

# AIMETA 2005



**XVII CONGRESSO AIMETA**

**di Meccanica Teorica e Applicata**



**Firenze, 11-15 Settembre 2005**

**Volume II**

Firenze  
University  
Press



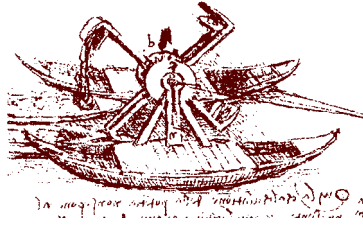




ATTI

- 19 -





# **AIMETA 2005**

## **Atti del XVII Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata**

**Firenze, 11-15 settembre 2005**

*a cura di*

Claudio Borri  
Luca Facchini  
Giorgio Federici  
Mario Primicerio

**Volume II**

Firenze University Press  
2006

AIMETA 2005 : atti del XVII Congresso dell'Associazione italiana di  
meccanica teorica e applicata : Firenze, 11-15 settembre 2005 : volume II  
/ a cura di Claudio Borri, Luca Facchini, Giorgio Federici, Mario Primicerio.

- Firenze, Firenze university press, 2006

(Atti, 19)

<http://digital.casalini.it/8884534593>

Stampa a richiesta disponibile su <http://epress.unifi.it>

ISBN 10: 88-8453-459-3 (online)

ISBN 13: 978-88-8453-459-0 (online)

ISBN 10: 88-8453-460-7 (print)

ISBN 13: 978-88-8453-460-6 (print)

531 (ed. 20)

Meccanica-Congressi-Firenze-2005

© 2006 Firenze University Press

Università degli Studi di Firenze

Firenze University Press

Borgo Albizi, 28, 50122 Firenze, Italy

<http://epress.unifi.it/>

*Printed in Italy*

# XVII Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata

## **Comitato Scientifico:**

Gianni Bartoli (Università degli Studi di Firenze)  
Davide Bigoni (Università degli Studi di Trento)  
Guido Borino (Università degli Studi di Palermo)  
Ennio Carnevale (Università degli Studi di Firenze)  
Alberto Corigliano (Politecnico di Milano)  
Massimiliano Lucchesi (Università degli Studi di Firenze)  
Paolo Luchini (Università degli Studi di Salerno)  
Aleramo Lucifredi (Università degli Studi di Genova)  
Angelo Luongo (Università degli Studi di l'Aquila)  
Ettore Pennestri (Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata')  
Mario Primicerio, *Presidente* (Università degli Studi di Firenze)  
Terenziano Raparelli (Università degli Studi di l'Aquila)  
Paolo Rissone (Università degli Studi di Firenze)  
Giampiero Spiga (Università degli Studi di Parma)

## **Comitato Organizzatore:**

Franco Angotti  
Ignazio Becchi  
Claudio Borri, *Presidente*  
Silvia Briccoli Bati  
Carlo Cinquini, *Segretario AIMETA*  
Paolo Citti  
Luca Facchini, *Segretario*  
Giorgio Federici, *Tesoriere*  
Giovanni Frosali  
Francesco Martelli  
Paolo Toni  
Giovanni Vannucchi  
Andrea Vignoli

## **Segreteria del Congresso:**

Gabriella Montagnani  
Chiara Serpieri  
Veronika Sustik  
Ufficio Relazioni Esterne  
Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Firenze  
Via di S. Marta, 3  
50139 Firenze  
Tel: +39 055 4796491  
Fax: +39 055 4796544  
E-mail: [aimeta2005@ing.unifi.it](mailto:aimeta2005@ing.unifi.it)



L'**AIMETA**, Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, costituita nel 1966, riunisce i cultori della Meccanica nei suoi vari indirizzi: Meccanica Generale, Meccanica dei fluidi, Meccanica delle macchine, Meccanica dei solidi e Meccanica delle strutture.

Attraverso Congressi e incontri e con la rivista Meccanica, l'Associazione si propone di stabilire contatti fra ricercatori che operano nei diversi indirizzi, favorendo la collaborazione ed il confronto fra conoscenze ed esperienze diverse.

**Consiglio Direttivo dell' AIMETA:**

Giuliano Augusti (*Vice-presidente*), Roberto Bassani, Gianfranco Capriz (*Past-President*), Carlo Cinquini (*Segretario*), Mario di Paola, Angelo Morro (*Presidente*), Maurizio Pandolfi (*Tesoriere*).

Il XVII Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata si è svolto con il patrocinio di:

AIMETA - Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata

Comune di Firenze

CRIACIV - Centro di Ricerca Interuniversitario di Aerodinamica delle Costruzioni e Ingegneria del vento

Facoltà di Ingegneria di Firenze - Dipartimento di Ingegneria Civile

Istituto e Museo di Storia della Scienza

Università degli Studi di Firenze

ed è stato realizzato grazie al contributo di:



*Università degli Studi di Firenze*

# Indice

Nota introduttiva di <i>Claudio Borri</i>	XI
<i>Frattura interlaminare secondo il modo I in un laminato composito</i> Stefano Bennati, Massimiliano Colleluori, Domenico Corigliano, Paolo Sebastiano Valvo	1
<i>Dinamica del vitreo oculare indotta dai movimenti saccadici</i> Chiara Cafferata, Rodolfo Repetto, Alessandro Stocchino	13
<i>Simulation of the three-dimensional flow around a square cylinder between parallel walls at moderate Reynolds numbers</i> Simone Camarri, Maria Vittoria Salvetti, Marcelo Buffoni, Angelo Iollo	23
<i>Rans Solutions for the Numerical Prediction of Separated Flows</i> Carlo de Nicola, Benedetto Mele, Renato Tognaccini	35
<i>Utilizzo di tecniche possibilistiche nella meccanica delle strutture</i> Stefano Gabriele, Claudio Valente, Fabio Brancaleoni	45
<i>Instability Characteristics of Harmonic Disturbances in a Turbulent Separation Bubble</i> Astrid H. Herbst, Steve Deubelbeiss, Saskia Speer, Ardeshir Hanifi, Dan S. Henningson	57
<i>U-RANS Simulations Around Bluff Bodies</i> Claudio Marongiu, Pier Luigi Vitagliano, Francesco Capizzano, Pietro Catalano	67
<i>Analisi dinamica deterministica ed aleatoria di oscillatori che percorrono travi su suolo viscoelastico</i> Giuseppe Muscolino, Alessandro Palmeri	79
Indici	91



## Nota introduttiva

Questo post-scriptum agli atti del XVII Congresso AIMETA, raccoglie alcuni contributi, che, pur analizzati ed approvati dal Comitato Scientifico, non hanno potuto trovare posto nel volume pubblicato a settembre 2005, per motivi esclusivamente editoriali e temporali. Ciò nonostante, il Comitato Organizzatore, avendo preso un preciso impegno con gli Autori, ha tenuto fede a tale impegno, pubblicando questo addendum. Forse gli Autori avrebbero sperato in tempi più stretti, ma anche in questa occasione i manoscritti sono stati consegnati con un qualche ritardo.

Intendo confermare qui quanto espresso nella mia introduzione al volume di settembre 2005 e cioè: “Il presente volume riunisce l’impressionante quantità di contributi selezionati e raggruppati nei vari settori classici della meccanica teorica ed applicata, e provenienti da una vastissima comunità scientifica: a tutti gli Autori va il sincero ringraziamento del Comitato Organizzatore del Convegno. A tali settori classici si sono aggiunti temi di valenza interdisciplinare di notevole interesse e di alto contenuto innovativo: per questi sono stati proposti dei Minisimposi organizzati e coordinati dai promotori, ai quali desidero esprimere un particolare e sentito grazie.” Adesso vorrei esplicitamente ringraziare gli Autori dei lavori pubblicati in questo addendum, per il loro interesse e la loro collaborazione.

Anche a nome dell’intero Comitato Organizzatore, desidero rinnovare uno specifico riconoscimento ai colleghi Prof. L. Facchini (Segretario del C.O.) ed alla Sig.ra G. Montagnani, che hanno sostenuto il maggior carico di lavoro dell’organizzazione della stampa dell’addendum.

Infine, ritengo doveroso ringraziare il nostro “Publisher”, la Firenze University Press, in particolare la D.ssa C. Bullo, per la comprensione, il sostegno e l’aiuto qualificato a nostro lavoro.

