si ottiene:

$$Q_x = p \sum_1^n m_i [(y_i^2 + z_i^2)] = p I_x, \quad (9.33)$$

ed operando in modo analogo:

$$Q_y = q \sum_1^n m_i [(x_i^2 + z_i^2)] = q I_y; \quad Q_z = r \sum_1^n m_i [(x_i^2 + y_i^2)] = r I_z. \quad (9.34)$$

Se l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia, ad esempio con l'asse x , si ha:

$$q = r = 0, \quad \text{cioè} \quad Q_y = Q_z = 0$$

e quindi:

$$Q = Q_x = p I_x,$$

cioè, in questo caso, la direzione di Q coincide con quella dell'asse di rotazione. Dalle (9.33) e (9.34) si conclude perciò: i vettori Q ed ω , rispettivamente, quantità di moto areale e velocità angolare del sistema, risultano paralleli allora, ed allora soltanto, che l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia.

Nel caso di un asse generico (sempre passante per O) vediamo come si possa costruire il vettore Q . Consideriamo l'equazione dell'ellissoide:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

sappiamo che i coseni direttori della normale ad esse, sono proporzionali alle derivate parziali dell'equazione precedente, cioè, trascurando il fattore 2, a:

$$I_x x, \quad I_y y, \quad I_z z.$$

Se costruiamo la normale alla superficie nel punto d'incontro con l'asse di rotazione (istantaneo) si vede immediatamente come

$$p I_x, \quad q I_y, \quad r I_z,$$

componenti della Q , siano proporzionali a I_x, I_y, I_z , che, come si è visto sono alla loro volta proporzionali ai coseni direttori (e quindi alle componenti) della normale nel punto d'incontro dell'ellissoide con l'asse; Q risulta quindi parallelo a detta normale.

Concludendo: quando l'asse di rotazione non coincide con alcuno degli assi principali d'inerzia, per ottenere la direzione di Q si costruirà la normale all'ellissoide nel punto d'incontro col dato asse, e conducendo per il centro dell'ellissoide la parallela alla normale suddetta si otterrà la direzione di Q .

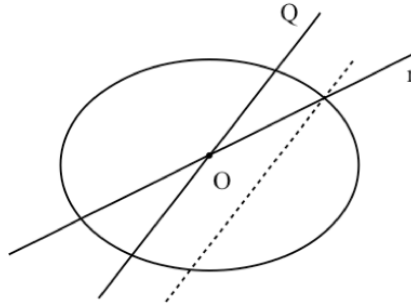


Figura 9.20: La normale all'ellissoide d'inerzia nel punto di incontro dell'asse di rotazione r con l'ellissoide fornisce la direzione di Q .

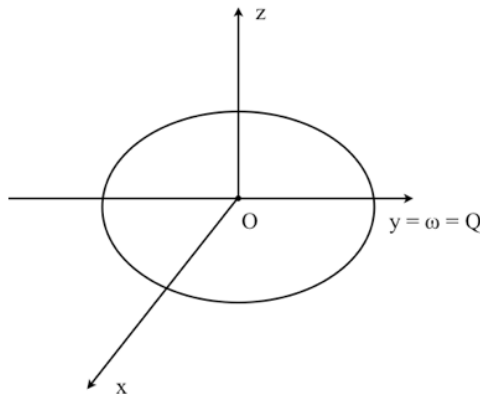


Figura 9.21: Con $M = 0$, e ω è diretto secondo uno degli assi principali, ω e Q sono paralleli.

Se le forze agenti sul corpo si annullano, oppure se è, identicamente, $\mathfrak{M} = 0$, risulta allora: $dQ/dt = 0$, cioè: $Q = Q_0 = \text{cost}$. È d'uopo allora conoscere le condizioni iniziali del moto, cioè la velocità angolare iniziale ω ; se la direzione di ω coincide con quella di uno degli assi principali d'inerzia, il moto del corpo continua ad essere rotatorio, poiché resta soddisfatta la condizione precedente che esige la costanza del vettore Q ; infatti, per quanto più addietro è stato detto, la direzione di Q coincide allora con quella dell'asse di rotazione e Q rimane quindi invariato.

Nel caso più generale in cui ω non coincide con nessuno degli assi principali d'inerzia, Q avrà direzione diversa da esso; se quindi il moto fosse rotatorio, Q non resterebbe costante perché varierebbe la sua direzione, descrivendo

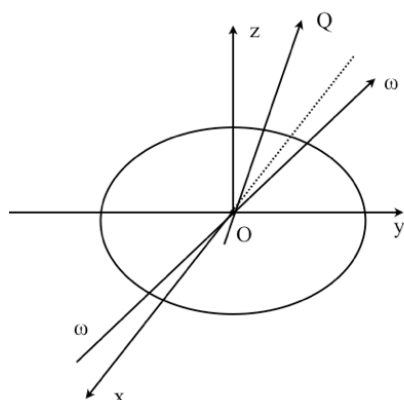


Figura 9.22: Con $\mathfrak{M} = 0$, e ω e Q non paralleli.

esso nello spazio un cono col vertice in O ; il moto non può dunque essere rotatorio, ma è invece di carattere più complicato.

9.10 Giroscopio

Il giroscopio è costituito da un corpo di rotazione, con un punto O , del suo asse, fisso. L'ellissoide d'inerzia del giroscopio, è dunque un ellissoide di rotazione attorno all'asse del corpo, col centro in O . Scegliamo come origine delle coordinate il punto O , come asse x l'asse p di rotazione dell'ellissoide, come assi y e z , infine due qualsiasi diametri ortogonali del cerchio sezione equatoriale dell'ellissoide stesso. Imprimito al giroscopio una velocità di rotazione p attorno al suo asse (p , coincidente con l'asse x) ed appoggiamolo su di un sostegno per il punto fisso O ; sapendo, inoltre, che il corpo è soggetto all'azione del suo peso, $P = mg$, applicato nel baricentro, proponiamoci di determinare il suo movimento. Si potrebbe far ciò mediante la conoscenza delle forze agenti sul giroscopio, ma non è questa la via più agevole; invece, siccome l'esperienza ci dice che il moto del giroscopio risulta da due distinti moti di rotazione, l'uno attorno all'asse p , (con velocità angolare p) e l'altro attorno ad un asse Ω (con velocità angolare Ω) verticale e passante per O , e, siccome questo punto è fisso, l'asse p descrive una superficie conica col vertice nel punto medesimo, risaliremo dalla conoscenza del moto alla determinazione delle forze. Per dare un'opportuna disposizione agli assi coordinati scegliamo ancora

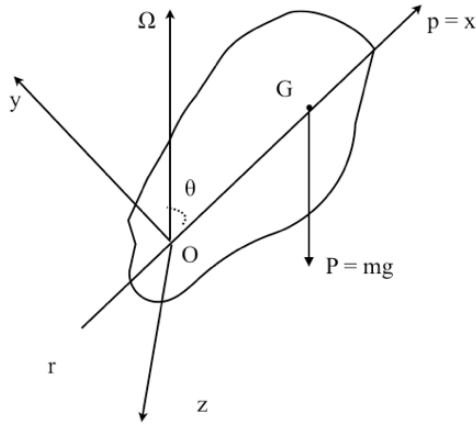
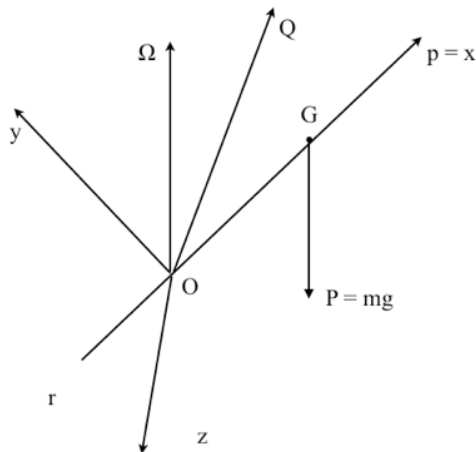


Figura 9.23: Il giroscopio.

per asse x l'asse di rotazione p , per asse y la normale a quest'ultimo in O , nel piano Ωp , ed infine per asse z la normale ai due precedenti. Detto θ l'angolo che Ω fa con l'asse x , per le componenti della rotazione ω , attorno ad Ω e p , avremo:

$$\omega_x = p + \Omega \cos \theta, \quad \omega_y = \Omega \sin \theta, \quad \omega_z = 0, \quad (9.35)$$

Figura 9.24: Gli elementi necessari al calcolo di Q .

Passiamo ora a calcolare la quantità di moto areale, Q , del sistema. Osserviamo anzitutto che, trattandosi di un corpo con un punto fisso, dotato di moto rotatorio, poiché si sono scelti per assi coordinati gli assi baricentrici d'inerzia (il che si riconosce immediatamente notando che l'asse p , scelto come asse x , coincide con l'asse di rotazione dell'ellissoide d'inerzia, e che gli assi y e z sono due diametri ortogonali dell'ellissoide nel piano equatoriale), le componenti Q_x , Q_y e Q_z , ci sono fornite, rispettivamente dalle espressioni:

$$\omega_x I_x, \quad \omega_y I_y, \quad \omega_z I_z.$$

Notando che ω_z è nulla, e sostituendo per ω_x ed ω_y i valori forniti dalle (9.35), otteniamo:

$$Q_x = I_x(p + \Omega \cos \theta), \quad Q_y = I_y \Omega \sin \theta. \quad (9.36)$$

Il vettore Q giace, dunque, nel piano xy ($= p\Omega$); conoscendone le componenti potremo costruirlo, e, dovendo rimanere complanare con Ω e con p , esso si muoverà assieme al giroscopio, ruotando attorno all'asse Ω in modo che sia soddisfatta l'equazione $dQ/dt = \mathfrak{M}$. Nel caso nostro \mathfrak{M} è dato dal momento rispetto ad O del peso P del giroscopio. Quanto poi alla derivata del vettore Q , siccome esso ha un estremo fisso, questa coincide con la velocità dell'altro estremo, velocità che, evidentemente, risulta normale al piano xy ; si riconosce d'altra parte, immediatamente, che anche \mathfrak{M} è normale al piano suddetto. Infatti \mathfrak{M} , come prodotto vettoriale di $(G - O)$ e P , risulta perpendicolare al piano di questi due vettori, cioè al piano della figura che è verticale. \mathfrak{M} e dQ/dt , coincidono dunque in direzione. Quanto, poi, alla grandezza, abbiamo:

$$\left| \frac{dQ}{dt} \right| = |V_s| = |\Omega| \cdot d, \quad (9.37)$$

ove d è la distanza di S dall'asse Ω . Ma osservando che è:

$$d = Q_x \sin \theta - Q_y \cos \theta;$$

sostituendo nella (9.37), troviamo:

$$\left| \frac{dQ}{dt} \right| = |\Omega| (Q_x \sin \theta - Q_y \cos \theta). \quad (9.38)$$

Per la grandezza di \mathfrak{M} (momento di P), abbiamo:

$$|\mathfrak{M}| = Pa \sin \theta = m g a \sin \theta, \quad (a = \overline{OG}).$$

Eguagliando quest'ultima con la (9.38) si ha:

$$|\Omega| (Q_x \sin \theta - Q_y \cos \theta) = m g a \sin \theta,$$

e sostituendo a primo membro, per Q_x e Q_y , i rispettivi valori (9.36), otteniamo:

$$|\Omega| \cdot [I_x(p + |\Omega| \cos \theta) \sin \theta - I_y |\Omega| \sin \theta \cos \theta] = mg a \sin \theta,$$

e, dividendo ambo i membri per $\sin \theta$:

$$|\Omega| \cdot [I_x(p + |\Omega| \cos \theta) - I_y |\Omega| \cos \theta] = mg a.$$

Sviluppando quest'espressione, si otterrebbe un'equazione di secondo grado in Ω , di cui si potrebbe perciò determinare il valore. Ma un valore di Ω sufficientemente approssimato si ottiene osservando che, siccome nella pratica la rotazione Ω è molto più piccola della rotazione p , nella precedente equazione si possono, senza errore apprezzabile, trascurare i termini contenenti Ω^2 ; essa diviene:

$$|\Omega| I_x p = mg a,$$

da cui, infine:

$$|\Omega| = \frac{mg a}{I_x p}.$$

Vediamo, quindi, che $|\Omega|$ cresce sia al diminuire della velocità angolare p (rimanendo costanti gli altri fattori), sia al diminuire di I_x .

In generale, supponiamo di imprimere al giroscopio una forte velocità angolare attorno al suo asse p , ed ammettiamo che gli altri eventuali movimenti del giroscopio abbiano velocità trascurabile in confronto a questa. Potremo allora, in prima approssimazione, ammettere che la quantità di moto areale sia dovuta soltanto al moto di rotazione attorno a p , e quindi coincida in direzione con questo asse ed abbia grandezza data da:

$$I_x p.$$

Tenendo conto di ciò, ci si spiega perché facendo agire sul giroscopio una forza qualsiasi, esso si sposti in direzione normale al piano della forza e dell'asse, infatti il momento \mathfrak{M} della forza è eguale alla derivata della quantità di moto areale, dQ/dt , che, come si è visto, è normale all'asse di rotazione.

9.11 Moto di un sistema rigido libero

Consideriamo, ora, il moto di un sistema rigido libero di muoversi comunque, sistema che ha, dunque, sei gradi di libertà. Mentre in cinematica si potevano scegliere indifferentemente gli assi della terna solidale col sistema, in dinamica è più conveniente scegliere per origine il centro di gravità

G , e, per assi, gli assi principali d'inerzia. La velocità di ogni punto del sistema si può considerare come risultante della velocità V_G del centro di gravità, e della velocità del punto nel moto relativo a G , moto che, ad ogni istante, può considerarsi rotatorio. Ora, per determinare il moto del centro di gravità, osserviamo che è:

$$\frac{dq}{dt} = MA_G = R, \quad (9.39)$$

ove A_G è l'accelerazione del centro di gravità; il punto G si muove dunque come un punto materiale di massa eguale alla massa totale, M , del sistema, al quale sia applicata la forza R , cioè il risultante delle forze applicate al sistema. Alla (9.39) si può dare anche la forma scalare:

$$M\ddot{x}_o = R_x, \quad M\ddot{y}_o = R_y, \quad M\ddot{z}_o = R_z.$$

Resta da considerare dunque il moto del sistema relativo al centro di gravità. Diciamo che questo moto è uguale a quello che avrebbe il sistema se, restando inalterate le forze applicate, il centro di gravità venisse fissato. Infatti il moto relativo a G viene determinato dall'equazione delle quantità di moto areali (prese rispetto a G):

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{M}. \quad (9.40)$$

Se G fosse un punto fisso, l'equazione del moto attorno ad esso sarebbe:

$$\frac{dQ'}{dt} = \mathfrak{M}. \quad (9.41)$$

Q e Q' sono, rispettivamente, i momenti, rispetto a G , delle quantità di moto nel moto effettivo (somma del moto traslatorio e del moto relativo) e nel solo moto relativo. Per dimostrare che esse coincidono, basterà far vedere che è nulla la quantità di moto areale della parte traslatoria del moto del sistema (la parte cioè in cui la velocità di ogni punto è uguale alla velocità V_G di G). A tale scopo osserviamo che questa quantità di moto areale, $Q(V_G)$, ci è data da:

$$Q(V_G) = \sum (P_i - G) \wedge m_i V_G,$$

ovvero:

$$Q(V_G) = [\sum m_i (P_i - G)] \wedge V_G. \quad (9.42)$$

Per dimostrare che quest'ultima espressione è nulla, basterà osservare che è

$$\sum m_i (P_i - G) = 0;$$

ora, riferendoci ad assi qualsiasi, proiettiamo il vettore $\sum m_i(P_i - G)$; p. es., sull'asse x . Troviamo:

$$\sum m_i(x_i - x_o) = \sum m_i x_i - \sum m_i x_o = \sum m_i x_i - x_o \sum m_i, \quad (9.43)$$

ove, al solito, x_o è l'ascissa di G . Ma sappiamo che:

$$x_o = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

e quindi si riconosce che l'espressione (9.43) si annulla; analogamente si dimostrerebbe che si annullano le altre componenti di $\sum m_i(P_i - G)$. Resta con ciò dimostrato che: $Q(V_G) = 0$, e quindi

$$Q = Q'.$$

Ciò posto, si vede che le due equazioni (9.40) e (9.41), coincidono, ora, completamente tra loro, e da ciò si deduce che il moto del sistema, relativo a G , avviene come se G fosse un punto fisso, ed il corpo ruotasse attorno ad esso.