*Claudio Borri, Prof. Ing., Dr.-Ing. h.c.  
Presidente del Comitato Organizzatore*



# Frattura interlaminare secondo il modo I in un laminato composito

Stefano Bennati

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Pisa, Italy*

*E-mail: s.bennati@ing.unipi.it*

Massimiliano Colleluori

*Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, Italy*

*E-mail: massimiliano.colleluori@studenti.ing.unipi.it*

Domenico Corigliano

*Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, Italy*

*E-mail: domenico.corigliano@studenti.ing.unipi.it*

Paolo Sebastiano Valvo

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Pisa, Italy*

*E-mail: p.valvo@ing.unipi.it*

*Parole chiave:* materiali compositi, delaminazione, frattura, interfaccia elastica, provino DCB

**SUMMARY:** Si propone un modello meccanico per il provino DCB (Double Cantilever Beam), comunemente utilizzato per la determinazione sperimentale della resistenza alla frattura interlaminare secondo il modo I nei laminati compositi. A tal fine, si schematizza il provino come l'assemblaggio di due sublaminati collegati fra loro da un'interfaccia elasto-fragile. Grazie alla relativa semplicità del modello, è possibile ricavare esplicitamente gli spostamenti dei due sublaminati, le tensioni interlaminari e, conseguentemente, la velocità di rilascio dell'energia potenziale totale del sistema. L'adozione di un opportuno criterio di frattura consente, quindi, di valutare il valore critico del carico o dello spostamento di estremità, come funzioni esplicite dell'ampiezza della zona delaminata. Il confronto con alcuni risultati sperimentali presenti in letteratura appare molto buono.

## 1. INTRODUZIONE

Un ostacolo severo alla crescente diffusione dei materiali compositi nelle diverse applicazioni dell'ingegneria strutturale è costituito dalla loro elevata sensibilità alla presenza di difetti ed ai fenomeni di degrado. La delaminazione, ovvero la frattura interlaminare tra gli strati di un laminato composito, è una delle modalità di crisi più comuni e più insidiose. Per questo, numerosi studi sono stati dedicati sia alla valutazione sperimentale della resistenza a frattura dei laminati sia alla modellazione dei diversi aspetti coinvolti nel fenomeno (Garg [1988]).

Nel caso della frattura secondo il modo I, la resistenza a frattura è comunemente valutata mediante prove di carico su particolari provini detti "DCB" (Double Cantilever Beam), i cui risultati sono convenzionalmente interpretati sulla base di un modello elementare che vede il laminato come l'unione di due travi a mensola (fig. 1).

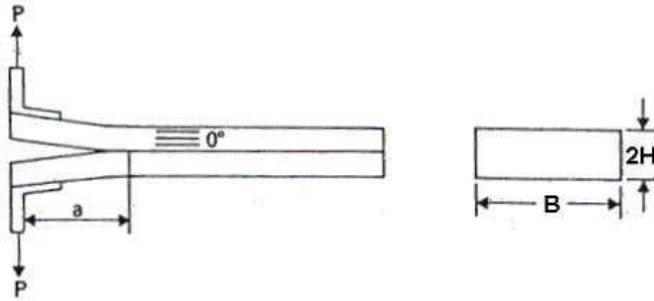


Figura 1 – Provino DCB.

Il modello meccanico che qui si propone rappresenta un'estensione di tale modello elementare, dove il provino DCB è schematizzato come l'assemblaggio di due sublaminati elastici collegati fra loro da un'interfaccia. Quest'ultima è a sua volta modellata come una distribuzione continua ed uniforme di molle elasto-fragili (Allix e Ladevèze [1992]).

Il modello è sufficientemente semplice da consentire la soluzione esplicita del problema, attraverso il metodo delle condizioni iniziali (Hetényi [1946]). Sulla base delle sole caratteristiche meccaniche della matrice e delle fibre del laminato, si possono allora valutare gli spostamenti dei due sublaminati, le tensioni interlaminari e, conseguentemente, la velocità di rilascio dell'energia potenziale totale del sistema al crescere dell'ampiezza della regione delaminata. L'adozione di un opportuno criterio di frattura consente quindi di ricavare il valore critico del carico trasversale e dello spostamento dell'estremità libera del provino come funzioni esplicite dell'ampiezza della zona delaminata. Tra l'altro, ciò consente, a differenza di altri modelli presenti in letteratura, di valutare il carico di "prima delaminazione", ovvero l'intensità del carico capace di generare la nucleazione della frattura in un provino inizialmente integro (Hwu *et al.* [1995], Reedy *et al.* [1997]).

Le previsioni teoriche del modello sono state confrontate con alcuni risultati sperimentali presenti in letteratura (Laksimi *et al.* [1991], Zou *et al.* [2003]). Considerata la semplicità del modello proposto, l'accordo ottenuto appare sorprendente.

## 2. UN MODELLO PER LA DELAMINAZIONE SECONDO IL MODO I

### 2.1. Il problema d'equilibrio

Il modello che si propone prevede di rappresentare il provino DCB (o meglio, una sua metà, considerata la simmetria del problema) come una trave elastica su supporto elastico incastrata ad un estremo e soggetta ad un carico  $P$  all'altro estremo (fig. 2). La trave ha lunghezza complessiva  $l$ , mentre la porzione delaminata, priva del supporto elastico, è lunga  $a$ . È conveniente introdurre il rapporto adimensionale  $\alpha = a/l$ , cosicché le due porzioni del provino, integra e delaminata, avranno rispettivamente lunghezze  $(1 - \alpha)l$  e  $\alpha l$ . L'assenza di delaminazione corrisponde ad  $\alpha = 0$ .

Il valore della costante delle molle distribuite che schematizzano il supporto elastico,  $k$ , è ricavato direttamente dal modulo di Young della matrice,  $E_m$ , tramite la relazione  $k = E_m B / H$ , dove  $B$  è la

larghezza del provino ed  $H$  è il suo semispessore. In assenza di dati sulla matrice, è ragionevole porre  $k = E_2 B / H$ , dove  $E_2$  è il modulo di Young della lamina in direzione trasversale.

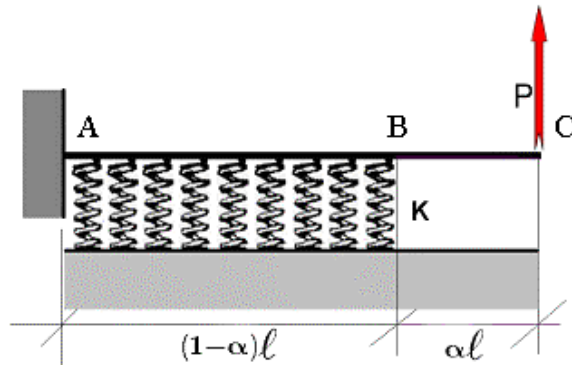


Figura 2 – Il modello proposto.

Il problema d'equilibrio è scomposto in due sottoproblemi corrispondenti ai tratti AB e BC (fig. 3). Inoltre, nell'ipotesi di comportamento lineare, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e risolvere il problema per il tratto AB considerando separatamente il carico  $P$  e la coppia  $P\alpha l$ .

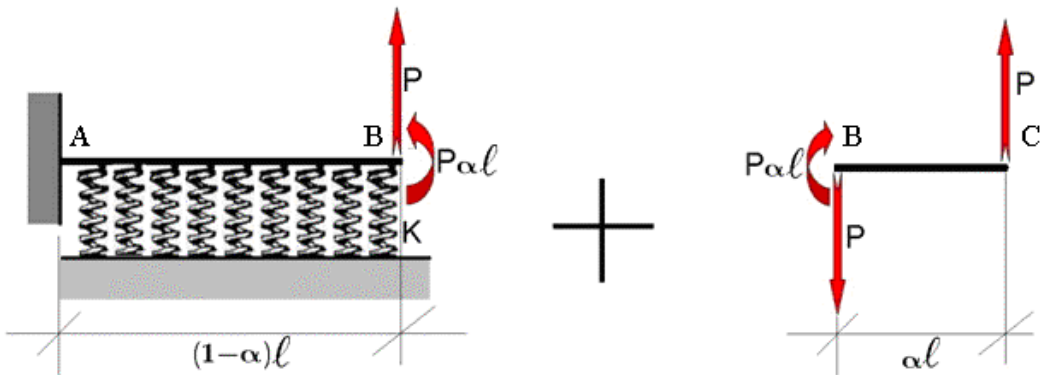


Figura 3 – Scomposizione del problema d'equilibrio.

Siano  $E = E_1$  il modulo di Young nella direzione longitudinale e  $J = BH^3 / 12$  il momento d'inerzia del semilaminato considerato nel modello. L'equazione della linea elastica per il tratto AB è allora

$$EJv_{AB}^{IV}(s) + kv(s) = 0, \quad s \in [0, (1-\alpha)l], \quad (1)$$



che ammette la soluzione generale nella forma

$$v_{AB}(s) = e^{\mu s} [C_1 \cos(\mu s) + C_2 \sin(\mu s)] + e^{-\mu s} [C_3 \cos(\mu s) + C_4 \sin(\mu s)], \quad (2)$$

dove si è posto

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (3)$$

e  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  sono costanti d'integrazione. Secondo il metodo delle condizioni iniziali (Hetényi [1946]), differenziando la (2), si ricavano lo spostamento, la rotazione, il momento flettente e la forza di taglio nel punto A ( $s = 0$ ):

$$\begin{cases} v_0 = v_{AB}(0) = C_1 + C_3; \\ \vartheta_0 = v'_{AB}(0) = \mu(C_1 + C_2 - C_3 + C_4); \\ M_0 = -EJv''_{AB}(0) = 2\mu^2 EJ(-C_2 + C_4); \\ T_0 = -EJv'''_{AB}(0) = 2\mu^3 EJ(C_1 - C_2 - C_3 - C_4). \end{cases} \quad (4)$$

Ricavando le costanti d'integrazione dalle (4) ed utilizzando le note relazioni tra funzioni esponenziali e funzioni iperboliche, si può porre l'espressione della linea elastica (2) nella forma

$$v_{AB}(s) = v_0 F_1(\mu s) + \frac{1}{\mu} \vartheta_0 F_2(\mu s) - \frac{1}{\mu^2 EJ} M_0 F_3(\mu s) - \frac{1}{\mu^3 EJ} T_0 F_4(\mu s), \quad (5)$$

dove si sono introdotte le funzioni ausiliarie:

$$\begin{cases} F_1(\mu s) = \cosh(\mu s) \cos(\mu s); \\ F_2(\mu s) = \frac{1}{2} [\cosh(\mu s) \sin(\mu s) + \sinh(\mu s) \cos(\mu s)]; \\ F_3(\mu s) = \frac{1}{2} \sinh(\mu s) \sin(\mu s); \\ F_4(\mu s) = \frac{1}{4} [\cosh(\mu s) \sin(\mu s) - \sinh(\mu s) \cos(\mu s)]. \end{cases} \quad (6)$$

S'introducano le condizioni al bordo agli estremi A e B:

$$A) \begin{cases} v(0) = 0; \\ v'(0) = 0; \end{cases} \quad B) \begin{cases} -EJv''[(1-\alpha)l] = \alpha l P; \\ -EJv'''[(1-\alpha)l] = -P. \end{cases} \quad (7a, b)$$

Tramite le (7a) e le (4), l'espressione (5) si semplifica nella seguente

$$v_{AB}(s) = -\frac{1}{\mu^2 EJ} M_0 F_3(\mu s) - \frac{1}{\mu^3 EJ} T_0 F_4(\mu s), \quad (8)$$

la quale, differenziata e sostituita nelle (7b), permette di ricavare le caratteristiche di sollecitazione all'estremo A:

$$M_0 = \frac{-P/\mu}{\tanh^2[(1-\alpha)\mu l] - \tan^2[(1-\alpha)\mu l] - 2} \cdot \frac{\tanh[(1-\alpha)\mu l] + \tan[(1-\alpha)\mu l] + 2\alpha\mu l}{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]}; \quad (9a)$$

$$T_0 = \frac{2P}{\tanh^2[(1-\alpha)\mu l] - \tan^2[(1-\alpha)\mu l] - 2} \cdot \frac{\{\tanh[(1-\alpha)\mu l] - \tan[(1-\alpha)\mu l]\}\alpha\mu l + 1}{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]}. \quad (9b)$$

Considerando l'equilibrio del tratto di trave BC, non vincolato dal letto di molle, si ricava:

$$v_{BC}(s) = \frac{P}{6EJ} s^3 - \frac{P}{2EJ} \alpha l s^2 - C_5 s - C_6, \quad s \in [0, \alpha l], \quad (10)$$

dove  $C_5$  e  $C_6$  sono due costanti d'integrazione, le cui espressioni si ottengono imponendo la continuità dello spostamento e della rotazione nella sezione B:

$$C_5 = \frac{M_0}{2\mu} \{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] + \sinh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]\} + \frac{T_0}{2\mu^2} \sinh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l]; \quad (11a)$$

$$C_6 = \frac{M_0}{2\mu^2} \sinh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] + \frac{T_0}{4\mu^3} \{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] - \sinh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]\}. \quad (11b)$$

Infine, si può ricavare lo spostamento trasversale della sezione di applicazione del carico,

$$v_C = -\frac{P}{3EJ} \alpha^3 l^3 - \frac{1}{EJ} (C_5 \alpha l + C_6). \quad (12)$$

## 2.2. Aspetti energetici

L'energia potenziale totale del sistema,

$$\Pi = U - L_e, \quad (13)$$

è definita come la differenza tra l'energia di deformazione elastica immagazzinata dall'interfaccia elastica e dalla struttura,

$$U = \int_0^{(1-\alpha)l} \frac{1}{2} \frac{k v_{AB}^2(s)}{EJ} ds + \int_0^{(1-\alpha)l} \frac{1}{2} \frac{M_{AB}^2(s)}{EJ} ds + \int_0^a \frac{1}{2} \frac{M_{BC}^2(s)}{EJ} ds \quad (14)$$

ed il lavoro delle forze esterne,

$$L_e = P v_C. \quad (15)$$

Sostituendo nella (14) le espressioni trovate in precedenza e sviluppando gli integrali indicati, sarebbe possibile calcolare esplicitamente l'energia. Tuttavia, per evitare lunghi e laboriosi sviluppi matematici, è conveniente sfruttare il Teorema di Clapeyron, secondo cui il lavoro virtuale delle forze esterne è uguale al doppio dell'energia di deformazione elastica,  $L_e = 2U$ . L'energia potenziale totale del sistema allora diventa

$$\Pi = \frac{1}{2} L_e - L_e = -\frac{1}{2} L_e = -\frac{1}{2} P v_C. \quad (16)$$

Si definisce, inoltre, la velocità di rilascio dell'energia,

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{l} \frac{d\Pi}{d\alpha}, \quad (17)$$

dove  $a$  è la lunghezza della parte delaminata. Sostituendo la (12) nella (16) e questa nella (17), dopo alcuni passaggi qui omessi per brevità, si ricava l'espressione analitica della velocità di rilascio,

$$G = \frac{P^2}{2EJ\mu^2} \left( \alpha \mu l + \frac{1}{2} \frac{\sin[2(1-\alpha)\mu l] + \sinh[2(1-\alpha)\mu l]}{\cos[(1-\alpha)\mu l]^2 + \cosh[(1-\alpha)\mu l]^2} \right)^2. \quad (18)$$

È facile verificare che facendo il limite per  $k$  tendente all'infinito, ovvero considerando rigida la parte di provino non delaminata, l'espressione (18) s'identifica con quella riportata in letteratura per il semplice modello a due mensole, di cui il modello proposto può essere considerato un'estensione.

### 2.3. Crescita della delaminazione

Il criterio di crescita comunemente applicato in questo tipo di problemi afferma che la delaminazione si propaga quando la velocità di rilascio dell'energia attinge un valore critico  $G_{CR}$ . Poiché nel modello, grazie alla simmetria del problema, si è considerata metà struttura, è necessario moltiplicare per due e dividere per la larghezza del provino i valori forniti dalla (18), prima di poterli confrontare con i valori riportati in letteratura. Pertanto, il criterio di crescita diventa:

$$G_{TOT} = \frac{2G}{B} = G_{CR}. \quad (19)$$

Si può determinare, allora, il valore del carico corrispondente alla propagazione:

$$P_{CR} = \frac{\mu\sqrt{G_{CR}BEJ}}{\alpha\mu l + \frac{1}{2} \frac{\sin[2(1-\alpha)\mu l] + \sinh[2(1-\alpha)\mu l]}{\cos[(1-\alpha)\mu l]^2 + \cosh[(1-\alpha)\mu l]^2}}. \quad (20)$$

### 3. APPLICAZIONE

A titolo di esempio, si considera il provino descritto nel lavoro di Laksimi *et al.* [1991] (*carbonio-epossidica* con fibre di carbonio *Toray T300* e resina *VICOTEX M10*) avente le seguenti caratteristiche geometriche e meccaniche:

$$\begin{aligned} l &= 100 \text{ mm}, & B &= 20 \text{ mm}, & H &= 6.6 \text{ mm}, \\ E_1 &= 123680 \text{ N/mm}^2, & E_2 &= 17978.4 \text{ N/mm}^2, & G_{CR} &= 0.419 \text{ N/mm}. \end{aligned}$$

Il valore di  $k$  si assume pari al rapporto fra il modulo di Young  $E_2$  del laminato e la lunghezza caratteristica nella stessa direzione, cioè il semispessore del provino,  $k = B E_2 / H = 54480 \text{ N/mm}^2$ . Le figure 4a e 4b mostrano l'andamento della velocità di rilascio dell'energia,  $G$ , in funzione del carico applicato,  $P$ , per due fissate ampiezze della zona delaminata corrispondenti, rispettivamente, ad  $\alpha = 0.2$  ed  $\alpha = 0.8$ . A titolo di confronto, le figure riportano sia i valori calcolati con l'espressione (18) sia quelli che si ottengono dal più semplice modello a doppia mensola di letteratura,

$$G_{LETT} = \frac{P^2 a^2}{BEJ} \quad (21)$$

Come si può vedere, i due valori di  $G$  tendono ad avvicinarsi al crescere di  $\alpha$ , cioè al diminuire della lunghezza del tratto dotato del supporto elastico.