9.12 Teorema delle forze vive per i sistemi rigidi

La forza viva, T , di un sistema rigido è, evidentemente data dalla somma delle forze vive dei singoli punti, e cioè, indicando con m_i la massa, e con V_i la velocità di uno qualsiasi degli n punti del sistema, avremo:

$$T = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i V_i^2. \quad (9.44)$$

Ma, come abbiamo visto precedentemente, la velocità di un punto di un sistema rigido libero, ci è data da:

$$V_i = V_G + \omega \wedge (P_i - G);$$

elevando al quadrato:

$$V_i^2 = V_G^2 + [\omega \wedge (P_i - G)]^2 + 2V_G \times [\omega \wedge (P_i - G)],$$

e sostituendo nella (9.44), per V_i^2 , questo valore otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2 + V_G \times [\omega \wedge \sum_1^n m_i (P_i - G)].$$

Osservando poi che è $\sum_1^n m_i = M$ (massa totale del sistema), e che è: $\sum_1^n m_i (P_i - G) = 0$ (v. Sezione precedente), l'espressione di T assume la forma:

$$T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2.$$

Si vede, dunque, come la forza viva del sistema considerato sia costituita di una somma di due termini, uno dei quali ci rappresenta la forza viva dovuta al moto traslatorio del centro di gravità, G , cui è attribuita una massa eguale alla massa totale, M , del sistema, e l'altro che ci rappresenta la forza viva dovuta al moto rotatorio del sistema attorno ad un asse (istantaneo) passante per G ,

Ottenuta così l'espressione della forza viva del sistema, passiamo ora a considerare il lavoro effettuato dalle forze agenti su di esso durante il suo movimento, e proponiamoci, anzitutto, di dimostrare come il lavoro eseguito dalle forze interne sia nullo. Limitandoci, infatti, per semplicità, a considerare due soli punti del sistema, p. es., A e B , sappiamo che essi esercitano tra loro, reciprocamente, due forze F e $-F$, eguali in grandezza, di verso opposto e con la direzione di \overline{AB} . Se, in un tempuscolo elementare, dt , i due punti si spostano degli spazi infinitesimi dA e dB , rispettivamente, per il lavoro totale compiuto dalle forze F e $-F$ sui due punti avremo:

$$L_{A,B} = F \times dA - F \times dB = F \times (dA - dB) = F \times d(A - B).$$

Ma, per la rigidità del sistema, è:

$$(A - B)^2 = \text{cost.},$$

da cui, differenziando e dividendo per 2, otteniamo la relazione:

$$(A - B) \times d(A - B) = 0.$$

Da quest'ultima relazione si vede che è:

$$(A - B) \perp d(A - B),$$

e, siccome F è parallela ad $(A - B)$, è ancora:

$$d(A - B) \perp F.$$

Tenendo conto di ciò possiamo scrivere:

$$L_{A,B} = F \times (dA - dB) = F \times d(A - B) = 0,$$

che ci dice che i lavori delle forze interne si annullano a due a due, come appunto volevamo dimostrare.

È evidente, poi, che se un sistema si muove restando fissi uno o due, dei suoi punti, il lavoro delle reazioni esercitate da questi vincoli è nullo. Infatti, poiché le reazioni sono applicate a punti fissi, manca nell'espressione del lavoro da esse compiuto il fattore spostamento; detto lavoro è quindi nullo. Avendo così provato che è nullo il lavoro delle forze interne e quello delle reazioni vincolari ci proponiamo di dimostrare come la variazione della forza viva, T , del sistema sia eguale al lavoro delle forze esterne. Infatti, il lavoro elementare, dL_i , compiuto dalle forze esterne su di un punto generico, P_i , del sistema, ove con F_i si indichi la forza totale (esterna) agente sul punto, e con ds_i lo spostamento di esso, ci è dato da:

$$dL_i = F_i \times ds = F_i \times [V_G + \omega \wedge (P_i - G)] dt, \quad (9.45)$$

essendo, al solito:

$$V_i = V_G + \omega \wedge (P_i - G).$$

Facendo la sommatoria, estesa a tutti gli n punti del sistema, della (9.45), avremo per il lavoro elementare compiuto dalle forze esterne sul sistema:

$$\begin{aligned} dL &= \sum_1^n dL_i = \sum_1^n F_i \times ds = \sum_1^n F_i \times [V_G + \omega \wedge (P_i - G)] dt = \\ &= \left[\sum_1^n F_i \times V_G + \sum_1^n F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)] \right] dt. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Il termine: $\sum_1^n F_i \times V_G$, essendo: $\sum_1^n F_i = R$ (risultante delle forze esterne), diventa

$$R \times V_G; \quad (9.47)$$

il termine $\sum_1^n F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)]$ che è il prodotto misto di tre fattori, non si altera circolando su di essi; quindi esso è eguale a:

$$\sum_1^n \omega \times [(P_i - G) \wedge F_i],$$

ed infine a: $\omega \times \sum_1^n [(P_i - G) \wedge F_i]$. Notando poi che è: $\sum_1^n [(P_i - G) \wedge F_i] = \mathfrak{M}_G$, momento totale delle forze esterne, calcolato rispetto al centro di gravità, risulta in definitiva:

$$\sum_1^n F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)] = \omega \wedge \mathfrak{M}_G,$$

ed allora, tenendo conto di quest'ultima e della (9.47), la (9.46) diviene:

$$dL = [R \times V_G + \omega \times \mathfrak{M}_G] dt,$$

e, dividendo ambo i membri per dt abbiamo infine:

$$\frac{dL}{dt} = [R \times V_G + \omega \times \mathfrak{M}_G].$$

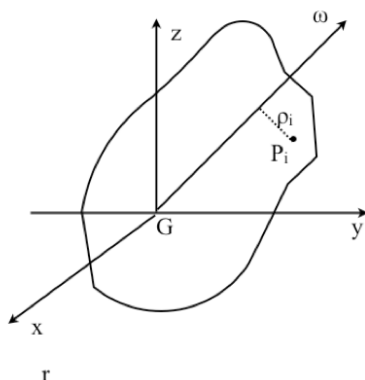


Figura 9.25: Il calcolo della velocità del punto P_i .

Il nostro teorema sarà stabilito se dimostreremo che questa derivata del lavoro eseguito dalle forze esterne, è eguale alla derivata di T rispetto al tempo, cioè alla derivata dell'espressione

$$\frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2$$

Prima di derivare quest'ultima, procediamo a trasformare in essa, opportunamente, il termine:

$$\frac{1}{2} \sum_1^n m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2$$

Scegliamo per terna x, y, z , di riferimento, quella degli assi principali d'inerzia (e che, quindi, ha origine in G), ed osserviamo che il vettore:

$$[\omega \wedge (P_i - G)]^2,$$

che compare nella precedente espressione, è il quadrato della velocità sulla traiettoria di un punto generico del sistema, velocità che ricaveremo ora

in altro modo. A tal uopo, detti α, β, γ , i coseni direttori, rispetto a x, y, z , dell'asse istantaneo di rotazione, e ρ_i la distanza da esso di un punto generico P_i del corpo, per la velocità, V_i , di questo abbiamo:

$$V_i = \omega \rho_i;$$

elevando al quadrato:

$$V_i^2 = \omega^2 \rho_i^2$$

e quindi per la forza viva di P_i dovuta al solo moto di rotazione (forza viva che indicheremo con $T_{i,\text{rot}}$) avremo l'espressione

$$T_{i,\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho_i^2,$$

e per la forza viva dell'intero sistema⁴:

$$T_{\text{rot}} = \sum_1^n T_{i,\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n m_i \rho_i^2,$$

ed infine, notando che: $\sum_1^n m_i \rho_i^2$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse ω , risulta:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 I. \quad (9.48)$$

Siccome poi il momento d'inerzia, I , rispetto ad un asse passante per il centro di gravità, di coseni direttori α, β, γ , rispetto alla terna x, y, z , degli assi principali d'inerzia, ci è dato da:

$$I = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z,$$

sostituendo nella (9.48), otteniamo:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\omega^2 \alpha^2 I_x + \omega^2 \beta^2 I_y + \omega^2 \gamma^2 I_z),$$

e poiché $\alpha^2 \omega^2, \beta^2 \omega^2$ e $\gamma^2 \omega^2$, non sono altro che i quadrati delle componenti, secondo la terna x, y, z della rotazione ω , componenti che, al solito, indichiamo con p, q ed r , abbiamo:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2);$$

⁴Qui e in varie formule seguenti del testo originale ci sono dei fattori 1/2 mancanti e che sono stati qui reintrodotti correttamente.[Ndr]

ed, infine, sostituendo nell'espressione di T , per la forza viva dovuta al moto rotatorio, quest'ultimo valore, si ha:

$$T = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}(I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2).$$

Passiamo, ora, a derivare quest'espressione rispetto al tempo:

$$\frac{dT}{dt} = MV_G \times A_G + pI_x \dot{p} + qI_y \dot{q} + rI_z \dot{r}. \quad (9.49)$$

Osservando che è:

$$Q_x = I_x p, \quad Q_y = I_y q, \quad Q_z = I_z r,$$

e quindi:

$$\frac{dQ_x}{dt} = I_x \dot{p}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = I_y \dot{q}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = I_z \dot{r},$$

la (9.49) precedente diviene:

$$\frac{dT}{dt} = MV_G \times A_G + p \frac{dQ_x}{dt} + q \frac{dQ_y}{dt} + r \frac{dQ_z}{dt},$$

ovvero:

$$\frac{dT}{dt} = MV_G \times A_G + \omega \times \frac{dQ}{dt},$$

ed infine, poiché è: $MA_G = R$, e $dQ/dt = \mathfrak{M}$, otteniamo:

$$\frac{dT}{dt} = R \times V_G + \omega \times \mathfrak{M},$$

formula, questa, che coincide con la:

$$\frac{dL}{dt} = V_G \times R + \omega \times \mathfrak{M}.$$

Possiamo, quindi, concludere che la derivata della forza viva del sistema, è eguale alla derivata del lavoro compiuto su di esso dalle forze esterne, e porre, quindi, più brevemente:

$$dL = dT,$$

ed integrando quest'ultima tra due valori t_1 e t_2 , del tempo, otteniamo:

$$L_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1.$$

Questa relazione esprime il principio della conservazione dell'energia nel caso dei sistemi rigidi.

Capitolo 10

STATICA IN GENERALE

10.1 Catenaria

Come primo esempio, proponiamoci di determinare l'equazione della curva secondo la quale si dispone un filo pesante, omogeneo, flessibile ed inestensibile, sospeso per i suoi due estremi, A e B . Questo sistema continuo ha, evidentemente, infiniti gradi di libertà, per conoscere, infatti, la posizione di esso, bisogna conoscere le coordinate degli infiniti suoi punti. Ci proponiamo di vedere come si possa giungere a stabilire l'equazione della curva secondo la quale il filo si dispone; è evidente, anzitutto, che questa sarà piana e, precisamente, contenuta nel piano verticale passante per \overline{AB} . Scegliamo per asse y la verticale passante per il punto più basso, V , della curva, orientato dal basso verso l'alto, per asse x una qualsiasi retta normale all'asse y nel piano della curva; l'origine sarà scelta opportunamente più tardi.

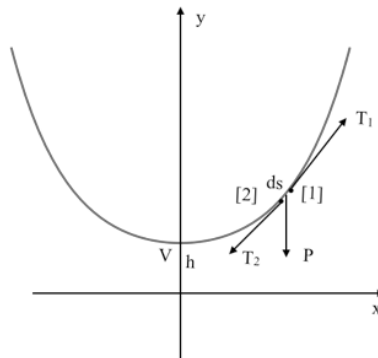


Figura 10.1: La catenaria

Considerando, dunque, un elemento, ds , di filo, si riconosce che esso è soggetto ai suoi due estremi [1] e [2] a due tensioni, \vec{T}_1 e \vec{T}_2 , di eguale grandezza e segno contrario, aventi rispettivamente, la direzione della tangente

alla curva in [1] e [2], ed, infine al proprio peso, \vec{p} , applicato nel centro di gravità; detta ρ la densità costante del filo, per la grandezza di \vec{p} , avremo

$$|\vec{p}| = g\rho ds.$$

Per ipotesi, l'elemento di filo ds non è rigido, epperò, per stabilirne le condizioni di equilibrio, non potremo, senz'altro, applicare l'equazioni trovate per l'equilibrio di un sistema rigido; se, però, per un istante, supponiamo che ds si irrigidisca, è evidente che l'equilibrio non verrebbe turbato e, per conseguenza, le condizioni d'equilibrio per l'elemento pensato come rigido:

$$R = 0, \quad \mathfrak{M} = 0,$$

saranno necessarie per l'equilibrio (a priori non si può affermare che esse siano sufficienti). Dovrà, dunque, annullarsi il risultante, R , delle forze agenti sull'elemento ds , dovrà cioè essere:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{p} = 0,$$

equazione vettoriale, questa che ne rappresenta due scalari. Per le componenti di \vec{T}_1 , secondo gli assi x ed y rispettivamente, indicando con T la grandezza della tensione del filo, avremo:

$$-T \frac{dx}{ds}; \quad -T \frac{dy}{ds}.$$

Per le componenti di T_2 poi, se osserviamo che per passare da [1] in [2], bisogna spostarsi di ds lungo la curva, e, quindi, la tensione in [2], salvo il verso, differirà dalla tensione in [1] per il differenziale di quest'ultima, potremo dunque porre;

$$T \frac{dx}{ds} + d\left(T \frac{dx}{ds}\right); \quad T \frac{dy}{ds} + d\left(T \frac{dy}{ds}\right),$$

ove $d(Tdx/ds)$ e $d(Tdy/ds)$ rappresentano i differenziali della tensione in [1]. Infine, il peso \vec{p} dell'elemento ds ha, per la scelta fatta degli assi, nulla la componente x , e la componente y dataci da:

$$-g\rho ds.$$

Dovendo annullarsi il risultante, R (e, quindi, le sue componenti R_x ed R_y), delle tre forze agenti su ds , sommando le due equazioni:

$$R_x = d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0; \tag{10.1}$$

$$R_y = d\left(T \frac{dy}{ds}\right) - g\rho ds = 0; \quad (10.2)$$

che, unite alla nota relazione

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \quad (10.3)$$

costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali da cui possiamo ricavare x, y e T in funzione di s . Integrando la (10.1), otteniamo:

$$\int d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = T \frac{dx}{ds} = T_0 = \text{cost.} \quad (10.4)$$

Per determinare il valore della costante T_0 , osserviamo che nel punto più basso della curva, V , la tangente è parallela all'asse x ; risulta perciò: $dx/ds = 1$ e quindi dalla (10.4) si ricava:

$$T = T_0,$$

cioè, T_0 rappresenta la tensione nel punto V .

Passando ad integrare la (10.2), abbiamo:

$$\int d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = \int g\rho ds,$$

ed eseguendo la quadratura:

$$T \frac{dy}{ds} = g\rho s + \text{cost.}; \quad (10.5)$$

per determinare il valore della costante additiva se ci riferiamo ancora al punto V , vediamo che in esse la tangente è normale all'asse y , e quindi è:

$$\frac{dy}{ds} = 0,$$

e siccome, poi, gli archi si contano a partire da V , in esso punto è anche:

$$s = 0$$

ed allora si annulla la costante nella (10.5). Dividendo poi membro a membro la (10.5) per la (10.4), otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\rho s}{T_0}; \quad (10.6)$$

ed introducendo una costante h , tale che sia:

$$h = \frac{T_0}{g\rho}$$

la (10.6) diviene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{h}; \quad (10.7)$$

Si noti che la costante h rappresenta la lunghezza di filo il cui peso è uguale alla tensione nel punto V . La (10.7) e la (10.3) sono due relazioni in cui non compare più la tensione T ; esse potranno, perciò servire a determinare l'equazione della curva. Derivando la (10.7), e sostituendo nell'espressione derivata, per ds , il valore: $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dato dalle (10.3) abbiamo:

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{h} = \frac{1}{h} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ovvero, identicamente

$$dy' = \frac{dx}{h} \sqrt{1 + y'^2},$$

da cui

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{h},$$

equazione differenziale a variabili separabili, che si integra immediatamente. Avremo:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{x}{h} + \text{cost.},$$

e poiché è:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{arcsinh } y',$$

risulterà:

$$\text{arcsinh } y' = \frac{x}{h} + \text{cost.} \quad (10.8)$$

In questa espressione la costante additiva si annulla (riferendoci al solo punto V). La (10.8) precedente può anche scriversi

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{h},$$

e moltiplicando ambo i membri per dx :

$$dy = \sinh \frac{x}{h} dx,$$

da cui, infine integrando:

$$y = \cosh \frac{x}{h} + \text{cost.} \quad (10.9)$$

Quest'ultima è l'equazione della catenaria. Affinché anche l'ultima costante additiva si annulli, basta scegliere l'asse x a distanza h dal vertice V della curva; in tal caso la (10.9) diviene, più semplicemente:

$$y = \cosh \frac{x}{h}$$

10.2 Catenaria dei ponti sospesi

Se immaginiamo di sospendere ad un filo (fissato per i suoi estremi) su tutta la lunghezza di esso un sistema rettilineo (p.es. un ponte sospeso) così pesante da potersi trascurare rispetto ad esso il peso del filo. Quest'ultimo si dispone secondo una curva che vien detta catenaria dei ponti sospesi. Mentre, nel caso della catenaria precedentemente considerata, la forza agente su ciascun elemento di filo era proporzionale al peso dello stesso, nel caso della catenaria dei ponti sospesi, ogni elemento di filo è soggetto ad una forza proporzionale al tratto, p.es., di ponte che esso deve sorreggere, ossia alla sua proiezione sulla direzione orizzontale. Scegliendo, appunto, per asse x quest'ultima, e per asse y la normale ad essa nel punto più basso, V_1 della curva, ci proponiamo di dimostrare che la catenaria dei ponti sospesi è una parabola. Siccome, in una schematica idealizzazione, il ponte sospeso può

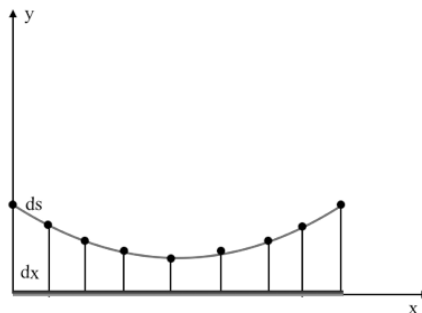


Figura 10.2: La catenaria dei ponti sospesi.

riguardarsi come un sistema lineare omogeneo, detta ρ la sua densità, il peso di un elemento di filo ci è dato da: $g\rho dx$. Sostituendo, quindi nelle equazioni di equilibrio (10.1) e (10.2) della catenaria semplice, $g\rho dx$ in luogo di $g\rho ds$, otteniamo:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad (10.10)$$

e:

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = g\rho dx, \quad (10.11)$$

ed integrando:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 \quad (10.12)$$

e:

$$T\frac{dy}{ds} = g\rho x \quad (10.13)$$

Dividendo poi membro a membro, la (10.13) per la (10.12), si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\rho x}{T_0};$$

espressione, questa, che, integrata, ci dà infine:

$$y = \frac{g\rho x^2}{2T_0} + \text{cost.},$$

che è, palesemente, l'equazione di una parabola il cui asse coincide con l'asse delle y .

10.3 Principio dei lavori virtuali

Consideriamo un sistema di punti, discreto o continuo. Su ciascun punto del sistema, agiranno delle forze, in parte direttamente applicate, ed in parte reazioni di eventuali vincoli cui il sistema è soggetto, vincoli, che, come già altre volte si è visto, possono essere del più svariato tipo (vincolo della rigidità, punto fisso, retta fissa, punto mobile su di una superficie, etc). Questi vincoli che, per ora, supponiamo indipendenti dal tempo, si dividono in reversibili ed irreversibili. Diconsi reversibile quei vincoli che, se si oppongono ad uno spostamento in un senso, si oppongono anche allo spostamento opposto, irreversibili quelli che possono opporsi allo spostamento

in un senso ma non al contrario. Un punto fisso, una retta fissa, sono esempi di vincoli reversibili; un punto appoggiato ad una superficie è soggetto ad un vincolo irreversibile.

Si dice spostamento virtuale di un sistema, un qualsiasi suo spostamento compatibile coi vincoli cui è soggetto.

Vogliamo ora vedere come il lavoro compiuto dalle reazioni dei vincoli sopra uno spostamento virtuale è sempre nullo nel caso che i vincoli in questione siano reversibili. Infatti, quando si consideri il caso di un punto fisso, la reazione del vincolo è una forza applicata al punto, e quindi, mancando il fattore spostamento, essa non può far lavoro. Considerazioni perfettamente analoghe valgono nel caso di una retta fissa e dei vincoli della rigidità. Così si dica pure se si consideri il vincolo di un punto costretto a restare su di una superficie. In quest'ultimo caso, infatti, la reazione del vincolo è una forza applicata al punto, e normale alla superficie. siccome, poi, lo spostamento virtuale è parallelo alla superficie, si ha che la forza e lo spostamento sono perpendicolari fra loro e, quindi, il lavoro virtuale è ancora nullo.

Possiamo, invece, far vedere che, nel caso di vincoli irreversibili, il lavoro virtuale è sempre positivo o nullo. Consideriamo, perciò, ad esempio, un punto appoggiato ad una piano, e vincolato a non attraversarlo. Sappiamo che la reazione del vincolo è normale al piano, e diretta verso il punto; siccome, d'altra parte, questo può muoversi da una sola banda del piano, l'angolo formato dalla direzione della reazione e degli spostamenti virtuali del punto è minore o, al più, eguale a $\pi/2$, e quindi il lavoro virtuale risulta sempre o positivo o nullo: quest'ultimo caso si verifica quando il punto si muova sul piano.

Importa però notare che se, invece di uno spostamento virtuale, si considera uno spostamento del sistema nel suo moto reale, il lavoro è sempre nullo, anche nel caso di vincoli irreversibili. Infatti, riferendoci ancora all'esempio di un punto appoggiato su di un piano, osserviamo che nel suo moto reale, non appena il punto abbandona il piano, la reazione vincolare cessa e, con essa, il lavoro. Di qui si vede come l'affermazione che le reazioni dei vincoli irreversibili compiono lavoro positivo, vale solo per lo spostamento virtuale.

Riassumendo, possiamo dire che **lungo ogni spostamento virtuale le reazioni dei vincoli reversibili compiono lavoro nullo, quelle dei vincoli irreversibili, lavoro positivo o nullo, mentre sopra un qualsiasi spostamento reale il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo.** Chiamando, ora, spostamenti virtuali reversibili gli spostamenti virtuali di un sistema soggetto a vincoli irreversibili, possiamo enunciare il cosiddetto principio dei lavori virtuali:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema

materiale a vincoli privi di attrito (e indipendenti dal tempo), è che le forze direttamente applicate al sistema compiano un lavoro totale nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, negativo o nullo per ogni spostamento virtuale irreversibile.

Dimostriamo dapprima detto principio nel caso degli spostamenti virtuali reversibili.

Consideriamo, dunque, un sistema soggetto a vincoli reversibili. Il moto e l'equilibrio di esso si possono considerare alla stregua del moto e dell'equilibrio di un sistema libero; se, oltre alle forze direttamente applicate, si suppone applicata al punto la reazione vincolare. Se P_1, P_2, \dots, P_n , sono gli n punti del sistema (supposto, per semplicità, discreto), ad ognuno di essi sarà applicata una forza F (dovuta sia a cause esterne che interne) ed una reazione vincolare \mathcal{R} . Il sistema sarà in equilibrio quando si annulli la forza totale agente su ogni punto, quando sia, cioè:

$$F_1 + \mathcal{R}_1 = 0, \quad F_2 + \mathcal{R}_2 = 0, \quad \dots \quad F_n + \mathcal{R}_n = 0, \quad (10.14)$$

da cui:

$$F_1 = -\mathcal{R}_1, \quad F_2 = -\mathcal{R}_2, \quad \dots \quad F_n = -\mathcal{R}_n. \quad (10.15)$$

Facciamo, ora, subire al sistema uno spostamento virtuale; un punto generico, P_i , di esso si sarà spostato di un tratto infinitesimo δP_i , e, trattandosi di uno spostamento virtuale reversibile, sarà nullo il lavoro totale compiuto lunghezso dalle reazioni vincolari sugli n punti del sistema, si avrà cioè:

$$\mathcal{R}_1 \times \delta P_1 + \mathcal{R}_2 \times \delta P_2 + \dots + \mathcal{R}_n \times \delta P_n = 0,$$

e sostituendo in questa espressione per $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ i valori forniti dalle (10.15), otteniamo identicamente:

$$F_1 \times \delta P_1 + F_2 \times \delta P_2 + \dots + F_n \times \delta P_n = 0, \quad (10.16)$$

Resta così dimostrato che, nel caso degli spostamenti reversibili la condizione espressa dal principio dei lavori virtuali è necessaria per l'equilibrio del sistema. Dimostriamo, ora, che la condizione suddetta è anche sufficiente; che, cioè, se per tutti gli spostamenti virtuali reversibili del sistema si verifica la (10.16), il sistema è in equilibrio. Ricordiamo, anzitutto, che una certa posizione è d'equilibrio per il sistema, quando, questo, posto in essa con velocità iniziale nulla, vi rimane definitivamente. Supponiamo infatti, per un momento che il sistema possa abbandonare la posizione in cui si trovava; dopo un certo tempo infinitesimo τ esso si troverà in una posizione

infinitamente prossima alla iniziale, ed avrà acquistata una certa velocità, e, quindi, anche una certa forza viva T . È, però, necessario che le forze su di esso agenti abbiano fatto un lavoro positivo. Ora sappiamo che le reazioni vincolari non fanno alcun lavoro sullo spostamento reale. D'altra parte, siccome lo spostamento infinitesimo reale è, certamente, compatibile coi vincoli, la (10.16) ci dice che neanche le forze applicate possono aver fatto lavoro. Concludiamo che il sistema non può essersi mosso, e che, quindi, la posizione era una posizione d'equilibrio.

Dimostriamo, ora, il principio nel caso degli spostamenti virtuali irreversibili.

In modo analogo al precedente, dovendo, per l'equilibrio del sistema, annullarsi la forza totale agente su ciascun punto avremo:

$$F_1 + \mathcal{R}_1 = 0, \quad F_2 + \mathcal{R}_2 = 0, \quad \dots \quad F_n + \mathcal{R}_n = 0, \quad (10.17)$$

da cui:

$$F_1 = -\mathcal{R}_1, \quad F_2 = -\mathcal{R}_2, \quad \dots \quad F_n = -\mathcal{R}_n. \quad (10.18)$$

Considerando, ora, uno spostamento virtuale (in questo caso irreversibile) del sistema, il lavoro compiuto sui suoi punti lungo detto spostamento dalle reazioni vincolari è positivo o nullo; avremo quindi:

$$\mathcal{R}_1 \times \delta P_1 + \mathcal{R}_2 \times \delta P_2 + \dots + \mathcal{R}_n \times \delta P_n \geq 0,$$

e, sostituendo i valori forniti dalle (10.18) e cambiando di segno:

$$F_1 \times \delta P_1 + F_2 \times \delta P_2 + \dots + F_n \times \delta P_n \leq 0, \quad (10.19)$$

espressione, questa, che ci esprime, nel caso di spostamenti virtuali irreversibili, la condizione necessaria per l'equilibrio del sistema. Dimostriamo, ora, che essa è anche sufficiente. Supponiamo, infatti, che il sistema possa abbandonare questa posizione, allora, esso, avendo inizialmente velocità, e quindi forza viva, nulla, dovrà aver acquistato una certa forza viva a spese del lavoro compiuto dalle forze che gli sono applicate, lavoro, questo che le forze attive non possono aver compiuto perché tali forze, per la (10.19), compiono soltanto un lavoro negativo o nullo e non mai positivo qual'è, invece, quello necessario ad imprimere una forza viva, e che neppure le reazioni vincolari possono aver compiuto perché esse, durante un qualsiasi spostamento reale del sistema compiono lavoro nullo. Resta, dunque, provato che il sistema non si muove e che, quindi, si trova in una posizione d'equilibrio.

10.4 *Equilibrio di un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie*

Come prima applicazione di quanto abbiamo dimostrato, applichiamo il principio dei lavori virtuali alla determinazione delle condizioni di equilibrio per un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie. In questo caso il vincolo è reversibile, quindi, per il lavoro compiuto dalla forza, F , applicata al punto, durante uno spostamento virtuale reversibile, δP , di questo, avremo:

$$F \times \delta P = 0,$$

relazione questa che, essendo per ipotesi $F \neq 0$ ed essendosi scelto anche $\delta P \neq 0$, ci dice dover essere F normale a δP ; e poiché gli spostamenti virtuali di P avvengono nel piano tangente alla superficie, dovrà, per l'equilibrio, risultare F normale al piano tangente cioè alla superficie in questione.

10.5 *Equilibrio di un punto appoggiato ad un piano*

Applichiamo, ora, il principio dei lavori virtuali alla ricerca delle condizioni di equilibrio per un punto appoggiato ad un piano. Poiché, in questo caso, il vincolo cui è soggetto il punto è irreversibile, sarà tale anche ogni spostamento virtuale, δP , di quest'ultimo, e quindi, per il lavoro compiuto dalla forza F , applicata al punto, lungo tale spostamento, avremo

$$F \times \delta P \leq 0.$$

Siccome poi gli spostamenti possibili del punto sono quella sul piano tangente alla superficie od al disopra di questo, la relazione precedente ci dice dover essere F normale al piano tangente e diretta verso la superficie. Infatti, in tal caso, l'angolo formato dalle direzioni orientate della forza e dello spostamento è sempre eguale o maggiore di $\pi/2$, e quindi il lavoro risulta sempre negativo o nullo.

10.6 *Equilibrio di un corpo rigido avente un punto fisso*

Vediamo ora come mediante il principio dei lavori virtuali sia possibile stabilire le condizioni d'equilibrio per un corpo rigido libero. A tal uopo, scelta una terna cartesiana x, y, z , di riferimento, detti: P_1, P_2, \dots, P_n , gli n punti del sistema, indichiamo con $F_i \equiv (X_i, Y_i, Z_i)$ la forza direttamente applicata ad un punto generico P_i . Trattandosi di un sistema rigido libero

soggetto, quindi, al solo vincolo della rigidità che è un vincolo reversibile, sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze lungo ogni spostamento virtuale del sistema deve esser nullo. Consideriamo, dunque, uno spostamento traslatorio virtuale, δ_i , del sistema, parallelamente all'asse x ; avremo per il lavoro virtuale:

$$X_1\delta_1 + X_2\delta_2 + \dots + X_n\delta_n = 0 \quad (10.20)$$

ma per la supposta rigidità del sistema è:

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \dots \delta_n,$$

e quindi la (10.20) diviene:

$$\delta(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \delta R_x = 0,$$

ed essendosi scelto: $\delta \neq 0$, dovrà essere, necessariamente per l'equilibrio:

$$R_x = 0. \quad (R_x = \text{comp. } x \text{ del risultante delle forze})$$

Analogamente, considerando altri due spostamenti virtuali paralleli, rispettivamente, all'asse y ed all'asse z , otterremo:

$$R_y = 0 \quad \text{ed} \quad R_z = 0$$

e quindi, infine:

$$R = 0$$

che è una delle condizioni di equilibrio già in altro modo stabilita. Se ora facciamo subire al sistema una rotazione infinitesima ω attorno all'asse x , lo spostamento virtuale di un punto generico, P_i , ci è dato da:

$$\delta_i = \omega \wedge (P_i - O)$$

dove si è scelto come punto fisso di riferimento l'origine O delle coordinate. Essendo:

$$\omega, 0, 0,$$

le componenti, secondo i tre assi, della rotazione considerata, ed essendo:

$$x_i, y_i, z_i,$$

le componenti, secondo i medesimi tre assi, del vettore $(P_i - O)$; per le componenti di δ_i , avremo:

$$\delta_{i,x} = 0, \quad \delta_{i,y} = -\omega z_i, \quad \delta_{i,z} = \omega y_i.$$

Per il lavoro compiuto, durante lo spostamento considerato, dalla forza F_i agente sul punto, risulterà quindi l'espressione:

$$L = -\omega z_i Y_i + \omega y_i Z_i = \omega(y_i Z_i - z_i Y_i).$$

Facendo il sommatorio da 1 a n , dell'espressione precedente otterremo l'espressione del lavoro compiuto dalle forze del sistema, durante la rotazione di questo attorno all'asse x :

$$L = \omega \sum_1^n (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

Se il sistema è in equilibrio, il principio dei lavori virtuali ci dice che la precedente espressione deve annullarsi; deve, cioè, essere:

$$\omega [(y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2 + \dots + y_n Z_n - z_n Y_n)] = 0,$$

ed essendosi scelto: $\omega \neq 0$, deve necessariamente risultare:

$$(y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2 + \dots + y_n Z_n - z_n Y_n) = 0$$

Si riconosce immediatamente come quest'ultima espressione non sia altro che la componente secondo x del momento totale \mathfrak{M} delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto ad O . Sarà, cioè, nel caso dell'equilibrio:

$$\mathfrak{M}_x = 0$$

Analogamente, considerando altre due rotazioni del sistema, l'una attorno all'asse y e l'altra attorno all'asse z , avremo:

$$\mathfrak{M}_y = 0, \quad \mathfrak{M}_z = 0,$$

cioè, infine:

$$\mathfrak{M} = 0$$

Anche questa condizione era stata, per altra via, già stabilita.