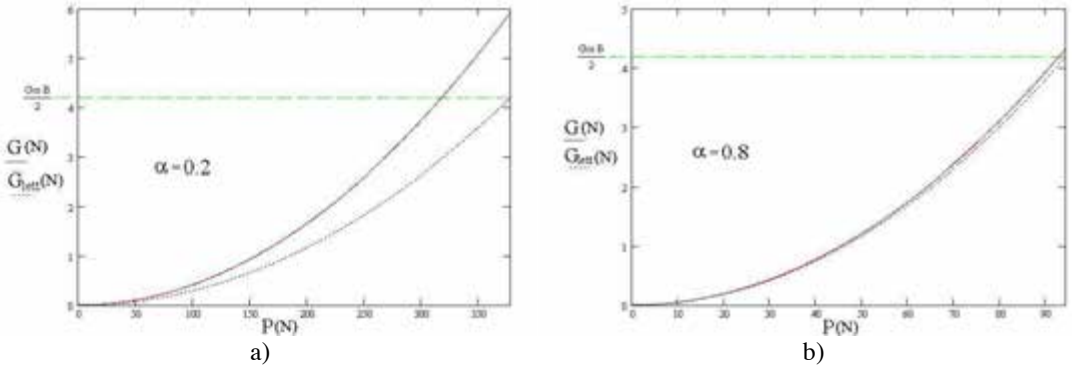


Figura 4 – Velocità di rilascio dell’energia in funzione del carico applicato.

La figura 5 mostra un confronto tra il carico  $P_{CR}$  calcolato con la (20) e quello di letteratura,

$$P_{CR.LETT} = \frac{\sqrt{G_{CR}BEJ}}{\alpha d} \quad (22)$$

Anche in questo caso, le previsioni dei due modelli tendono a coincidere al crescere di  $\alpha$ . Inoltre, si noti come il modello proposto fornisca un valore finito di  $P_{CR}$  anche per  $\alpha = 0$ , a differenza di  $P_{CR.LETT}$  che tende ad infinito. In altri termini, è possibile stimare anche il carico di “prima delaminazione” per un provino integro, sebbene la validità delle previsioni teoriche così ottenute necessiti di un confronto con prove sperimentali. Nell’esempio suddetto, per  $\alpha = 0$ , si ottiene  $P_{CR} = 1632$  N.

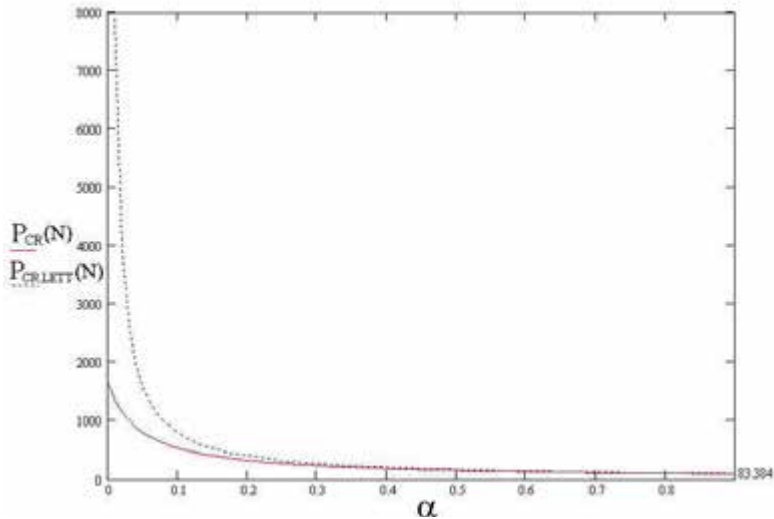


Figura 5 – Carico critico in funzione dell’ampiezza della zona delaminata.

Le figure 6a e 6b riportano i grafici della velocità di rilascio dell'energia,  $G$ , in funzione, rispettivamente, del carico  $P$  ad  $\alpha$  costante e dell'ampiezza di delaminazione adimensionale  $\alpha$  a  $P$  costante. Dai grafici si può vedere come, al crescere di  $\alpha$ , il carico critico  $P_{CR}$  diminuisca mentre, al crescere del carico applicato  $P$ , il tasso di rilascio dell'energia  $G$  aumenti e, di conseguenza, diminuisca il valore critico di  $\alpha$  per il quale si prevede la propagazione della delaminazione.

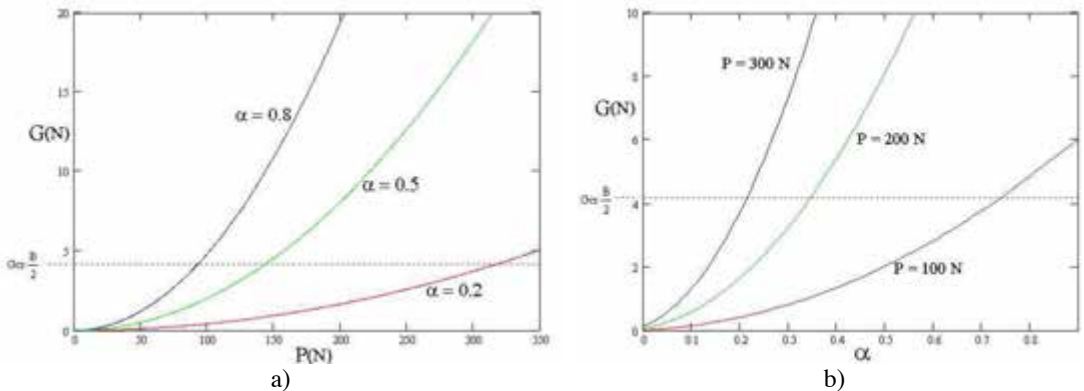


Figura 6 – Velocità di rilascio dell'energia in funzione del carico e dell'ampiezza di delaminazione.

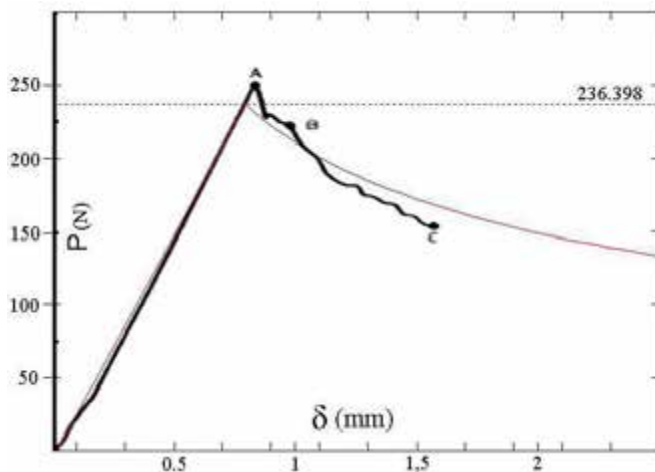


Figura 7 – Confronto con Laksimi *et al.* [1990].

Il grafico della figura 7 riassume l'intera storia di carico-deformazione di un provino DCB sottoposto ad una prova sperimentale a spostamento imposto,  $\delta = v_C$ . Si distingue un primo tratto pressoché lineare della curva, che va dall'origine al punto A e che rappresenta la risposta elastica del provino ancora integro (ma provvisto di una delaminazione iniziale di ampiezza  $a_0$ ); nel punto A il

carico attinge il valore critico per l'ampiezza di delaminazione assegnata, cioè corrisponde al raggiungimento del valore critico della velocità di rilascio dell'energia; il tratto ABC della curva rappresenta, quindi, la fase in cui la delaminazione si propaga e il carico diminuisce fino alla completa rottura. La figura mostra il confronto tra i risultati ottenuti da Laksimi *et al.* [1990] (linea grossa) con quelli del modello proposto (linea sottile). Si rileva un'ottima corrispondenza tra le due curve.

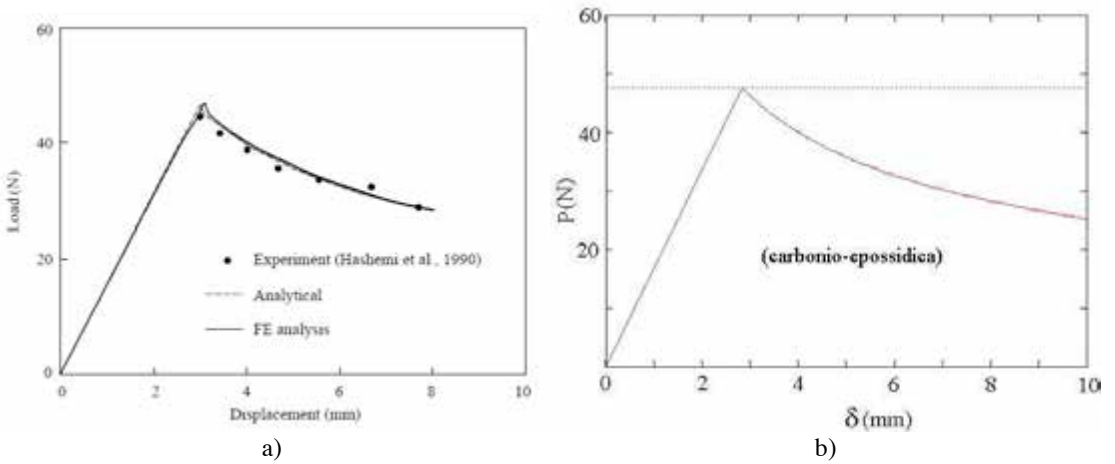


Figura 8 – Confronto con Zou *et al.* [2003] per un provino di carbonio-epossidica.

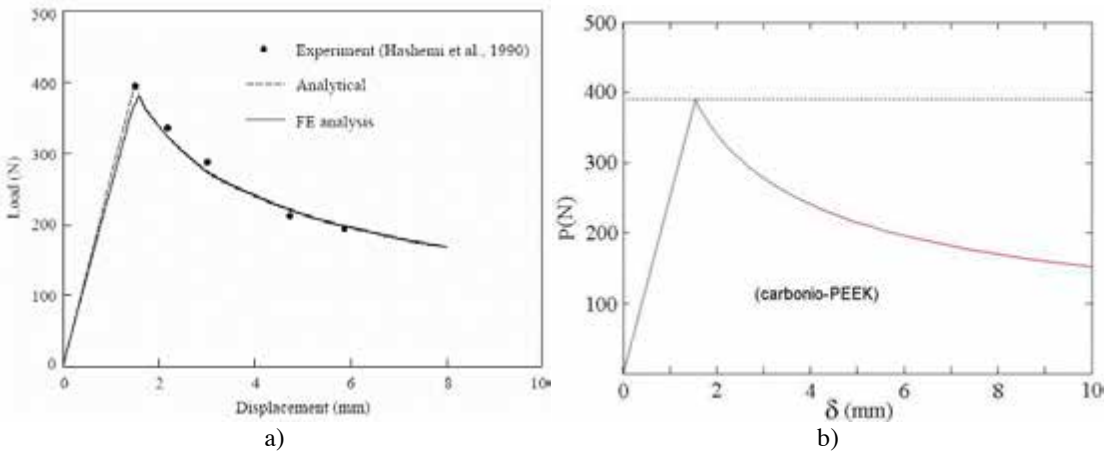


Figura 9 – Confronto con Zou *et al.* [2003] per un provino di carbonio-PEEK.

Quale ulteriore raffronto con risultati sperimentali, nelle figure 8a e 8b sono confrontate le previsioni del modello proposto con i risultati di Zou *et al.* [2003], relativi ad un provino di carbonio-

*epossidica* caratterizzato dai seguenti parametri:

$$l = 100 \text{ mm}, \quad B = 15 \text{ mm}, \quad H = 2 \text{ mm}, \quad a_0 = 45 \text{ mm}, \\ E_1 = 130000 \text{ N/mm}^2, \quad E_2 = 3500 \text{ N/mm}^2, \quad G_{CR} = 0.275 \text{ N/mm}, \quad k = BE_2/H = 26250 \text{ N/mm}^2.$$

Nelle figure 9a e 9b, invece, si riporta un confronto con un secondo caso tratto dal lavoro citato, relativo ad un provino di *carbonio-PEEK* caratterizzato da:

$$l = 100 \text{ mm}, \quad B = 15 \text{ mm}, \quad H = 2.55 \text{ mm}, \quad a_0 = 20 \text{ mm}, \\ E_1 = 125000 \text{ N/mm}^2, \quad E_2 = 3600 \text{ N/mm}^2, \quad G_{CR} = 2.39 \text{ N/mm}, \quad k = BE_2/H = 21180 \text{ N/mm}^2.$$

#### 4. CONCLUSIONI

Nella memoria è stato presentato un modello meccanico del provino DCB, del tipo correntemente utilizzato per determinare la resistenza a frattura in modo I dei laminati compositi fibro-rinforzati. Il modello proposto consente di prevedere l'inizio e la crescita della delaminazione in condizioni sia di carico imposto sia di spostamento controllato. In particolare, grazie all'introduzione di un'interfaccia elastica, che tiene conto dell'elasticità della matrice, è possibile calcolare la deformata del provino, l'energia potenziale totale e la velocità di rilascio dell'energia. Nel caso limite in cui si trascuri sia l'elasticità dell'interfaccia sia quella dei sublaminati, le previsioni del modello coincidono con quelle del semplice modello a doppia mensola di letteratura, di cui il presente costituisce una significativa estensione. Inoltre, il modello proposto consente di ricavare i valori del carico o dello spostamento imposto responsabili dell'innesco e del progredire della delaminazione. La soluzione analitica, ottenuta attraverso calcoli lunghi e discretamente complessi, ha ripagato pienamente della fatica spesa per ricavarla. Infatti, i primi confronti con dati sperimentali e previsioni teoriche di altri modelli presenti in letteratura appaiono molto buoni non solo in termini qualitativi ma anche quantitativi.

#### Riferimenti bibliografici:

- Allix, O., Ladevèze, P. 1992. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination", *Composite Structures*, 22, 235-242.
- Colleluori, M., Corigliano, D. *La delaminazione nei materiali compositi: un caso di frattura interlaminare secondo il modo I*, Tesi di laurea, Università di Pisa 2004.
- Garg, A.C. 1988. Delamination – A damage mode in composite structures, *Engineering Fracture Mechanics*, 29, 557-584.
- Hetényi, M. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*, Ann Arbor, The University of Michigan Press 1946.
- Hwu, C., Kao, C.J., Chang, L.E. 1995. Delamination fracture criteria for composite laminates, *Journal of Composite Materials*, 29, 1962-1987.
- Laksimi, A., Benzeggagh, M.L., Jing, G., Hecini, M., Roelandt, J.M. 1991. Mode I interlaminar fracture of symmetrical cross-ply laminates", *Composites Science and Technology*, 41, 147-164.
- Reedy, E.D., Mello, F.J., Guess, T.R. 1997. Modeling the Initiation and Growth of Delaminations in Composite Structures, *Journal of Composite Materials*, 31, 812-830.
- Zou, Z., Reid, S.R., Li, S. 2003. A continuum damage model for delaminations in laminated composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51, 333-356.





# Dinamica del vitreo oculare indotta dai movimenti saccadici

Chiara Cafferata

*Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università di Genova, Italia*

*E-mail: caffec@diam.unige.it*

Rodolfo Repetto

*Dipartimento delle Strutture, delle Acque e del Terreno, Università dell'Aquila, Italia*

*E-mail: rodolfo@ing.univaq.it*

Alessandro Stocchino

*Dipartimento di Ingegneria Ambientale, Università di Genova, Italia*

*E-mail: jorma@diam.unige.it*

*Parole chiave:* occhio, vitreo oculare, biofluidinamica, PIV

**SOMMARIO:** La regione dell'occhio compresa tra il cristallino e la retina contiene il vitreo oculare, una sostanza dal comportamento reologico viscoelastico. Nei soggetti giovani il vitreo ha la consistenza di un gel ma con gli anni esso perde frequentemente le sue caratteristiche elastiche presentando un processo di liquefazione che può estendersi all'intera camera vitreale. Durante i movimenti saccadici dell'occhio il vitreo esercita sulla retina tensioni che sono state associate alla patogenesi del distacco di retina. Nel presente contributo si presentano i primi risultati di un'indagine sperimentale sulla dinamica del vitreo oculare realizzata mediante un modello della camera vitreale consistente in un cilindro di Perspex recante una cavità riempita con glicerina. Sono stati impiegati due diversi modelli: un primo modello con camera sferica, e un secondo con cavità opportunamente deformata per simulare la presenza del cristallino nella zona anteriore del bulbo. Il modello è movimentato da un motore controllato da calcolatore imponendo una legge temporale prestabilita. In questa prima fase della ricerca i movimenti saccadici sono stati simulati con rotazioni periodiche. Visualizzazioni del campo di moto del fluido all'interno della cavità sferica, realizzate con un tracciante colorato, hanno evidenziato come il moto avvenga essenzialmente sui piani ortogonali all'asse di rotazione. Tramite la tecnica PIV sono stati misurati i campi di moto sul piano equatoriale ortogonale all'asse di rotazione. Nel caso di cavità sferica i risultati sperimentali risultano in buon accordo con risultati analitici basati sul modello semplificato proposto da David *et al.* [1998]. Si è inoltre mostrato come la non sfericità del dominio induca campi di moto dalla struttura assai più complessa; in particolare si assiste invariabilmente alla formazione di un vortice, in prossimità della lente.

## 1. INTRODUZIONE

L'umor vitreo è la sostanza contenuta all'interno della camera vitreale, la regione dell'occhio compresa tra il cristallino e la retina (figura 1a). Dettagliate indagini sperimentali condotte da Lee *et al.* [1992] hanno evidenziato come, dal punto di vista meccanico, il vitreo abbia un comportamento viscoelastico. Le proprietà dell'umor vitreo sono, tuttavia, tipicamente molto variabili con l'età del soggetto e spesso, si assiste con gli anni ad un progressivo processo di liquefazione, a seguito del quale si ha la parziale o totale perdita delle proprietà elastiche del vitreo.