Più brevemente, sempre applicando il principio dei lavori virtuali, si arrivano a stabilire le condizioni dell'equilibrio di un corpo rigido libero, quando si riguardi il moto di esso come risultato di due moti, uno traslatorio del centro, G , di gravità, l'altro rotatorio del corpo attorno ad un asse istantaneo passante per G . In tal caso, infatti, l'espressione del lavoro, dL , compiuto dalle forze applicate al sistema durante uno spostamento infinitesimo di durata dt , è:

$$dL = [(V_G \times R) + (\omega \times \mathfrak{M})] dt; \quad (10.21)$$

scegliendo quindi due spostamenti virtuali, uno δG del centro di gravità, l'altro $\delta\omega$ rotatorio del sistema attorno ad un asse istantaneo passante per G , la (10.21) diventa (essendo: $\delta G = V_G dt$, e: $\delta\omega = \omega dt$):

$$dL = (\delta G \times R) + (\delta\omega \times \mathfrak{M}),$$

e dovendo, per l'equilibrio, essere: $dL = 0$, per qualsiasi spostamento virtuale reversibile del sistema; essendo δG e $\delta\omega$ arbitrarii, risulta necessariamente:

$$R = 0 \quad \text{ed} \quad \mathfrak{M} = 0.$$

10.7 Equilibrio di un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso

Come caso particolare di quello ora considerato, si possono stabilire le condizioni di equilibrio per un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso. In questo caso, evidentemente, i soli spostamenti possibili del sistema, sono quelli di rotazione attorno ad un asse istantaneo passante per il punto fisso. Considerando, dunque, uno spostamento rotatorio $\delta\omega$ del sistema, per l'equilibrio risulterà:

$$\mathfrak{M}_O = 0,$$

cioè dovrà annullarsi il momento totale delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto al punto fisso.

Nel caso, infine, di un corpo rigido con una retta fissa, considerando uno spostamento virtuale rotatorio del sistema attorno a questo, si troverebbe, come condizione per l'equilibrio, l'annullarsi del momento totale delle forze applicate al corpo, calcolato rispetto alla retta fissa.

10.8 Equilibrio della vite

A titolo d'esempio, applichiamo il principio dei lavori virtuali allo studio dell'equilibrio di una vite.

Notiamo, anzitutto, che, essendo la vite un sistema a vincoli reversibili, per l'equilibrio dovrà annullarsi il lavoro compiuto dalle forze agenti su di essa lungo qualsiasi spostamento virtuale. Indichiamo con P la potenza applicata tangenzialmente alla testa della vite, con b la distanza dal suo punto di applicazione (braccio) dell'asse, con Q , infine, la resistenza che si esercita nella direzione dell'asse medesimo. Facciamo, ora, ruotare la vite di un angolo infinitesimo θ (spostamento virtuale); il lavoro compiuto dalla P sarà

allora:

$$L_p = \theta bP.$$

Il lavoro negativo della Q ci sarà dato dal prodotto di essa per lo spostamento traslatorio x subito dalla vite per effetto della rotazione θ , spostamento che, noto il passo p , si ricava immediatamente dalla relazione:

$$2\pi : \theta = p : x,$$

da cui:

$$x = \frac{p\theta}{2\pi},$$

e quindi

$$L_Q = -Qx = -\frac{Qp\theta}{2\pi};$$

ed, infine, per il lavoro totale compiuto dalle forze applicate al sistema durante la rotazione θ , avremo:

$$L = L_p + L_Q = \theta bP - \frac{Qp\theta}{2\pi}.$$

Per l'equilibrio deve essere:

$$\theta bP - \frac{Qp\theta}{2\pi} = 0,$$

da cui, dividendo per θ , che si è scelto diverso da zero:

$$bP - \frac{Qp}{2\pi} = 0, \quad \text{ossia} \quad bP = \frac{Qp}{2\pi},$$

da cui, infine:

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{2\pi b},$$

che è la relazione già altrove stabilita per l'equilibrio della vite.

Un'osservazione d'indole generale riguardante il lavoro delle macchine semplici è che lo spostamento subito dal punto di applicazione della potenza nella direzione della forza, è tanto maggiore di quello del punto di applicazione della resistenza, quanto più grande è il vantaggio della macchina; il ché si potrebbe dedurre anche dalle equazioni di equilibrio delle varie macchine semplici, ma più semplicemente e generalmente si spiega applicando

il principio dei lavori virtuali. Infatti, detti δ_P e δ_Q , rispettivamente, gli spostamenti del punto di applicazione della potenza P e quello del punto di applicazione della resistenza Q , il principio dei lavori virtuali ci dice che, per l'equilibrio, deve essere:

$$P\delta_P - Q\delta_Q = 0, \quad \text{da cui} \quad P\delta_P = Q\delta_Q,$$

ed infine:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\delta_P}{\delta_Q}$$

10.9 Equilibrio del torchio idraulico

Applichiamo, ora, il principio dei lavori virtuali allo studio delle condizioni di equilibrio del torchio idraulico, macchina che, come è noto, è costituita da due recipienti cilindrici di differente sezione, entro cui scorrono due pistoni a perfetta tenuta di liquido. I due recipienti cilindrici comunicano tra loro mediante un tubo, e sono pieni di un liquido, che, generalmente, è l'acqua. Sul pistone di più piccola sezione si esercita la potenza, su quello di sezione maggiore la resistenza. Dette σ_1 e σ_2 , rispettivamente la sezione del piccolo e del grande pistone, consideriamo uno spostamento virtuale, δ_1 , del pistone piccolo e lo spostamento virtuale corrispondente, δ_2 , del pistone maggiore. Per la sua incompressibilità durante questo spostamento

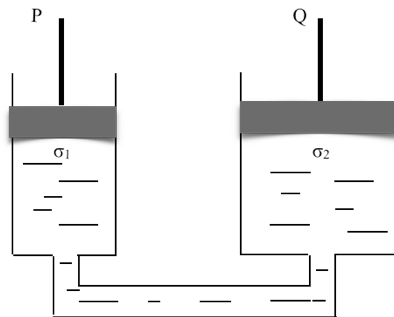


Figura 10.3: Il torchio idraulico

simultaneo dei due pistoni, il liquido serberà volume costante, quindi sarà:

$$\sigma_1\delta_1 = \sigma_2\delta_2,$$

da cui, per lo spostamento virtuale δ_2 del pistone maggiore, ricaviamo:

$$\delta_2 = \frac{\sigma_1 \delta_1}{\sigma_2}.$$

Ma, essendo il sistema a vincoli reversibili, per l'equilibrio dovrà essere:

$$P\delta_1 - Q\delta_2 = 0,$$

e sostituendo in quest'ultima espressione, il valore precedentemente ricavato per δ_2 , otteniamo:

$$P\delta_1 = Q \frac{\sigma_1 \delta_1}{\sigma_2},$$

e dividendo ambo i membri per δ_1 , che si è scelto diverso da zero:

$$P = Q \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

da cui, infine:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (10.22)$$

che è la condizione d'equilibrio cercata, e che conferma l'osservazione che abbiamo fatto relativamente agli spostamenti rispettivi del punto d'applicazione della potenza e del punto d'applicazione della resistenza, nelle macchine. Infatti, la relazione (10.22) ci dice che con un dato valore della potenza si fa equilibrio ad una resistenza tanto maggiore quanto è più piccolo σ_1 rispetto a σ_2 ; ma è evidente che, essendo il volume di liquido che esce dal pistone [1] eguale a quello che entra nel pistone [2], l'abbassamento del pistone [1] è tanto più grande dell'innalzamento del pistone [2] di quanto σ_1 è più piccola di σ_2 . Non è inutile notare che la condizione d'equilibrio del torchio idraulico si può stabilire anche applicando il principio di Pascal. Infatti, per esso, essendo uguale la pressione p , riferita all'unità di area, che il liquido esercita su σ_1 e σ_2 , avremo:

$$P = p\sigma_1 \quad \text{e} \quad Q = p\sigma_2,$$

da cui, dividendo:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

10.10 *Equilibrio di sistemi soggetti a forze che ammettono potenziale*

Le condizioni d'equilibrio dedotte dal principio dei lavori virtuali, ammettono forma più semplice se le forze agenti sul sistema ammettono potenziale. Se, dunque, U è il potenziale del sistema definito come somma dei potenziali dei suoi punti: se è pertanto:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

considerando uno spostamento virtuale del sistema, il lavoro virtuale compiuto dalle forze, lungo detto spostamento, ci sarà dato, senz'altro, dalla variazione del potenziale, quindi, se il sistema si trova in equilibrio, nell'ipotesi, però, che i vincoli cui è soggetto il sistema siano reversibili, dovrà essere:

$$dU = 0. \quad (10.23)$$

L'equazione precedente coincide con quella per la ricerca dei massimi e dei minimi della funzione U , ed ancora, come altrove è stato fatto, si potrebbe dimostrare che, se in una certa posizione, il potenziale presenta un massimo, e quindi l'energia potenziale presenta un minimo, quella posizione è di equilibrio stabile.

In particolare, se la forza agente sul sistema è la forza peso, il potenziale è allora quello gravitazionale dato da $-mgh$, dove h è l'altezza del centro di gravità del sistema, ed m ne è la massa. Quindi, per l'equilibrio di un sistema soggetto all'azione della gravità, la precedente funzione di h dovrà presentare un massimo od un minimo corrispondente ad un minimo o ad un massimo di h . Nel primo caso l'equilibrio sarà stabile, instabile nel secondo.

A titolo d'esempio proponiamoci di determinare le condizioni di equilibrio di una sbarra omogenea, di lunghezza l , ruotante, in un piano verticale, attorno ad un suo estremo A , e soggetta all'altro estremo ad una forza realizzata mediante una fune che passa su di una puleggia fissa situata sulla verticale per A , a distanza l dall'estremo cui è applicata la fune al cui estremo libero è appesa una massa m . Indichiamo con a la lunghezza della fune, con M la massa della sbarra, con G il centro di gravità di essa (per la supposta omogeneità della sbarra, G coinciderà col suo centro di figura); scegliamo, inoltre, l'asse z verticale e diretto verso l'alto di guisa che l'altezza del centro di gravità di m e quella del centro di gravità della sbarra, ci saranno date, rispettivamente, dalle quote z_m e z_M di essi. Per l'altezza z_0 del centro di gravità dell'intero sistema, applicando la formula che ci dà la coordinata z

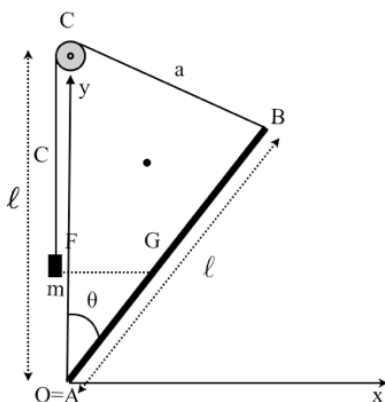


Figura 10.4: Equilibrio di una sbarra omogenea, di lunghezza ℓ , ruotante, in un piano verticale, attorno ad un suo estremo A , e soggetta all'altro estremo ad una forza realizzata mediante una fune che passa su di una puleggia fissa situata sulla verticale per A , a distanza ℓ dall'estremo cui è applicata la fune al cui estremo libero è appesa una massa m

del centro di gravità, avremo:

$$z_0 = \frac{z_M M + z_m m}{M + m}.$$

Il nostro problema si riduce, quindi, a determinare i minimi della precedente funzione che, trascurando $M + m$ che è costante, diventa:

$$H = z_M M + z_m m. \quad (10.24)$$

Osservando, ora, che la posizione del sistema è determinata quando sia dato l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale per A , proponiamoci di esprimere z_M e z_m in funzione di quest'unico parametro θ . Dal triangolo rettangolo AGF , si ricava per z_M il valore:

$$z_M = \frac{l}{2} \cos \theta \quad (10.25)$$

Quanto, poi, a z_m osserviamo che, detto d il tratto di fune compreso fra l'estremo, B , della sbarra e la puleggia, risulta:

$$d = 2l \sin \frac{\theta}{2},$$

ed allora, per la distanza c tra la puleggia ed il centro di gravità di m , avremo:

$$c = a - 2l \sin \frac{\theta}{2}, \quad (a = \overline{BC} + \overline{CD})$$

ed infine, per z_m :

$$z_m = l - a + 2l \sin \frac{\theta}{2}.$$

Ponendo, allora, nella (10.24), per z_m questo valore, e per z_M quello fornito dalla (10.25), risulta:

$$\begin{aligned} H &= M \frac{l}{2} \cos \theta + m(l - a + 2l \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= m(l - a) + 2lm \sin \frac{\theta}{2} + \frac{l}{2} M \cos \theta. \end{aligned}$$

Derivando questa espressione rispetto a θ ed eguagliando a zero, otteniamo:

$$\frac{dH}{d\theta} = lm \cos \frac{\theta}{2} - \frac{l}{2} M \sin \theta = 0,$$

ed esprimendo $\sin \theta$ in funzione del seno e del coseno dell'arco metà, e dividendo per l , otteniamo:

$$\frac{dH}{d\theta} = m \cos \frac{\theta}{2} - M \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

Una soluzione evidente della precedente equazione, è: $\cos \theta/2 = 0$, (che corrisponde a: $\theta = 180^\circ$). Dividendo la relazione precedente per $\cos \theta/2$, otteniamo:

$$\frac{m}{M} = \sin \frac{\theta}{2} \quad (10.26)$$

Quest'ultima soluzione è reale soltanto nel caso che sia:

$$m \leq M.$$

Per decidere se l'equilibrio è stabile od instabile, bisogna esaminare se H è minimo o massimo: a tal uopo, derivando ancora la H rispetto a θ , otteniamo:

$$\frac{d^2 H}{d\theta^2} = -\frac{lm}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{lM}{2} \cos \theta;$$

se sostituiamo, p.es., in questa espressione, per θ , il valore 180° , abbiamo:

$$\frac{d^2 H}{d\theta^2} = -\frac{lm}{2} + \frac{lM}{2} = \frac{l(M - m)}{2}.$$

Quest'espressione ha, evidentemente, il segno della differenza $M - m$. Si avrà, quindi, un minimo della funzione H , e, quindi, equilibrio stabile, per $M - m > 0$, cioè per $M > m$, un massimo, e, quindi, posizione di equilibrio instabile, per $M < m$. Per altri valori dell'argomento θ , si avranno altre posizioni di equilibrio, stabile o instabile a seconda dei casi.

Capitolo 11

ATTRITO

Se un corpo si muove su di una superficie, per il contatto tra il corpo e questa, si genera una forza, agente tra la superficie ed il corpo, che si oppone al moto di quest'ultimo e che vien detta: reazione d'attrito.

Per l'attrito vale una legge che, sebbene non rappresenti con correttezza il modo di svolgersi del fenomeno, dà un'idea sufficientemente approssimata di questo: la legge di Coulomb. Essa afferma che la reazione di attrito \mathcal{R}_a , è proporzionale alla pressione, P , che il corpo esercita sulla superficie, secondo un coefficiente d'attrito, f , dipendente dalla natura dei corpi in contatto. Traducendo in simboli la legge suaccennata, avremo:

$$\mathcal{R}_a = fP,$$

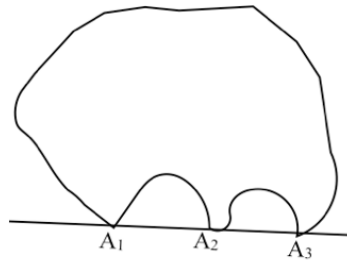


Figura 11.1: Un corpo appoggiato su tre punti.

dove f dovrebbe essere una costante, cosa che, in realtà non avviene, perché le più svariate condizioni vengono a complicare il fenomeno che, quindi, molto difficilmente si può rendere con esattezza. Dalla legge di Coulomb segue, inoltre, che la reazione d'attrito è indipendente dalla superficie d'appoggio del corpo. Consideriamo, infatti, ad esempio, un corpo che poggia per tre punti, A_1, A_2, A_3 , su di una superficie. Dette P_1, P_2, P_3 le corrispondenti pressioni e dette: $\mathcal{R}_{a,1}, \mathcal{R}_{a,2}, \mathcal{R}_{a,3}$, le reazioni d'attrito esercitate sui

tre punti dalla superficie, la pressione totale P , con cui il corpo preme su di essa, ci è data da:

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

e così, anche la reazione totale di attrito ci è data dalla somma:

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_{a,1} + \mathcal{R}_{a,2} + \mathcal{R}_{a,3};$$

ma essendo, per la legge di Coulomb:

$$\mathcal{R}_{a,1} = fP_1, \quad \mathcal{R}_{a,2} = fP_2, \quad \mathcal{R}_{a,3} = fP_3,$$

si ottiene:

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_{a,1} + \mathcal{R}_{a,2} + \mathcal{R}_{a,3} = fP_1 + fP_2 + fP_3 = f(P_1 + P_2 + P_3) = fP.$$

Si conclude, dunque, che la reazione d'attrito dipende unicamente dalla pressione totale con cui il corpo preme sulla superficie, e non dal numero di punti di appoggio.

11.1 *Equilibrio di un sistema soggetto alla reazione d'attrito*

Anche allo studio dell'equilibrio di un sistema soggetto all'attrito, si può applicare il principio dei lavori virtuali. Per l'equilibrio dovrà risultare negativo o nullo il lavoro compiuto, lungo ogni spostamento, delle forze applicate al sistema, forze d'attrito comprese.

Proponiamoci, a titolo d'esempio, di stabilire le condizioni d'equilibrio per una scala appoggiata ad un muro; sistema, questo, che potremo riguardare come costituito, idealmente, di un'unica sbarra omogenea che poggia, rispettivamente, coi suoi due estremi, su di un piano verticale e su di un piano orizzontale. Scegliamo come assi x ed y le intersezioni dei due piani suaccennati col piano verticale passante per la sbarra. Indichiamo con P_1 e P_2 le pressioni che la sbarra esercita sui piani d'appoggio; con \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 le corrispondenti reazioni d'attrito; con ℓ la lunghezza della sbarra, con G il suo centro di gravità, ed, infine, indichiamo con θ l'angolo compreso fra l'asse y e la sbarra. Consideriamo uno spostamento virtuale della sbarra, tale che l'angolo θ che essa forma con l'asse y , subisca l'incremento infinitesimo positivo $d\theta$. Il lavoro compiuto dal peso della sbarra ci è dato dal peso stesso moltiplicato per l'abbassamento del centro di gravità, G . L'abbassamento di G , essendo l'altezza di esso (coincidente con l'ordinata, per la scelta fatta degli assi) data da

$$y_G = \frac{\ell}{2} \cos\theta,$$

si ottiene differenziando questa espressione; risulta cioè:

$$dy_G = -\frac{\ell}{2} \sin\theta d\theta.$$

quindi il lavoro compiuto dal centro di gravità nell'abbassamento è dato da:

$$L_G = \frac{\ell}{2} p \sin\theta d\theta,$$

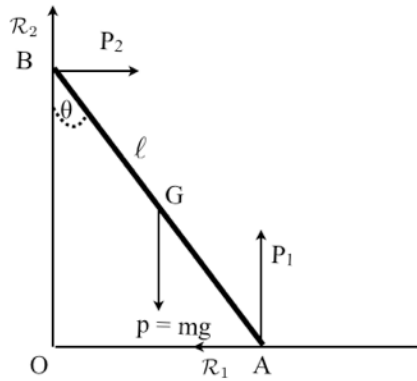


Figura 11.2: L'esempio della scala appoggiata al muro.

lavoro che abbiamo preso col segno + perché, evidentemente, il peso p , abbassandosi, compie lavoro positivo.

Osserviamo, ora, che le distanze \overline{OA} ed \overline{OB} tra l'origine ed i punti d'applicazione delle reazioni d'attrito \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , ci sono date, rispettivamente da:

$$\overline{OA} = \ell \sin\theta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \ell \cos\theta,$$

notiamo che, mentre la scala ruota di $d\theta$, le distanze suddette subiscono gli incrementi rispettivi:

$$\ell \cos\theta d\theta \quad \text{e} \quad -\ell \sin\theta d\theta,$$

ed allora per il lavoro di \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , si avranno le espressioni

$$L_{\mathcal{R}_1} = -\mathcal{R}_1 \ell \cos\theta d\theta \quad \text{e} \quad L_{\mathcal{R}_2} = -\mathcal{R}_2 \ell \sin\theta d\theta,$$

prese ambedue col segno – perché le reazioni si attrito compiono, evidentemente, lavoro negativo. È superfluo notare, infine, che le pressioni P_1 e P_2 non compiono lavoro essendo esse normali, nei rispettivi punti di applicazione, alla direzione degli spostamenti di questi. Il lavoro virtuale deve risultare negativo o nullo, deve cioè essere:

$$\frac{\ell}{2} p \sin \theta d\theta - \mathcal{R}_1 \ell \cos \theta d\theta - \mathcal{R}_2 \ell \sin \theta d\theta \leq 0.$$

Vediamo, ora, di determinare \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 . Per l'equilibrio dovrà annullarsi il risultante R (e quindi le sue due componenti R_x ed R_y) delle cinque forze: $p, P_1, P_2, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, che agiscono sul sistema; troviamo allora le due condizioni:

$$R_x = P_2 - \mathcal{R}_1 = 0, \quad (11.1)$$

$$R_y = P_1 + \mathcal{R}_2 - p = 0. \quad (11.2)$$

cui potremo aggiungere altre due relazioni, forniteci dalla legge di Coulomb:

$$\mathcal{R}_1 = f P_1, \quad (11.3)$$

$$\mathcal{R}_2 = f P_2. \quad (11.4)$$

Abbiamo così, in tutto quattro equazioni nelle quattro incognite, P_1, P_2, \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , per le quali troviamo i valori:

$$P_1 = \frac{p}{1+f^2}, \quad P_2 = \frac{fp}{1+f^2}, \quad \mathcal{R}_1 = \frac{fp}{1+f^2}, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{f^2 p}{1+f^2}.$$

Sostituendo, ora, nell'espressione del lavoro virtuale, per \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 i valori ora stabiliti, si ha:

$$\frac{\ell}{2} p \sin \theta d\theta - \frac{fp}{1+f^2} \ell \cos \theta d\theta - \frac{f^2 p}{1+f^2} \ell \sin \theta d\theta \leq 0$$

e dividendo per $\ell p d\theta$ che è una quantità positiva (perché è: $\ell > 0, p > 0$, e si è scelto $d\theta$ positivo):

$$\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{f}{1+f^2} \cos \theta - \frac{f^2}{1+f^2} \sin \theta \leq 0.$$

Risolviamo questa disequaglianza rispetto a θ , e, per far ciò, moltiplichiamo per $1+f^2$; avremo così:

$$\frac{1+f^2}{2} \sin \theta - f \cos \theta - f^2 \sin \theta \leq 0,$$

ovvero:

$$(1 - f^2) \sin \theta - 2f \cos \theta \leq 0,$$

ed infine:

$$(1 - f^2) \sin \theta \leq 2f \cos \theta,$$

e dividendo ambo i membri per $\cos \theta$:

$$(1 - f^2) \tan \theta \leq 2f,$$

da cui, infine si ottiene:

$$\tan \theta \leq \frac{2f}{1 - f^2}$$

che è la condizione cui deve soddisfare θ perché la scala stia in equilibrio.

11.2 Angolo d'attrito

Consideriamo un punto materiale poggiato su di un piano. A questo punto sia applicata una forza F . Vediamo a quali condizioni questa forza deve soddisfare perché il punto, soggetto ad essa ed alla reazione d'attrito, non scorra sul piano su cui è appoggiato. Detto θ l'angolo che la normale al piano forma con la forza F , la componente tangenziale, efficace per il moto del punto ci è data da $F \sin \theta$; la componente normale che ci rappresenta la pressione che il punto esercita sul piano, da: $F \cos \theta$, e quindi per la reazione d'attrito:

$$\mathcal{R} = fF \cos \theta.$$

Se il punto deve rimanere fermo, dovrà essere:

$$fF \cos \theta \geq F \sin \theta$$

e dividendo ambo i membri per $F \cos \theta$, otteniamo infine:

$$f \geq \tan \theta.$$

Occorre, cioè, affinché il punto non si muova sul piano, che l'angolo formato dalla direzione della forza con la normale al piano medesimo, sia tale che il valore della sua tangente risulti minore o, al più eguale al coefficiente d'attrito. Se, dunque, scegliamo un angolo φ tale che sia:

$$\tan \varphi = f,$$

e costruiamo un cono col vertice nel punto, avente per asse la normale al piano e per apertura l'angolo φ , per tutte le direzioni della forza comprese entro

questo cono, il punto non si muove. Un cono siffatto dicesi cono d'attrito. All'angolo d'attrito si può dare anche un altro significato. Se consideriamo in punto materiale appoggiato su di un piano inclinato, e soggetto all'azione del suo peso e della reazione d'attrito, vediamo come l'angolo φ sia il massimo compatibile con l'equilibrio del punto sul piano, che la direzione della forza peso (ossia la verticale) può formare con la normale alla lunghezza del piano inclinato. In altre parole, siccome l'angolo suddetto è uguale a quello d'inclinazione del piano, l'angolo di attrito ci rappresenta l'angolo di cui si deve inclinare un piano orizzontale, affinché un grave, poggiato su di esso, cominci a muoversi.

coordinate che son necessarie per individuare la posizione del sistema. Ad esempio, nel caso sopra considerato del punto mobile su di una linea, si può scegliere, come variabile, l'arco s di curva. Nel caso, poi, di un sistema rigido costituito, ad esempio, da due punti, P_1 e P_2 , sapendo che deve essere: $\overline{P_1P_2} = r = \text{cost.}$, espressione, questa, che, esplicitamente, ha la forma:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r^2, \quad (12.1)$$

poiché le sei coordinate sono legate tra loro da una relazione indipendente, per determinare la posizione dei due punti bastano solo cinque coordinate. Ad esempio, si potrebbero scegliere:

$$x_1, y_1, z_1, \quad \text{ed} \quad x_2, y_2,$$

potendosi ricavare z_2 dalla (12.1). Ma siccome la soluzione della nostra equazione, rispetto alla coordinata incognita è un po' complicata, è più opportuno introdurre dei nuovi parametri. Ad esempio, scegliamo come parametri le tre coordinate, x_1, y_1, z_1 , di P_1 , l'angolo θ che la retta $\overline{P_1P_2}$ forma con l'asse z , e l'angolo φ che un piano parallelo all'asse z ed a $\overline{P_1P_2}$ forma col piano zx . Indicando genericamente con $q_1, q_2, q_3, \dots, q_5$, questi cinque parametri, $x_1, y_1, z_1, \theta, \varphi$, che vengono detti coordinate generali del sistema, le coordinate di P_2 ci sono, allora, date dalle relazioni:

$$P_2 \equiv \begin{cases} x_2 = x_1 + r \sin \theta \cos \varphi = q_1 + r \sin q_4 \cos q_5 \\ y_2 = y_1 + r \sin \theta \sin \varphi = q_2 + r \sin q_4 \sin q_5 \\ z_2 = z_1 + r \cos \theta = q_3 + r \cos q_4 \end{cases}$$

In generale, dunque, chiamando coordinate generali gli f parametri indipendenti, in funzione dei quali vengono date le $3n$ coordinate del sistema, avremo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \dots &\dots\dots \\ z_n &= z_n(q_1, q_2, \dots, q_f). \end{aligned}$$

Se si conoscono le forze agenti sul sistema, date in funzione della posizione dei punti e, quindi, delle coordinate di questi, queste forze risulteranno, anch'esse, funzione delle f coordinate generali; avremo, perciò, per le loro componenti:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ Y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \dots &\dots\dots \\ Z_n &= z_n(q_1, q_2, \dots, q_f). \end{aligned}$$

Operata così l'introduzione delle coordinate generali, vediamo, ora, quale forma assuma il principio dei lavori virtuali. Consideriamo, dunque, una posizione del sistema in cui le coordinate generali abbiano i valori: q_1, q_2, \dots, q_f , e facciamo subire al sistema uno spostamento virtuale, dopo il quale le coordinate generali avranno assunto dei nuovi valori:

$$q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_f + \delta q_f,$$

dove le δq rappresentano le variazioni infinitesime delle coordinate generali, variazioni indipendenti tra loro. Calcoliamo, ora, il lavoro virtuale compiuto dalle forze agenti sul sistema, lungo lo spostamento considerato, e limitiamo le nostre considerazioni al solo punto P_1 . Per la componente x dello spostamento virtuale del nostro punto, avremo:

$$\delta x_1 = x_1(q_1 + \delta q_1, \dots, q_f + \delta q_f) - x_1(q_1, \dots, q_f),$$

ma, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'incremento della funzione è uguale al differenziale totale della stessa; avremo perciò:

$$\left. \begin{array}{l} \delta x_1 \\ \text{ed analogamente} \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_n \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial q_f} \delta q_f \\ = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial q_f} \delta q_f \\ \dots \\ = \frac{\partial x_n}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial q_f} \delta q_f \end{array} \right\} \quad (12.2)$$

Espressioni analoghe si avranno quando si considerino le componenti y e z dello spostamento virtuale.

Per il lavoro virtuale compiuto dalla forza F_i sul punto P_i , lungo lo spostamento virtuale di questo, avremo:

$$dL_i = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i,$$

e, sostituendo per $\delta x_i, \delta y_i$ e δz_i , i valori forniti dalle (12.2):

$$\begin{aligned} dL_i &= \delta q_1 \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots \\ &+ \delta q_f \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_f} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \right), \end{aligned}$$

ed infine, eseguendo il sommatorio esteso agli n punti del sistema, per il lavoro virtuale compiuto dalle forze agenti sul sistema, avremo:

$$dL = \delta q_1 \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots \\ + \delta q_f \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_f} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \right). \quad (12.3)$$

Nel caso dell'equilibrio, questo lavoro virtuale deve annullarsi, deve, cioè, essere:

$$\delta q_1 \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots + \delta q_f \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_f} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \right) = 0.$$

Ma, essendo le variazioni delle f coordinate generali tra loro indipendenti, affinché si annulli l'espressione del lavoro virtuale, dovranno, necessariamente, esser nulli i coefficienti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) = 0 \\ \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_1^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_f} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Queste espressioni sono, tutte, funzioni delle q , e ci determinano con le rispettive soluzioni, i valori delle coordinate generali corrispondenti alle posizioni d'equilibrio del sistema. In particolare, se le forze ammettono potenziale, detto potenziale risulterà funzione della posizione dei punti del sistema e, quindi, delle coordinate generali q ; sarà dunque:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_f).$$

Ma, allora, il lavoro virtuale, compiuto dalle forze applicate al sistema, è uguale alla variazione infinitesima, δU , del potenziale, e quindi, nel caso dell'equilibrio, annullandosi il lavoro virtuale, si annullerà anche δU , ed avremo:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_f} \delta q_f = 0$$

e, ricordando che le δq sono tra loro indipendenti, dovrà essere:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial q_f} = 0.$$

Osserviamo che, mentre nel caso dei vincoli reversibili ed indipendenti dal tempo, il lavoro compiuto dalle reazioni vincolari sugli spostamenti reali, e quindi virtuali, del sistema era nullo, ciò non è più vero nel caso dei vincoli reversibili dipendenti dal tempo.