Esistono nella letteratura medica indicazioni del fatto che la fluidinamica all'interno della camera vitreale indotta dai movimenti del bulbo sia legata al processo patologico del distacco di retina. In particolare, qualora si abbia una rottura della retina, la progressiva infiltrazione del vitreo liquefatto attraverso la rottura può portare allo scollamento della retina dall'epitelio pigmentato, lo strato ad essa immediatamente più esterno. Tale processo, che viene denominato "distacco di retina regmatogeno", è assai più frequente negli occhi fortemente miopi.

Le precedenti osservazioni hanno indotto diversi ricercatori nell'ambito medico a studiare sperimentalmente tale fenomeno. In particolare è opportuno ricordare il pionieristico lavoro di Lindner [1933], che è stato successivamente ripreso da Rosengren e Östrelin [1976]. Gli autori hanno effettuato prove sperimentali, su geometria cilindrica, volte a simulare il moto del vitreo a seguito delle rotazioni del bulbo oculare. Entrambi i lavori evidenziano l'importanza di ottenere una dettagliata conoscenza del moto del vitreo per la comprensione del meccanismo del distacco retinico, seppure non permettano alcuna valutazione quantitativa del fenomeno. Il problema è stato successivamente riconsiderato da David *et al.* [1998] che, tramite un'indagine analitica e numerica, hanno superato molte delle limitazioni dei precedenti lavori. In particolare gli autori hanno modellato la camera vitreale come una sfera posta in rotazione periodica ed il vitreo come una sostanza viscoelastica con le caratteristiche reologiche rilevate da Lee *et al.* [1992]. I risultati degli autori hanno mostrato come il moto all'interno del globo risulti sfasato rispetto al moto della parete. Gli autori hanno inoltre evidenziato come le tensioni che il fluido trasmette al contorno aumentino significativamente all'aumentare del raggio della sfera. Tale osservazione è stata interpretata come una possibile spiegazione del fatto che gli occhi miopi, tipicamente caratterizzati da dimensioni superiori, sono più frequentemente interessati dal distacco di retina. Gli autori hanno inoltre rilevato come la componente elastica del comportamento reologico del vitreo abbia un ruolo modesto rispetto a quella viscosa, sia sul moto del fluido che, soprattutto, sulle tensioni che esso trasmette al contorno.

Recentemente Repetto [2005] ha affrontato il problema del moto del vitreo nella camera vitreale mettendo in conto la reale geometria della stessa. Come evidenziato nella figura 1a, infatti, la presenza, nella parte anteriore del bulbo, del cristallino è responsabile di una rientranza che modifica significativamente la geometria sferica. L'autore ha trattato in problema analiticamente nel limite di fluido a bassa viscosità. Tale ipotesi risulta appropriata qualora il vitreo sia completamente liquefatto o sia stato sostituito, a seguito di un intervento chirurgico di vitrectomia, con fluidi tamponanti a modesta viscosità (spesso a seguito della rimozione del vitreo si pompa all'interno della camera vitreale aria, che viene poi naturalmente sostituita dall'umor acqueo, una sostanza dalle caratteristiche meccaniche assimilabili a quelle dell'acqua). L'autore ha messo in evidenza come la non sfericità del bulbo induca campi di moto significativamente diversi da quelli che si realizzano in un fluido viscoso contenuto in una sfera. In particolare, in prossimità della lente la velocità risulta diretta in direzione opposta a quella del moto istantaneo della parete e questo comporta, presumibilmente, la generazione di un vortice in tale regione.

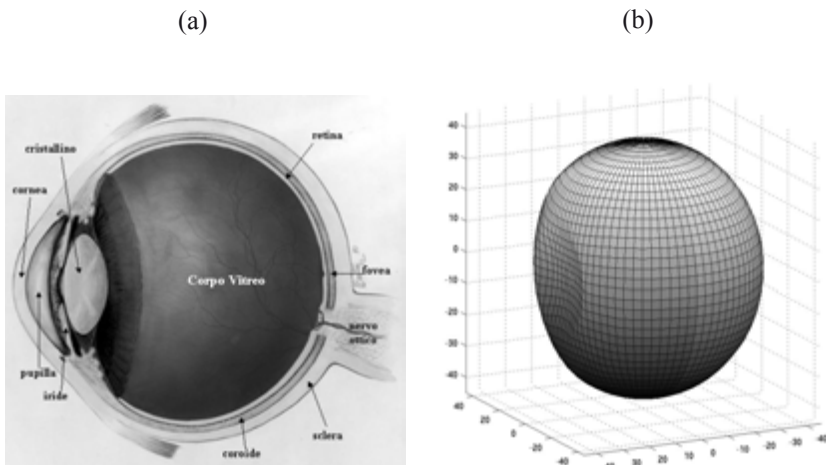


Figura 1. (a) schizzo di una sezione verticale dell'occhio umano.  
(b) rappresentazione tridimensionale del dominio utilizzato

Nel presente contributo si presentano i primi risultati di un'indagine sperimentale sul moto del vitreo all'interno della camera vitreale. Sono stati utilizzati due diversi modelli del bulbo: nel primo la geometria considerata è sferica, nel secondo il dominio è stato opportunamente deformato per mettere in conto la rientranza dovuta alla presenza delle lenti. In figura 1b è riportata una rappresentazione tridimensionale del dominio considerato. I movimenti saccadici, ovvero le rapide rotazioni del bulbo di ridirezionamento dell'asse visivo, sono stati schematizzati, in via semplificata e seguendo l'approccio di David *et al.* [1998], come movimenti periodici di opportuna ampiezza e frequenza.

Il presente articolo è organizzato come segue. Nel paragrafo 2 viene descritto l'apparato sperimentale. Il capitolo 3 è dedicato alla descrizione dei risultati conseguiti in geometria sferica mentre i risultati relativi al caso di dominio deformato sono riportati nel paragrafo 4. Segue infine un paragrafo conclusivo.

## 2. DESCRIZIONE DELL'APPARATO SPERIMENTALE

Il modello di camera vitreale utilizzato consiste in un cilindro in perspex suddiviso in due parti uguali, all'interno del quale è ricavata una cavità. Sono state effettuate prove sia utilizzando cavità di forma sferica che di forma sferica opportunamente deformata per mettere in conto la reale geometria della camera vitreale (figura 1b). Il raggio esterno del cilindro è di 120 mm, le dimensioni della cavità interna sono di circa 40 mm. La cavità ricavata nel cilindro viene riempita con glicerina pura al 98%, ovvero con un fluido Newtoniano di elevata viscosità. Questo significa che, in questa prima fase della ricerca, vengono trascurati gli effetti di viscoelasticità del vitreo. Si noti tuttavia che il lavoro teorico di David *et al.* [1998] ha posto in luce come la componente elastica del comportamento del vitreo abbia un ruolo modesto rispetto a quella viscosa. Essendo l'indice di rifrazione della glicerina pressoché identico a quello del Perspex sono stati evitati effetti di distorsione delle immagini dovute alla curvatura dell'interfaccia tra le superficie interna del contenitore e il fluido. Il cilindro viene montato sul perno di un motore elettrico tipo "brushless" controllato da calcolatore, a cui può essere assegnata un'arbitraria legge temporale di rotazione. La posizione istantanea dell'asse del motore viene monitorata tramite controllo analogico. Il motore è sincronizzato con un sistema di acquisizione PIV bidimensionale che è stato utilizzato per misurare i campi di moto del fluido. Le misure sono state effettuate sul piano diametrale ortogonale all'asse di rotazione. Le particelle traccianti utilizzate sono spere di vetro cave di diametro approssimativamente pari a 10  $\mu\text{m}$  e densità pari a quella della glicerina. Uno schema dell'apparato sperimentale è mostrato in figura 2.

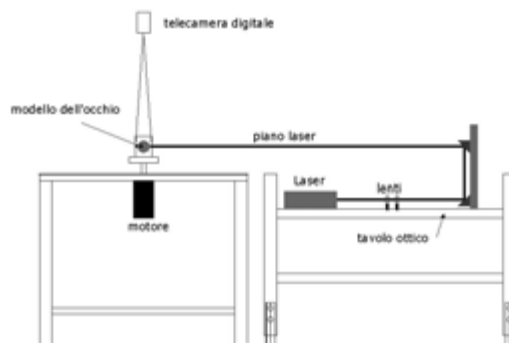


Figura 2. Schema dell'apparato sperimentale.

Ogni campo di velocità  $(u(x,y,t),v(x,y,t))$ , con  $u$  e  $v$  le componenti della velocità rispettivamente lungo  $x$  e  $y$ , è stato misurato 60 volte. Si è quindi potuto valutare un campo  $(U(x,y,t),V(x,y,t))$  media di insieme delle misure. Il corrispondente scarto quadratico medio è sempre risultato inferiore a qualche per cento dei valori di  $U$  e  $V$ . La risoluzione spaziale dei campi di velocità ha permesso di misurare un vettore velocità per  $1.5 \text{ mm}^2$ .

La frequenza di acquisizione del sistema PIV è pari a 10 Hz. Al fine di misurare l'andamento temporale del moto con maggior dettaglio sono state effettuate acquisizioni multiple, relative a diversi istanti nell'ambito del periodo delle rotazioni; si sono così ottenuti 40 campi di moto per ogni periodo.

L'analisi di cross-correlazione sulle immagini acquisite produce campi bidimensionali in cui i vettori sono distribuiti su una maglia cartesiana. Nel caso di esperimenti sul contenitore sferico, i dati sono stati successivamente interpolati su una griglia polare  $(r;\theta,\phi)$  ottenendo campi di moto in termini delle componenti della velocità  $u_r$  e  $u_\phi$ , rispettivamente in direzione radiale e circonferenziale. Sono stati implementati diversi algoritmi di interpolazione (Agüi e Jeménez, [1987]; Stüer e Blaser, [2000]) e a seguito di numerosi test di accuratezza è stato adottato un modello di interpolazione del prim'ordine. Al fine di valutare l'errore sulla stima del singolo vettore velocità interpolato, è stato adottata la tecnica Jackknife, in analogia con quanto proposto da Miller [1976]. L'errore stimato è risultato inferiore a quello commesso sulle velocità medie  $U$  e  $V$ , garantendo dunque che la procedura di interpolazione non ha introdotto errori aggiuntivi ai dati sperimentali. Nel caso, infine, di esperimenti su geometria sferica, a seguito della assialsimmetria del dominio, la distribuzione radiale della velocità è stata mediata in direzione circonferenziale. Nelle figure 3a,b sono mostrati due campi di moto, ottenuti rispettivamente nel caso di dominio sferico e sferico deformato.

I dati relativi a tutti gli esperimenti effettuati sono riportati in tabella 1 dove gli esperimenti su geometria sferica sono stati identificati con la sigla "sfr" e quelli su geometria deformato con "def".

Exp.	A [deg]	f [Hz]	v [ $10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ ]	W	Exp.	A [deg]	f [Hz]	v [ $10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ ]	W
sfr-1	10	1.00	3.79	5.25	def-1	5	1.00	6.30	3.99
sfr-2	20	1.00	6.58	3.99	def-2	10	1.00	7.62	3.75
sfr-3	5	1.00	6.25	4.10	def-3	10	1.50	7.45	4.95
sfr-4	10	0.50	6.79	2.77	def-4	10	1.25	6.98	4.52
sfr-5	10	1.25	7.16	4.27	def-5	10	1.75	7.12	3.58
sfr-6	30	1.00	6.73	3.94	def-6	10	2.00	7.22	5.12
sfr-7	40	1.00	6.5	4.01	def-7	10	2.50	7.02	6.02
sfr-8	10	1.50	6.11	5.07	def-8	20	2.50	7.13	5.97
sfr-9	10	1.75	6.26	5.41					
sfr-10	10	0.75	5.58	3.75					
sfr-11	20	1.50	6.29	5.00					
sfr-12	10	2.00	6.87	5.52					
sfr-13	10	2.50	6.94	6.14					
sfr-14	5	1.00	7.33	3.79					
sfr-15	10	1.25	7.37	4.21					
sfr-16	20	2.50	7.76	5.80					
sfr-17	10	2.00	6.64	5.61					
sfr-18	10	1.50	7.22	4.66					
sfr-19	10	1.75	7.13	5.01					
sfr-20	20	1.50	7.08	4.71					
sfr-21	10	2.50	6.98	6.12					

Tabella 1. Dati sperimentali relativi alle prove su geometria sferica (sfr) e deformato (def).

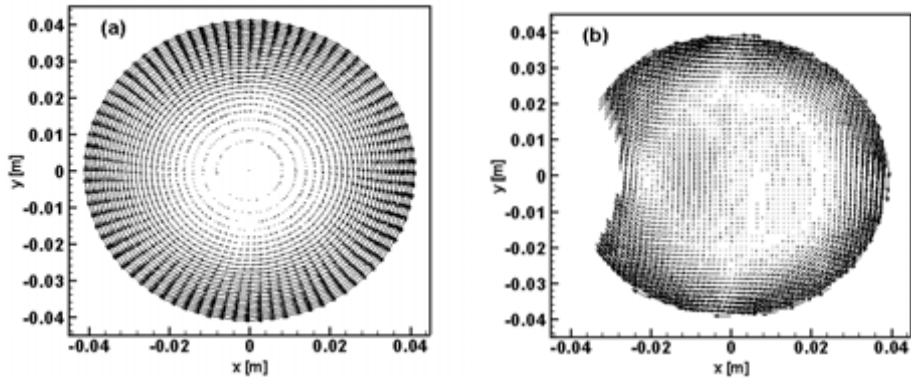


Figura 3. Esempi di campi di moto misurati. (a) dominio sferico, (b) dominio deformato.

### 3. RISULTATI: IL CASO DI GEOMETRIA SFERICA

#### 3.1 Visualizzazioni del campo di moto tridimensionale e studio teorico del moto

Nel problema considerato il moto è indotto dalla rotazione del dominio. La condizione di aderenza impone ovunque una velocità puramente circonferenziale su piani ortogonali all'asse di rotazione. È quindi lecito aspettarsi che il moto avvenga principalmente su tali piani. Tuttavia la tridimensionalità del dominio e la non linearità delle equazioni che governano il sistema possono generare moto anche al di fuori di piani ortogonali all'asse di rotazione. Al fine di verificare l'eventuale esistenza di tali moti sono state effettuate visualizzazioni all'interno del dominio immettendo, in prossimità della parete e appena al di sopra del piano equatoriale, un tracciante colorato.

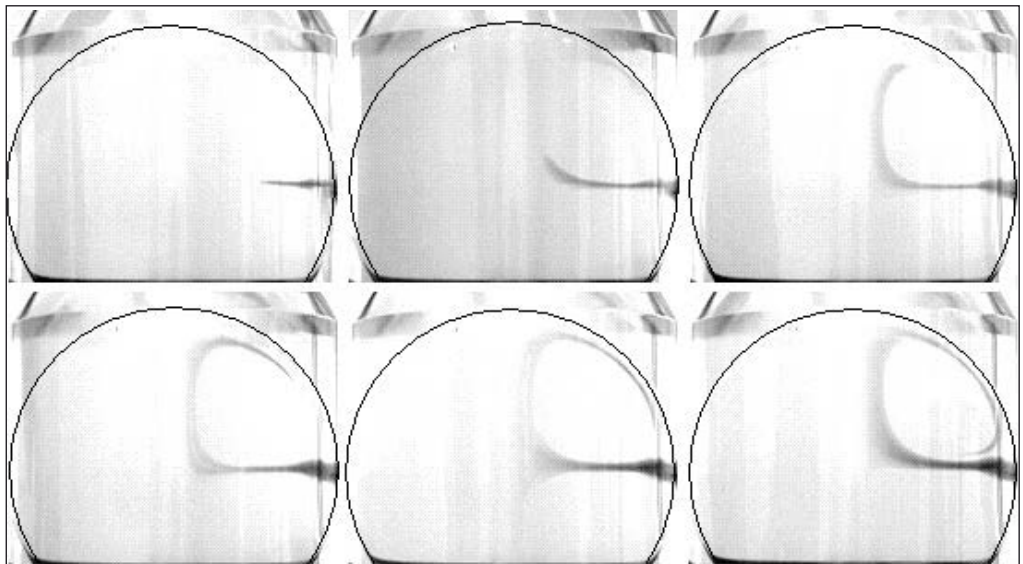


Figura 4. Visualizzazioni del campo di moto in falsi colori. Tempi crescenti da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso. Tra ogni immagine intercorre un tempo pari a 20 periodi ( $A=20^\circ$ ,  $f=2.5$  Hz).

In figura 4 è mostrata una sequenza di immagini (in scala di grigio) che illustra come, sovrapposto al moto primario su piani orizzontali, esista un moto secondario nella forma di due vortici toroidali, rispettivamente localizzati nell'emisfero nord ed in quello sud. Nell'emisfero nord le particelle fluide si muovono, mediamente, in direzione centripeta quando si trovano in prossimità del piano equatoriale, risalgono in prossimità dell'asse di rotazione e discendono quindi in prossimità del contorno. Tali moti secondari, la cui esistenza è stata evidenziata numericamente da David *et al* [1998], sono stati invariabilmente osservati, per ogni frequenza ed ampiezza delle oscillazioni. La intensità del moto secondario è tuttavia risultata sempre inferiore di 3-4 ordini di grandezza rispetto al moto primario circonferenziale.