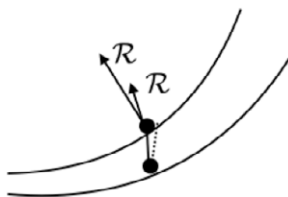


Figura 12.1: Punto vincolato a muoversi su una superficie mobile.

Infatti, ad esempio, nel caso di un punto vincolato a muoversi su di una superficie anch'essa mobile, lo spostamento reale del punto è la somma di due spostamenti: uno del punto stesso sulla superficie pensata come ferma, l'altro generato dal trascinarsi del punto nel moto della superficie. Come è facile riconoscere, il lavoro compiuto dalle reazioni dei vincoli reversibili sul punto, risulterà generalmente diverso da zero. Infatti (vedi figura), dato il moto del vincolo, generalmente la reazione vincolare non sarà normale agli spostamenti.

Riprendendo l'espressione del lavoro virtuale compiuto dalle forze direttamente applicate lungo uno spostamento virtuale del sistema, per semplicità di scrittura, indichiamo con x_i , genericamente, una delle $3n$ coordinate dei punti del sistema, con l'avvertenza che per: $1 \leq i \leq n$, x_i ci rappresenta le n coordinate x dei punti del sistema, per $n+1 \leq i \leq 2n$, le n coordinate y , e che per: $2n+1 \leq i \leq 3n$ infine, x_i ci rappresenta le n coordinate z ; e facciamo, inoltre, un'analogia convenzione per le componenti delle forze. Tenendo conto di ciò, l'espressione (12.3) del lavoro virtuale diviene, più semplicemente:

$$dL = \sum_1^{3n} X_i \delta x_i = \delta q_1 \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dots + \delta q_f \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f}.$$

Al solito, nel caso dell'equilibrio questa espressione deve annullarsi, e poiché le variazioni δq sono indipendenti tra loro, dovranno annullarsi i coefficienti-

ti:

$$\sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = 0, \quad \dots, \quad \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = 0. \quad (12.4)$$

Le (12.4) sono le equazioni generali dell'equilibrio di un sistema a vincoli reversibili.

12.2 Principio di D'Alembert

Vediamo, ora, come si possa ricondurre qualsiasi problema di dinamica ad un problema di statica. Considerando un punto materiale di massa m , soggetto ad una forza F , sappiamo che l'equazione di moto di un tal punto è:

$$F = mA,$$

equazione che, identicamente, si può scrivere:

$$F - mA = 0, \quad \text{e:} \quad F + (-mA) = 0. \quad (12.5)$$

Quest'ultima relazione ci dice che è nulla la somma (risultante) della forza F direttamente applicata, e di un vettore dato dal prodotto negativo della massa per l'accelerazione del punto. Se ora confrontiamo la (12.5) con l'equazione di equilibrio di un punto: $F = 0$, vediamo come un punto in moto si possa considerare alla stregua di un punto in equilibrio, quando si supponga applicata ad esso, oltre alla forza attiva F , un'altra forza, rappresentata dal vettore $-mA$, che D'Alembert chiama forza perduta o forza d'inerzia. Analoghe considerazioni si possono fare nel caso di un sistema di punti. Se, infatti, indichiamo con F_i la risultante di tutte le forze (comprese le reazioni vincolari) agenti su di un punto generico, P_i , del sistema, il punto P_i potrà considerarsi come libero, e si avrà dunque:

$$F_i = m_i A_i, \quad \text{oppure:} \quad F_i + (-m_i A_i) = 0.$$

Vediamo, dunque, che, anche in questo caso, se ai punti del sistema, oltre alle forze che su di essi effettivamente agiscono, fossero anche applicate le forze perdute, il sistema sarebbe in equilibrio. Ciò costituisce il principio di D'Alembert. Per trovare, dunque, le equazioni del moto di un sistema, basterà sostituire, nelle equazioni generali dell'equilibrio, in luogo delle forze direttamente applicate, la somma di tali forze e delle forze perdute; esse divengono (tenendo ancora conto delle semplificazioni di scrittura

adottate):

$$\sum_1^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = 0, \quad \dots, \quad \sum_1^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = 0.$$

ovvero, in forma equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \sum_1^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \\ \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} = \sum_1^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = \sum_1^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \end{array} \right.$$

Le equazioni soprascritte son dette: equazioni di D'Alembert. Abbiamo così f equazioni differenziali, del secondo ordine rispetto alle q , che ci forniranno i valori delle coordinate dei punti del sistema. Questi valori ci verranno dati in funzione delle q e di $2f$ costanti arbitrarie, costanti che potranno esser determinate quando, al solito, siano date $2f$ condizioni.

A titolo d'esempio, consideriamo il moto piano di una sbarra rigida di lunghezza l . Supponiamo la massa della sbarra concentrata nei due estremi, P_1 e P_2 , di essa. Cominciamo a stabilire le coordinate generali. Possiamo, p.es., scegliere come coordinate generali (q_1, q_2, q_3) le coordinate cartesiane, x_1 ed y_1 , di P_1 , e l'angolo θ , che la sbarra fa con l'asse x . Le coordinate x_2 ed y_2 di P_2 ci son date dalle espressioni:

$$x_2 = x_1 + l \cos \theta = q_1 + l \cos q_3; \quad y_2 = y_1 + l \sin \theta = q_2 + l \sin q_3,$$

e quindi, per le componenti x ed y dell'accelerazione di P_2 , derivando due volte le precedenti, otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_2 = \ddot{q}_1 - l \cos q_3 \dot{q}_3^2 - l \sin q_3 \ddot{q}_3 \\ \ddot{y}_2 = \ddot{q}_2 - l \sin q_3 \dot{q}_3^2 + l \cos q_3 \ddot{q}_3 \end{array} \right.$$

Sostituendo, quindi, nei secondi membri delle equazioni di D'Alembert (in questo caso 2), per \ddot{x} ed \ddot{y} , i precedenti valori, ed esprimendo in funzione delle coordinate generali le forze che compaiono a primo membro, si ottengono le equazioni del moto piano di una sbarra rigida.

12.3 Equazioni di Lagrangia

Il procedimento sopra indicato per ricavare le equazioni del moto di un sistema, è, talora, assai complicato ad usarsi; si preferisce, perciò, servirsi di altre equazioni, che si ricavano da quelle di D'Alembert, le equazioni di Lagrangia.

Riprendendo l'espressione del lavoro virtuale compiuto dalle forze sul sistema:

$$dL = \delta q_1 \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dots + \delta q_f \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f},$$

se consideriamo un particolare spostamento virtuale che faccia variare la sola coordinata q_1 , lasciando invariate le altre, detta δq_1 la variazione da essa subita, poiché, dopo lo spostamento virtuale suddetto, risulta:

$$q_1 + \delta q_1, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_f = 0,$$

l'espressione precedente del lavoro virtuale si riduce a:

$$dL_1 = \delta q_1 \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1}. \quad (12.6)$$

Analogamente, considerando degli altri spostamenti virtuali tali da far variare, ad una ad una, le altre $f - 1$ coordinate generali, otteniamo:

$$dL_2 = \delta q_2 \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \dots, \quad dL_f = \delta q_f \sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f}. \quad (12.7)$$

Si riconosce, ora, immediatamente, che le soprascritte espressioni non sono altro che i primi membri delle equazioni di D'Alembert. Indicando, per brevità, con Q_k la quantità:

$$\sum_1^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

le (12.6) (12.7) precedenti divengono:

$$dL_1 = \delta q_1 Q_1, \dots, \quad dL_f = \delta q_f Q_f. \quad (12.8)$$

Il vettore Q_k dicesi forza Lagrangiana. La forza Lagrangiana Q_k risulta, in generale, dall'espressione:

$$Q_k = \frac{dL_k}{dq_k}.$$

Supponiamo, nuovamente, che lo spostamento virtuale del sistema sia tale da far variare contemporaneamente tutte le coordinate generali; l'espressione del lavoro virtuale assume, allora, la forma:

$$dL = \delta q_1 Q_1 + \delta q_2 Q_2 + \cdots + \delta q_f Q_f.$$

Ma se il campo di forze considerato ammette potenziale, il tutto si semplifica notevolmente. Infatti, in tal caso il lavoro virtuale, dL , è uguale alla variazione infinitesima, δU , del potenziale, e, poiché U è funzione della posizione del sistema e, quindi, delle f coordinate generali, l'incremento di esso è, salvo infinitesimi di ordine superiore, eguale al differenziale totale della funzione che lo rappresenta; quindi potremo porre:

$$dL = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_f} \delta q_f.$$

Confrontando quest'espressione con la (12.8), poiché entrambe debbono rappresentare lo stesso lavoro virtuale, risulta:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}; \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad Q_f = \frac{\partial U}{\partial q_f}; \quad (12.9)$$

Possiamo, ora, trasformare i secondi membri delle equazioni di D'Alembert. Indicando con T la forza viva del sistema, ci proponiamo di dimostrare che è:

$$\sum_1^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1}$$

Stabiliamo, dapprima, due formule che ci permetteranno di provare il nostro asserto. A tal uopo, poiché sappiamo che è:

$$x_i = x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_f),$$

derivando rispetto al tempo, troviamo:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \dot{q}_f,$$

\dot{x}_i ci è data, cioè, in funzione di t , delle q e delle \dot{q} . Di qui si riconosce che anche la forza viva sarà funzione del tempo, delle coordinate generali e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Derivando, poi, \dot{x}_i rispetto a \dot{q}_1 , troviamo l'identità:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}; \quad (12.10)$$

e derivando \dot{x}_i rispetto a q_1 , abbiamo ancora:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_f \partial q_1} \dot{q}_f.$$

Se ora deriviamo $\partial x_i / \partial q_1$, totalmente, rispetto al tempo, troviamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_f \partial q_1} \dot{q}_f,$$

e confrontando questa eguaglianza con la precedente, si trova:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} \quad (12.11)$$

Tenendo conto delle formule (12.10) e (12.11), possiamo ora provare il nostro asserto. Notando che è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_1^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_1} \sum_1^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \\ &= \frac{d}{dt} \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} - \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

e sostituendo per $\partial \dot{x}_i / \partial q_1$, il valore fornito dalla (12.11), otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} - \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1},$$

e, infine, sostituendo per $\partial \dot{x}_i / \partial q_1$, il valore fornito dalla (12.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} - \sum_1^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \\ &= \sum_1^{3n} m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \\ &= \sum_1^{3n} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \\ &= \sum_1^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

il che, per l'appunto, volevamo dimostrare.

Perciò le equazioni di D'Alembert, per il moto di un sistema avente f gradi di libertà, si trasformano nelle cosiddette equazioni di Lagrangia:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = Q_f. \quad (12.12)$$

Per ottenere le equazioni di Lagrangia, bisogna esprimere, anzitutto, la forza viva, T , del sistema in funzione del tempo, delle f coordinate generali e delle loro derivate prime rispetto al tempo.

Si osservi, a tal uopo, che, essendo \dot{x}_i funzione lineare delle q e delle \dot{q} , la forza viva risulterà funzione quadratica delle stesse; se nella funzione che rappresenta \dot{x}_i compare anche il tempo, allora la T è una forma quadratica completa nelle q e nelle \dot{q} ; se, invece, il tempo non compare, scompaiono evidentemente i termini contenenti le \dot{q} al grado primo e da quello zero, e la forza viva diventa una forma omogenea delle \dot{q} , i cui coefficienti sono, in generale delle funzioni qualunque delle q . Si noti infine che, se le forze del campo ammettono potenziale, i secondi membri Q_1, Q_2, \dots, Q_f , delle equazioni di Lagrangia divengono, rispettivamente:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_f}, \text{ vedi (12.9)}$$

ed allora le suddette equazioni assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = \frac{\partial U}{\partial q_f}.$$

Esempi.

I) Proponiamoci di stabilire le equazioni di Lagrangia nel caso particolare del moto di una sbarra rigida lanciata in un piano verticale (x, y) . Sia la sbarra omogenea, e coincida, quindi, il centro, G , di gravità col centro di figura. Scegliamo, come coordinate generali, le coordinate, x_0 ed y_0 , di G , e l'angolo θ che la sbarra fa con l'asse x , orizzontale. Essendo la sbarra soggetta alla forza peso, per il potenziale di quest'ultima, avremo:

$$U = -gmh = -gmy_0,$$

dove m è la massa della sbarra. Anzitutto le forze Lagrangiane ci sono date dalle derivate parziali, rispetto alle coordinate generali, di U , derivate parziali che, in questo caso, si riducono ad una sola, quella rispetto ad y_0 che è:

$$-gm.$$

Passiamo, ora, a calcolare la forza viva, T , del sistema. Osserviamo che si tratta del moto di un sistema rigido, e che, quindi, il moto di esso è il risultato di un moto traslatorio con la velocità del centro di gravità, e di un moto rotatorio attorno ad un asse passante per G , avremo:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2,$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra, e passante per G . Poiché il nostro sistema ha tre gradi di libertà, le equazioni di Lagrangia saranno tre, e precisamente:

$$m\ddot{x}_0 = 0 \quad (12.13)$$

$$m\ddot{y}_0 = -gm \quad (12.14)$$

$$I\ddot{\theta} = 0 \quad (12.15)$$

La (12.15) ci dice che la sbarra ruota uniformemente attorno al centro di gravità, mentre la (12.13) e la (12.14) ci dicono che il centro di gravità descrive una parabola nel piano x, y .

II) Applichiamo, ora, le equazioni Lagrangiane allo studio del moto di un punto materiale, vincolato a scorrere su di una retta che, a sua volta, ruoti con velocità angolare costante attorno ad un asse, verticale ad essa incidente, descriva, cioè, nello spazio, un cono circolare. Il vincolo è, quindi, indipendente dal tempo. È evidente, inoltre, che il sistema ha un sol grado di libertà. Indichiamo con ω la velocità angolare della retta, con m la massa del punto, con θ l'angolo costante che la retta forma con l'asse, con q , infine, la distanza variabile del punto materiale dal punto d'incidenza, O , della retta con l'asse. Essendo il punto soggetto alla forza peso, il potenziale ci è dato da

$$U = -mg \cos \theta,$$

contandosi le altezze da un piano orizzontale passante per O .

Quanto, poi, alla forza viva del punto, osserviamo che la velocità, V , di esso, è la somma di due velocità, una di traslazione sulla retta, l'altra di rotazione intorno all'asse ω , e siccome queste due velocità sono tra loro perpendicolari, il quadrato di V sarà dato, senz'altro, dalla somma dei quadrati delle componenti; quindi, siccome la velocità traslatoria sulla retta è data da \dot{q} , quella rotatoria da $\omega q \sin \theta$, avremo:

$$V^2 = \dot{q}^2 + \omega^2 q^2 \sin^2 \theta,$$

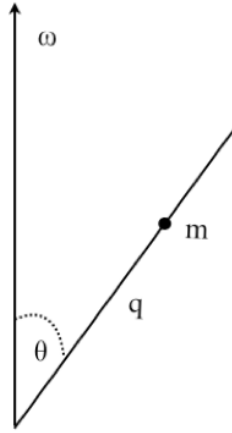


Figura 12.2: Punto vincolato a muoversi su di una retta ruotante con velocità angolare ω .

e quindi, per la forza viva T :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \sin^2 \theta.$$

Avremo una sola equazione di Lagrangia, perché il sistema ha un sol grado di libertà, e precisamente:

$$m\ddot{q} - m\omega^2 q \sin^2 \theta = -mg \cos \theta,$$

e dividendo per m

$$\ddot{q} - \omega^2 q \sin^2 \theta = -g \cos \theta.$$

Abbiamo, così, un'equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea. Al solito, per integrarla, dovremo aggiungere ad un integrale particolare dell'equazione suddetta l'integrale generale dell'equazione resa omogenea. Un integrale particolare dell'equazione non omogenea è, evidentemente:

$$q^* = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

Per ricavare l'integrale generale dell'equazione resa omogenea:

$$\ddot{q} - \omega^2 q \sin^2 \theta = 0, \quad (12.16)$$

ponendo: $q = e^{\alpha t}$, ricaviamo: $\dot{q} = \alpha e^{\alpha t}$, $\ddot{q} = \alpha^2 e^{\alpha t}$, sostituendo nella (12.16) questi valori:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} - \omega^2 \sin^2 \theta e^{\alpha t} = 0$$

e dividendo per $e^{\alpha t}$:

$$\alpha^2 - \omega^2 \sin^2 \theta = 0,$$

cioè:

$$\alpha^2 = \omega^2 \sin^2 \theta,$$

ed infine:

$$\alpha = \pm \omega \sin \theta$$

Due integrali particolari, q_1 e q_2 , dell'equazione resa omogenea, sono allora:

$$q_1 = e^{t\omega \sin \theta}, \quad q_2 = e^{-t\omega \sin \theta}.$$

Facendo una combinazione lineare di questi, otteniamo l'integrale generale dell'equazione:

$$q = Ae^{t\omega \sin \theta} + Be^{-t\omega \sin \theta},$$

e, finalmente, aggiungendo a questo integrale generale l'integrale particolare, q^* , dell'equazione non omogenea, otteniamo l'integrale generale di quest'ultima:

$$q = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} + Ae^{t\omega \sin \theta} + Be^{-t\omega \sin \theta}.$$

Poiché A e B sono delle costanti arbitrarie, se è: $A = B = 0$, si ricava dalla precedente espressione:

$$q = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}.$$

Se si pone, cioè, il punto ad una distanza, da O , data dalla precedente espressione, esso vi rimane e si trova in una posizione di equilibrio relativo. Se, invece, le due costanti non si annullano insieme, ma è, p.es., $A = 0$ e $B \neq 0$, allora l'integrale generale della nostra equazione diviene:

$$q = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} + Be^{-t\omega \sin \theta},$$

relazione, questa, che ci dice come il punto materiale, al crescere indefinitamente di t , tenda asintoticamente alla posizione d'equilibrio relativo sopra considerata: se è, invece, $A \neq 0$ e $B = 0$, la distanza del punto da O cresce indefinitamente al crescere del tempo.

III) Applichiamo ancora le equazioni di Lagrangia allo studio del moto di un punto vincolato a muoversi su di una parabola ruotante attorno al suo asse, posto verticalmente, che scegliamo per asse delle ordinate, con velocità angolare costante ω . Questo sistema ha, evidentemente, un sol

grado di libertà. Indicando con q la distanza del punto materiale dall'asse y , per l'ordinata del punto avremo:

$$y = aq^2$$

dove a è una costante (l'equazione della nostra curva che è una parabola è, per l'appunto: $y = aq^2$). Il potenziale della forza peso, agente sul mobile, è dato da:

$$U = -mgaq^2,$$

contandosi le altezze a partire da un piano orizzontale passante per il vertice della parabola. Quanto all'espressione della forza viva, essa si può scomporre in due termini, l'uno dovuto alla velocità di trascinamento ωq del punto, l'altro alla velocità relativa dello stesso, la quale ultima si scinde nelle componenti \dot{q} e $2aq\dot{q}$; si avrà, quindi:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + 4a^2q^2\dot{q}^2 + \omega^2q^2).$$

L'equazione Lagrangiana, quando, per semplicità, si ponga $m = 1$, ci è data da:

$$\ddot{q} + 4a^2q^2\ddot{q} + 4a^2q^2\dot{q}^2 + (2ga - \omega^2)q = 0.$$

Questa equazione è di integrazione assai complicata. Senza, tuttavia, bisogno di integrarla, possiamo ricercare e esistono posizioni di equilibrio relativo. Poniamo, a tal uopo, nella precedente: $q = \text{cost.}$, e quindi: $\dot{q} = \ddot{q} = 0$; essa diventa:

$$(2ga - \omega^2)q = 0.$$

Da questa si ricava: $q = 0$, nel qual caso il punto si trova nel vertice), oppure $2ga - \omega^2 = 0$, da cui:

$$\omega = \sqrt{2ga}$$

Per un valore di ω che soddisfi a quest'ultima relazione, tutti i punti della parabola sono posizioni di equilibrio relativo.

Teorema delle forze vive, dedotto dalle equazioni di Lagrangia. Riprendendo le equazioni di Lagrangia per un sistema a f gradi di libertà a vincoli indipendenti dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = Q_f$$

moltiplichiamole, rispettivamente, per dq_1, dq_2, \dots, dq_f , e sommiamole membro a membro. Otterremo:

$$dq_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + dq_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - dq_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - dq_f \frac{\partial T}{\partial q_f} = dq_1 Q_1 + \dots + dq_f Q_f$$

Si riconosce immediatamente come il secondo membro della precedente coincida coll'espressione del lavoro, dL , compiuto dalle forze agenti sul sistema; sarà quindi:

$$dq_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + dq_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - dq_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - dq_f \frac{\partial T}{\partial q_f} = dL$$

ed ancora, dividendo ambo i membri per dt :

$$\frac{dq_1}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \frac{dq_f}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{dq_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \frac{dq_f}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_f} = \frac{dL}{dt}$$

ovvero:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f}$$

e identicamente:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \right) - \ddot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \ddot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f} - \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f} \quad (12.17)$$

Osserviamo ora che, per l'ipotesi fatta che i vincoli siano indipendenti dal tempo, la forza viva è una forma quadratica omogenea delle \dot{q} , e quindi, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, abbiamo:

$$2T = \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f}.$$

D'altra parte, T è una funzione delle q e delle \dot{q} , in cui il tempo non figura esplicitamente; avremo dunque:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_f} \dot{q}_f + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \ddot{q}_f.$$

Per mezzo di queste due relazioni, la (12.17) diventa:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

cioè:

$$dL = dT,$$

ed integrando tra due tempi, t_1 e t_2 , otteniamo:

$$L_{1,2} = T_2 - T_1.$$

Quest'ultima relazione esprime appunto il teorema delle forze vive.

Capitolo 13

IDROMECCANICA

Premettiamo, anzitutto, alcune brevi considerazioni sulla pressione, valide sia nel caso dei solidi che nel caso dei liquidi. Se supponiamo di dividere, mediante una superficie ideale, un corpo qualsiasi in due parti, [1] e [2], queste eserciteranno reciprocamente, tra loro, delle forze, ad esempio attrattive (Newtoniane) etc.; ma oltre a queste, agiranno anche delle particolari forze che han luogo soltanto tra due elementi vicinissimi: queste forze danno origine alla pressione che ci proponiamo, ora, di studiare. A tal uopo, consideriamo un elemento $d\sigma$, della superficie di separazione. Vediamo che sull'elemento di [2], immediatamente a contatto con $d\sigma$, si esercita,

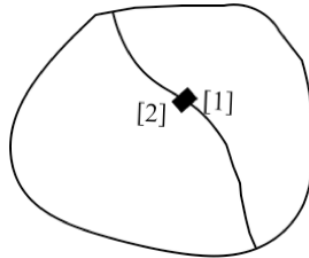


Figura 13.1: Un corpo suddiviso nelle due parti, [1] e [2].

per effetto del corrispondente elemento di [1], una forza infinitesima dF . Si definisce pressione, p , il rapporto:

$$p = \frac{dF}{d\sigma}. \quad (13.1)$$

Evidentemente, salvo il segno, il precedente rapporto ci dà anche la pressione che l'elemento di [2] esercita sull'elemento di [1]. Si noti, però, che dF non rappresenta soltanto la forza esercitata da un elemento di [1] sull'elemento di [2] in immediato contatto, bensì la risultante di tutte le forze esercitate dagli elementi contigui a quello, sempre dalla stessa parte della superficie di separazione. È importante notare che la pressione non è una

forza, bensì un rapporto tra una forza ed una superficie. Dalla (13.1) si ricava:

$$dF = p d\sigma.$$

La pressione che si esercita su un elemento del corpo si può scomporre in due componenti, l'una normale alla superficie di separazione (questa componente è quella che, volgarmente, dicesi pressione), p_n , l'altra parallela alla superficie medesima, p_τ , che vien detta pressione di scorrimento o sforzo di taglio, appunto perché tende a dividere [1] e [2] facendoli scorrere l'una sull'altra secondo la superficie di separazione. Quanto, poi, al segno di p_n , attribuiremo ad essa il segno positivo quando tende ad allontanare tra loro i due elementi cui si riferisce, negativo quando, invece, tende ad avvicinarli. In quest'ultimo caso vien detta pressione negativa o tensione.

In generale, su di un elemento di superficie interno al corpo, si eserciterà uno sforzo di taglio e una pressione normale. Si potrebbe dimostrare che per un punto qualsiasi del corpo passano tre giaciture (tra loro normali) tali che su di esse non si esercita sforzo di taglio, ma soltanto pressione normale, positiva o negativa. Le direzioni normali a queste tre giaciture diconsi: assi principali di pressione. Scegliendo tali assi principali di pressione come assi coordinati, consideriamo un elemento di superficie, $d\sigma$, di coseni direttori α, β e γ (la cui normale ha coseni direttori α, β e γ). Esso ed i tre triangoli rettangoli determinati sui tre piani coordinati, costituiranno un tetraedro che ha per base l'elemento $d\sigma$ stesso. Sulle tre facce di questo tetraedro si eserciteranno delle pressioni positive o negative, ed inoltre, su tutto il tetraedro si eserciteranno delle forze proporzionali al volume (e, quindi, alla massa), ma siccome il volume del tetraedro è un infinitesimo del terz'ordine, mentre l'area su cui agisce la pressione è infinitesima del secondo, si potranno trascurare le summenzionate forze di massa e tener soltanto conto delle pressioni. Per l'equilibrio del tetraedro occorrerà che si annullino le tre componenti, R_x, R_y, R_z , del risultante delle forze agenti su di esso. Per ipotesi le tre pressioni principali, p_1, p_2, p_3 , sono, rispettivamente, normali al piano coordinato yz , al coordinato xz , e al coordinato xy ; invece, la pressione che agisce su $d\sigma$ ha, generalmente, tutte le tre componenti, p_x, p_y, p_z . Per l'equilibrio dovrà, dunque, essere:

$$p_1 d\sigma_1 = p_x d\sigma, \quad p_2 d\sigma_2 = p_y d\sigma, \quad p_3 d\sigma_3 = p_z d\sigma,$$

ma, essendo:

$$d\sigma_1 = \alpha d\sigma, \quad d\sigma_2 = \beta d\sigma, \quad d\sigma_3 = \gamma d\sigma,$$

avremo:

$$p_1 \alpha d\sigma = p_x d\sigma, \quad p_2 \beta d\sigma = p_y d\sigma, \quad p_3 \gamma d\sigma = p_z d\sigma$$

cioè, infine:

$$p_1\alpha = p_x, \quad p_2\beta = p_y, \quad p_3\gamma = p_z.$$

Quest'ultime formule, quando siano note le tre pressioni principali p_1, p_2, p_3 , ci permettono di calcolare la pressione su di un elemento di superficie d'orientazione qualsiasi; per ottenere, poi, la pressione normale all'elemento di superficie considerato, moltiplicando ambo i membri delle formule precedenti, rispettivamente, per α, β, γ (coseni direttori della normale all'elemento di superficie) e sommando membro a membro, otteniamo:

$$p_n = \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z = \alpha^2 p_1 + \beta^2 p_2 + \gamma^2 p_3. \quad (13.2)$$

Passando, ora, all'esame dei fluidi, notiamo, anzitutto, che la proprietà caratteristica di essi è di non presentare alcuna resistenza allo sforzo di taglio; in essi non si ha, dunque, pressione di scorrimento, e la pressione si riduce alla sola componente normale. Mentre, in generale, scelto un punto qualsiasi di un corpo, per esso passano tre, e tre sole, giaciture sulle quali agisce solo la pressione normale, nel caso dei fluidi, invece, tutte le giaciture sono, come suol dirsi, principali, cioè soggette, sulla loro superficie, unicamente a pressione normale. Scelto, allora, un elemento di superficie qualsiasi, nell'interno di un fluido, di coseni direttori, α, β, γ , dette: p_x, p_y, p_z , le tre componenti della pressione p agente su di esso, se questa deve essergli perpendicolare, dovrà aversi:

$$p_x : p_y : p_z = \alpha : \beta : \gamma.$$

Ma le formule, stabilite precedentemente, ci danno in generale:

$$p_x = \alpha p_1, \quad p_y = \beta p_2, \quad p_z = \gamma p_3;$$

ed allora dalla (13.3), si deduce:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p, \quad (13.3)$$

e quindi:

$$p_x = \alpha p, \quad p_y = \beta p, \quad p_z = \gamma p,$$

ed infine, per la (13.2):

$$p_n = p(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = p.$$

È questa l'espressione del principio di Pascal: la pressione in un fluido è indipendente dall'orientazione.

Nel caso dei fluidi, poiché la pressione, qualunque sia la giacitura considerata, è sempre normale a questa ed ha valore costante, essa potrà darsi mediante una sola grandezza scalare. Considerando, dunque, un punto qualsiasi di un fluido, in esso la pressione sarà funzione della posizione, quindi potremo riguardare la pressione p come funzione delle coordinate del punto, cioè porre:

$$p = p(x, y, z).$$

Questo in quanto si considera lo stato di quiete dei fluidi, mentre, se se ne considerasse il moto, nella espressione precedente interverrebbe anche il tempo, si avrebbe cioè:

$$p = p(x, y, z, t).$$

13.1 Idrostatica

Per stabilire le equazioni fondamentali dell'idrostatica, scelta una terna cartesiana d'assi, x, y, z , consideriamo un parallelepipedo elementare di liquido di massa dm , avente gli spigoli dx, dy, dz paralleli, rispettivamente ai tre assi omonimi.

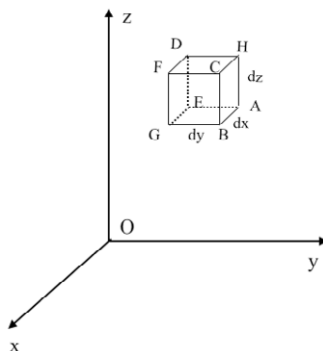


Figura 13.2: Parallelepipedo di spigoli dx, dy, dz .

Osserviamo, anzitutto, che in questo caso non si possono trascurare le forze di massa, perchè se è ben vero che esse sono infinitesime del terzo ordine, mentre le pressioni lo sono del secondo, esse non sono più trascurabili

in confronto alle pressioni cui è soggetto il parallelepipedo, perchè le due pressioni che si esercitano su due facce opposte del parallelepipedo, differiscono tra loro per infinitesimi (perchè ci si sposta di un tratto infinitesimo in seno al liquido) ed hanno segno contrario; perciò si neutralizzano in parte, a vicenda, nelle loro parti principali. La pressione p è una funzione, $p(x, y, z)$, delle coordinate del punto cui ci si riferisce. Indichiamo con X, Y, Z , le tre componenti del risultante delle forze esterne agenti sopra l'unità di massa del fluido, con ρ , infine, la densità del liquido.

Per l'equilibrio dell'elemento di liquido considerato, dovrà annullarsi il risultante di tutte le forze agenti su di esso, ossia le componenti del risultante medesimo secondo i tre assi. Le tre componenti del risultante delle forze di massa, ricordando che è: $dm = \rho dx dy dz$, ci sono date, rispettivamente, da:

$$X\rho dx dy dz, \quad Y\rho dx dy dz, \quad Z\rho dx dy dz.$$

Parallelamente all'asse x , il parallelepipedo è soggetto alla componente:

$$X\rho dx dy dz,$$

del risultante delle forze di massa, alla spinta che la pressione p esercita sulla faccia AD , di grandezza:

$$p dy dz,$$

a quella che la pressione esercita sulla faccia BF , data da

$$-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz.$$

In conclusione, la componente x di tutte le forze agenti sul parallelepipedo ci è data dalla somma:

$$X\rho dx dy dz + p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz,$$

che, nel caso dell'equilibrio, deve annullarsi:

$$X\rho dx dy dz + p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = 0$$

ovvero:

$$X\rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0,$$

da cui, dividendo per: $dx dy dz$, si ottiene:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

cioè, infine:

$$\rho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho Z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (13.4)$$

Queste sono le equazioni fondamentali dell'idrostatica.

Nelle considerazioni che seguono, ammetteremo che la densità, ρ , sia una funzione, $\rho(p)$, della pressione; vediamo allora quale particolare forma assumono le equazioni fondamentali dell'idrostatica. Introduciamo, perciò, una funzione $\psi(p) = \psi$, della pressione, definita nel modo seguente:

$$\psi = \int \frac{dp}{\rho} = \psi(p). \quad (13.5)$$

Questa funzione, nel caso dei liquidi, essendo la densità, ρ , indipendente dalla pressione, assume la forma:

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}.$$

Nel caso di gas che obbediscono alla legge di Boyle e Mariotte, essendo $\rho = kp$:

$$\psi = \int \frac{dp}{kp} = \frac{1}{k} \log p.$$

Siccome ψ è funzione della p , derivandola parzialmente, rispetto ad x , otteniamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

ma dalla (13.5) si ricava:

$$\frac{d\psi}{dp} = \frac{1}{\rho}, \quad \text{e quindi:} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ma dalla prima delle (13.4) si ricava:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X,$$

ed allora risulta:

$$X = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{ed analogamente} \quad Y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (13.6)$$

Concludendo: nel caso dell'equilibrio, le componenti del risultante delle forze di massa, devono essere eguali, rispettivamente alle tre derivate parziali della funzione ψ , rispetto ad x , y e z .

Di qui può dedursi che, per l'equilibrio è necessario che le forze di massa abbiano potenziale; sappiamo, infatti, che, solo in questo caso, le loro componenti si possono rappresentare come derivate parziali di una funzione delle coordinate. Infatti, ad esempio, nel caso della forza peso, immaginiamo che, p.es., in un recipiente contenente del liquido, solo una parte di quest'ultimo sia soggetto all'azione del peso: allora questa parte di liquido, cadendo in basso, costringerebbe la rimanente parte di liquido a salire verso l'alto, ed, evidentemente, in queste condizioni, non si potrebbe avere l'equilibrio. Se, dunque, il campo di forze ammette potenziale espresso in funzione, $\varphi(x, y, z) = \varphi$, delle coordinate del punto cui ci si riferisce, sappiamo allora che le componenti, X, Y, Z , del risultante delle forze esterne, riferito all'unità di massa, ci sono date, rispettivamente dalle tre derivate parziali del potenziale; sarà cioè:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

e quindi, per le (13.6)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

le quali ultime relazioni ci dicono come le due funzioni, φ e ψ , differiscano solo per una costante; sia cioè:

$$\psi = \varphi + \text{cost.}, \quad \text{ovvero, poichè è } \psi = \int \frac{dp}{\rho} :$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \varphi + \text{cost.}.$$

Se ne conclude, che se φ è una costante, è costante anche ψ , e, quindi, le superfici su cui φ ha un medesimo valore (equipotenziati), sono tali che anche ψ ha su di esse uno stesso valore, ha, cioè, uno stesso valore la pressione. In altre parole, le superfici equipotenziati coincidono con le superfici isobariche. In particolare, nel caso del peso, siccome le superfici equipotenziati sono costituite da piani orizzontali, anche le superfici isobariche saranno tali; e siccome sappiamo che le superfici equipotenziati sono normali alla forze, possiamo concludere che la superficie libera di un fluido, che, evidentemente è una superficie isobarica, è normale alla direzione della forza che agisce sul liquido in questione.

Esempio Come applicazione, proponiamoci di stabilire l'equazione della superficie libera di un liquido contenuto in un recipiente cilindrico che ruoti, con velocità costante ω , attorno al proprio asse verticale, che scegliamo come asse delle ordinate, scegliendo, inoltre, come asse x , il raggio del cilindro medesimo. Un elemento qualsiasi di liquido, di massa unitaria, può considerarsi come in equilibrio relativo purché lo si riguardi come soggetto alla forze centrifuga, $\omega^2 x$, diretta secondo la normale all'asse di rotazione, passante per l'elemento in parola, ed alla forza peso data da $-g$.

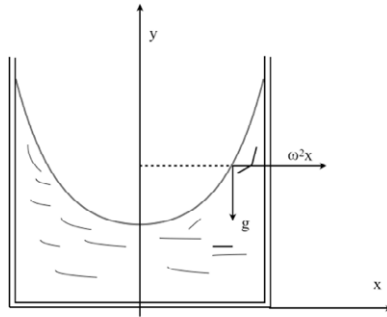


Figura 13.3: Superficie libera di un liquido contenuto in un recipiente cilindrico che ruoti, con velocità costante ω , attorno al proprio asse verticale nelle due parti

Siccome la forza centrifuga si esercita nella direzione dell'asse x , la forza peso nella direzione dell'asse y , la forza totale agente sull'elemento considerato, ha le componenti:

$$X = \omega^2 x, \quad Y = -g,$$

e il potenziale risulta quindi:

$$\varphi = \frac{\omega^2 x^2}{2} - gy$$

(infatti, derivando i due termini a secondo membro, rispettivamente, rispetto ad x ed ad y , si ritroverebbero le espressioni delle forze di partenza). La superficie libera del liquido, deve essere una superficie equipotenziale, deve, cioè, su di essa essere: $\varphi = \text{cost.}$, ossia

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} - gy = \text{cost.},$$

equazione, questa, che rappresenta, manifestamente, una parabola nel piano xy . Abbiamo fatto queste considerazioni, riferendosi ad una sezione verticale qualsiasi passante per l'asse del recipiente. Possiamo, perciò, concludere che la superficie libera del liquido, assume la forma di un paraboloido di rotazione.

13.2 Idrodinamica

Applicando, alle equazioni fondamentali dell'idrostatica, il principio di D'Alembert, si ottengono le equazioni fondamentali dell'idrodinamica. A tal uopo, sostituendo al risultante delle forze di massa agenti sul liquido (espresso mediante le sue componenti, X, Y, Z) riferito, al solito all'unità di volume, la somma della forza direttamente applicata (X, Y, Z) e della forza perduta (A_x, A_y, A_z), avremo:

$$X - A_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y - A_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad Z - A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (13.7)$$

Se il campo ammette potenziale, avremo allora:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

e, quindi, le (13.7) a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - A_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - A_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (13.8)$$

da cui

$$A_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (13.9)$$

e poiché è:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

le (13.9) precedenti divengono:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \psi) \\ A_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \psi) \\ A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \psi). \end{array} \right. \quad (13.10)$$

13.3 Moti permanenti

È importantissima, in idrodinamica, la nozione di moto permanente. In generale, nel moto di un liquido, la velocità delle particelle che passano per un punto fisso, varia al variare del tempo, ma vi sono dei moti particolari in cui tale velocità rimane costante, e così pure rimangono costanti al variare del tempo le altre grandezze che determinano il moto, moto che, in tal caso, dicesi permanente. Si noti bene, però, che la velocità, nei moti permanenti, è costante per tutti gli elementi di liquido, riferendoci al loro passaggio per un determinato punto fisso, mentre, in generale, la velocità di ogni elemento di liquido varia seguendo l'elemento stesso nel suo moto. Moltiplicando ambo i membri delle (13.10), rispettivamente, per V_x , V_y e V_z (ove, V_x , V_y e V_z sono le componenti della velocità, V , dell'elemento considerato), e sommando membro a membro, otteniamo:

$$V_x \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \psi) + V_y \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \psi) + V_z \frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \psi) = V_x A_x + V_y A_y + V_z A_z. \quad (13.11)$$

Se si considera il passaggio degli elementi di liquido per un determinato punto fisso, avverrà che, mentre ciascuno di essi passa per detto punto, la differenza $\varphi - \psi$ rimane costante, se, invece, si segue un elemento del liquido nel suo moto, la differenza suddetta varierà, e con essa per la (13.10), varierà l'accelerazione dell'elemento in parola. Per vedere come vari la differenza $\varphi - \psi$, che è una funzione delle sole coordinate x, y, z , dell'elemento, derivandola, rispetto al tempo, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi - \psi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \psi) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \psi) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \psi) \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \psi) V_x + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \psi) V_y + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \psi) V_z. \end{aligned}$$

Ma, allora, per la (13.11) precedente, è anche:

$$\frac{d}{dt}(\varphi - \psi) = V_x A_x + V_y A_y + V_z A_z = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{d}{dt} \frac{V^2}{2}$$

dove le derivate rispetto al tempo s'intende che debban esser prese seguendo il moto di una particella. Infine abbiamo:

$$d(\varphi - \psi) = d \frac{V^2}{2}, \quad \text{cioè:} \quad (\varphi - \psi) - \frac{V^2}{2} = \text{cost.}, \quad (13.12)$$

relazione, questa, che vale quando si segua una particella liquida nel suo moto, ossia, quando si segua un filetto di corrente. La formula (13.12) esprime il: Teorema di Bernoulli.

13.4 Teorema di Torricelli

Il teorema di Torricelli si può dedurre immediatamente da quello di Bernoulli. Infatti, considerando un recipiente qualsiasi munito, inferiormente di un foro, detta h l'altezza della superficie libera dal foro, seguiamo nel suo moto, una particella liquida che, dalla superficie, discenda fino al foro di uscita. Se all'inizio del moto, le funzioni φ e ψ hanno, per la particella in questione, i valori φ_0 e ψ_0 , e così anche la velocità, V , abbia valore V_0 , quando la particella sarà giunta al foro d'efflusso, le due dette funzioni e la velocità, avranno assunto i valori φ_1, ψ_1 e V_1 . Ma, per il teorema di Bernoulli, sappiamo che è:

$$(\varphi_1 - \psi_1) - \frac{V_1^2}{2} = (\varphi_0 - \psi_0) - \frac{V_0^2}{2}, \quad (13.13)$$

e poiché la pressione ha alla superficie libera del liquido, ed al foro d'uscita, lo stesso valore (quello della pressione atmosferica), sarà anche: $\psi_1 = \psi_0$, e siccome la particella, inizialmente, aveva velocità trascurabile, possiamo porre: $V_0 = 0$. La (13.13) diviene allora:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{V_1^2}{2}$$

e poiché $\varphi_1 - \varphi_0$ rappresenta la variazione, gh , subita dal potenziale della particella, mentre questa passa dalla superficie libera del liquido al foro d'efflusso, avremo:

$$\frac{V_1^2}{2} = gh,$$

da cui, infine, si ricava la ben nota formula:

$$V_1 = \sqrt{2gh},$$

che ci dice come la velocità di efflusso sia eguale alla velocità che acquisterebbe un grave cadendo dall'altezza h .

RINGRAZIAMENTI

I curatori desiderano ringraziare:

Agastra Elson – Politecnico di Tirana, Albania
Agiò Mario – Istituto Nazionale di Ottica, Firenze
Albis Gianfranco – Politecnico di Torino
Angotti Franco – Università di Firenze
Archivio di Stato di Firenze
Archivio Storico del Politecnico di Torino
Associazione culturale ‘Franco Rasetti’ – Pozzuolo Umbro (Perugia)
Battimelli Gianni – Università di Roma “La Sapienza”
Blasi Paolo – Professore emerito di Fisica dell’Università di Firenze
Braccini Saverio – Università di Berna, Svizzera
Brogioni Luca – Archivio Storico del Comune di Firenze
Carrara Eugenio – Antella (Firenze)
Collezione Giannini – Roma
Desideri Laura – Gabinetto Scientifico-Letteraio G.P. Viesseux
Englert Richard M. – President of Temple University, President of Temple University
Fanciulli Monica – Archivio Storico del Comune di Firenze
Fermi Olivia – Vancouver, British Columbia, Canada
Fondazione Centro di Documentazione Ebraica Contemporanea – Milano
Galtarossa Andrea – Università di Padova
Guatelli Fulvio – Firenze University Press
Lang Carol – Dean of University Library Temple University
Mariano Paolo Maria – Università di Firenze
Martinelli Chiara – Firenze University Press
Massidda Susanna – Università di Firenze
Moretti Mauro – Università per Stranieri di Siena
Nuovo Archivio dei Macchiaioli, Roma
Pera Maria Patrizia – Università di Firenze
Pierno Alessandro – Firenze University Press
Rotary Club Firenze
Sly Margery N. – Director SCRC University Library Temple University
Tesi Alberto – Università di Firenze
Unione Matematica Italiana
Vivoli Carlo – Pistoia

Un particolare ringraziamento al Prof. Giovanni Frosali che aveva curato la prima edizione di queste lezioni.

GLI AUTORI

Di seguito è riportata la lista degli autori dei vari contributi al libro.

Nello Carrara (Firenze 1900 – Firenze 1993)

Professore di Fisica all'Accademia Navale di Livorno, successivamente di Onde elettromagnetiche all'Istituto Superiore Navale di Napoli e poi all'Università di Firenze. È stato il fondatore e direttore dell'Istituto di Ricerca sulle Onde Elettromagnetiche del CNR. Autore di importanti studi nel campo delle microonde (a lui si deve l'introduzione di questo termine) e della tecnica radar.

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici

Dipartimento di Fisica e di Astronomia – Università di Firenze
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare – Sezione di Firenze
via G. Sansone, 1
50019 Sesto Fiorentino (Firenze)
[casalbuoni, dominici]@fi.infn.it

Carlo Franchetti

Dipartimento di Matematica e Informatica 'U. Dini' – Università di Firenze
via di Santa Marta, 3
50139 Firenze
carlo.franchetti@unifi.it

Francesco Guerra

Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare – Sezione di Roma
Piazzale Aldo Moro, 5
00185 Roma
Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche "Enrico Fermi"
Piazza del Viminale, 1
00184 Roma
Francesco.Guerra@roma1.infn.it

Leonardo Lucci, Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini, Stefano Selleri
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione – Università di Firenze
via di Santa Marta, 3
50139 Firenze
[giuseppe.pelosi, massimiliano.pieraccini, stefano.selleri]@unifi.it

Nadia Robotti
Dipartimento di Fisica, Università di Genova
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare – Sezione di Genova
Via Dodecaneso, 33
16146 Genova
Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche “Enrico Fermi”
Piazza del Viminale, 1
00184 Roma
robotti@fisica.unige.it

Paolo Rossi
Dipartimento di Fisica – Università di Pisa
Largo Bruno Pontecorvo, 3
56127 Pisa
Museo Storico della Fisica e Centro studi e Ricerche “Enrico Fermi”, Roma
Piazza del Viminale, 1
00184 Roma
paolo.rossi@unipi.it

Fioranna Salvadori
Archivio Storico dell'Università di Firenze
Via Cittadella, 7
50144 Firenze
fioranna.salvadori@unifi.it

I LIBRI DE «IL COLLE DI GALILEO»

Titoli pubblicati

1. Casalbuoni R., Frosali G., Pelosi G. (a cura di), *Enrico Fermi a Firenze. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926*, 2014
2. Manes G., Pelosi G. (a cura di), *Enrico Fermi's IEEE Milestone in Florence. For his Major Contribution to Semiconductor Statistics, 1924-1926*, 2015
3. Casalbuoni R., Dominici D., Mazzoni M., Pelosi G. (a cura di), *La Fisica ad Arcetri. Dalla nascita della Regia Università alle leggi razziali*, 2016
4. Godoli A., Palla F., Righini A. (a cura di), *La villa di Galileo in Arcetri / The Galileo's villa at Arcetri*, 2016
5. Barbagli F., Bianchi S., Casalbuoni R., Dominici D., Mazzoni M., Pelosi G. (a cura di), *Astronomia e Fisica a Firenze. Dalla Specola ad Arcetri*, 2017
6. Casalbuoni R., Dominici D., Pelosi G. (a cura di), *Enrico Fermi a Firenze. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926*, 2019