La modesta entità delle componenti della velocità permette di trattare il problema secondo un approccio analitico semplificato. Supponendo di utilizzare un sistema di coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$ , con  $r$  coordinata radiale,  $\theta$  e  $\phi$  coordinate angolari rispettivamente di elevazione e azimutale, il vettore velocità  $\mathbf{u}$  risulta espresso tramite le componenti  $(u_r, u_\theta, u_\phi)$ . Essendo il dominio sferico il moto ha caratteristiche di assialsimmetria, ovvero nessuna variabile dipende dalla coordinata  $\phi$ . Sulla base delle visualizzazioni sperimentali è inoltre lecito trascurare le componenti lungo  $r$  e  $\theta$  della velocità, scrivendo dunque  $\mathbf{u}=[0, 0, u(r; \theta)]$ . Tali ipotesi sono alla base del lavoro di David *et al.* che viene nel seguito brevemente descritto per il caso di fluido Newtoniano. L'equazione di Navier e Stokes lungo  $\phi$  assume in questo caso la seguente forma lineare.

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (1)$$

con le condizioni al contorno

$$u_\phi = F(t) \sin \theta \quad (r = R), \quad (2)$$

$$u_\phi = 0 \quad (r = 0), \quad (3)$$

dove  $t$  rappresenta il tempo,  $\nu$  la viscosità cinematica del fluido ed  $R$  il raggio della sfera. Nel presente caso consideriamo, in analogia a quanto fatto da David *et al.* (1998), rotazioni periodiche del dominio, imponendo dunque  $F(t) = U \cos(\omega t)$ . La linearità della (1) suggerisce di cercare una soluzione a variabili separabili nella forma

$$u_\phi = e^{i\omega t} g(r) \sin \theta + c.c. \quad (4)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato. Risulta immediato mostrare che le funzione  $g$  ammette la soluzione

$$g(r) = c j_1(kr), \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad (5a,b)$$

con  $j_1$  funzione di Bessel sferica di prima specie e

$$c = \frac{U}{2 j_1(kR)}. \quad (6)$$

Nel seguito i risultati teorici ottenuti con il modello sopra descritto verranno comparati con le misure sperimentali.

### 3.2 Risultati sperimentali

Come precedentemente descritto si è utilizzato un modello in scala amplificata della camera vitreale. Al fine di utilizzare i risultati conseguiti valutazioni quantitative del moto del vitreo all'interno dell'occhio è dunque necessario mettere in conto gli effetti di scala derivanti dalle diverse dimensioni del dominio. Adimensionalizzando, nell'equazione (1), la velocità con  $U$ , il tempo con  $1/\omega$  e la coordinata radiale con  $R$  è facile mostrare come l'unico parametro adimensionale che emerge sia il numero di Womersley, definito come

$$W = \sqrt{\frac{\omega R^2}{\nu}}$$

che rappresenta il rapporto tra le dimensioni del dominio e lo spessore dello strato limite oscillante alla parete. Gli esperimenti sono dunque stati condotti conservando tale parametro tra il prototipo ed il modello. In particolare si è assunta una viscosità del vitreo (prototipo) pari a  $\nu_p = 1.4 \cdot 10^{-4}$  (Lee *et al.*, [1992]) e un raggio della camera vitreale pari a  $R_p = 0.012$  m. In figura 5 sono riportati i confronti tra i risultati sperimentali e le previsioni teoriche in termini del modulo della funzione  $g(r)$ , espressa dalla (5a), adimensionalizzata con il suo valore in  $R$ . Per aiutare la leggibilità del grafico non sono stati riportati le curve relative a tutti gli esperimenti. Ogni curva corrisponde ad un numero di Womersley diverso con valori che vanno da 2.4 dell'esperimento 4 a 6.77 dell'esperimento 21. In tutti i casi il confronto con le distribuzioni teoriche risulta essere più che soddisfacente, confermando la validità delle semplificazioni introdotte nell'analisi teorica descritta precedentemente.

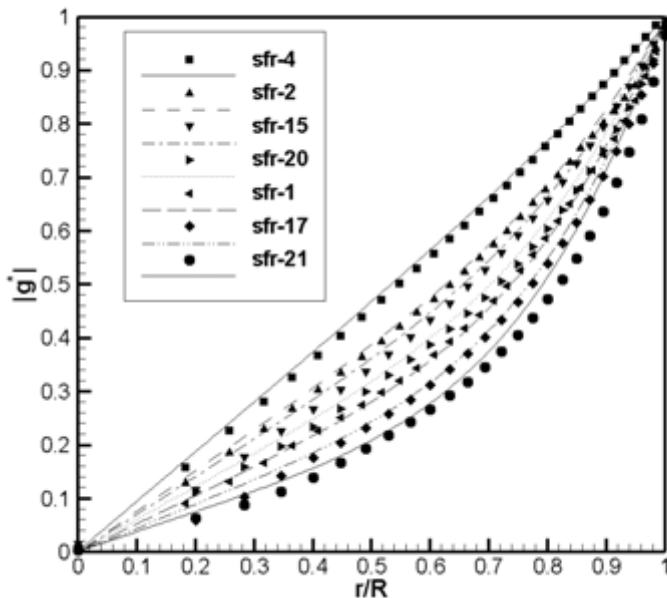


Figura 5. Distribuzioni lungo il raggio della funzione adimensionale  $|g^*| = g(r)/|g(R)|$  per diversi esperimenti. I simboli indicano le misure sperimentali e le linee le corrispondenti previsioni teoriche



#### 4. RISULTATI: IL CASO DI GEOMETRIA SFERICA DEFORMATA

Nel momento in cui il dominio utilizzato non è perfettamente sferico non è più possibile interpretare i dati con un modello teorico semplice come quello descritto in precedenza. Nel paragrafo introduttivo si erano menzionati i risultati ottenuti da Repetto [2005] nel caso di geometria deformata, come nel presente lavoro, ma nell'ipotesi di fluido in moto irrotazionale. Il campo di moto anche se con le ipotesi menzionate risultava essere sostanzialmente diverso dal caso sferico, suggerendo la possibilità di formazione di una struttura vorticoso legata a fenomeni di distacco dello strato limite in corrispondenza della deformazione (ingombro dovuto alla presenza del cristallino). I primi risultati sperimentali qui riportati confermano che tale supposizione era corretta, mostrando come, all'interno di un periodo di un movimento saccadico sinusoidale, si ha la formazione di una struttura vorticoso in vicinanza del massimo ingombro durante ogni semiperiodo e che tale struttura migri verso il centro del dominio. A partire dai campi di moto bidimensionali ottenuti dalle misure PIV, l'esatta posizione del vortice è stata individuata utilizzando un algoritmo di ricerca dei vortici proposto da Graftieaux *et al.* [2001]. Prima di scegliere il suddetto algoritmo sono stati implementati diversi metodi di ricerca di strutture vorticose, come ad esempio la valutazione del cosiddetto parametro di Okubo-Weiss e dell'autovalore del tensore dei gradienti di velocità denominato swirling strength. Tuttavia, entrambi i metodi non si sono dimostrati efficienti nelle misure qui descritte, in particolare i due metodi non essendo invarianti rispetto a delle rotazioni rigide del sistema di riferimento, non riuscivano ad isolare la struttura vorticoso di piccola scala rispetto al moto medio del fluido anch'esso prevalentemente di rotazione. Al contrario, il metodo proposto da Graftieaux *et al.* [2001] è risultato essere non influenzato dalla rotazione d'insieme dell'intero dominio, riuscendo ad identificare correttamente la posizione del vortice. Tale metodo prevede di valutare per ogni punto P del dominio discreto il valore di una funzione scalare  $\Gamma_1$  definita come segue:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{N} \sum_S \sin \theta_M$$

dove S è una superficie rettangolare intorno a P contenente N punti in cui si è misurata la velocità e  $\theta_M$  è l'angolo tra il vettore velocità nell'ennesimo punto e il raggio vettore che unisce tale punto al punto P in cui si valuta  $\Gamma_1$ . Tale funzione scalare è adimensionale e assume valori compresi tra -1 e 1, il centro del vortice è individuato dal massimo locale della funzione  $\Gamma_1$ , opportunamente sogliata per eliminare valori inferiori a 0.9. Un esempio della formazione ed evoluzione spaziale della struttura vorticoso rilevata nelle misure sperimentali è riportato in figura 6. In tale figura sui campi di moto 2D sono state sovrapposte in scala di grigio le curve di livello della funzione  $\Gamma_1$ . La regione di massimo, contraddistinta da un colore più scuro, è centrata sul centro del vortice. Nella figura 6 sono riportati otto campi vettoriali che rappresentano otto diversi istanti all'interno di un periodo del movimento saccadico sinusoidale equispaziati nel periodo stesso. Il primo campo corrisponde al massimo di velocità circonferenziale della parete del dominio ( $t=0$ ) con un senso di rotazione oraria. Si nota la presenza di un vortice già ben formato in corrispondenza della deformazione e un secondo vortice in prossimità del centro di rotazione, il quale è il residuo del vortice formatosi in corrispondenza dell'ingombro il semiperiodo precedente. A partire da questo campo di moto, nei successivi, corrispondenti agli istanti  $t= T/8, T/4, 3/8T, T/2, 5/8T, 3/4T$  e  $7/8T$ , si individua chiaramente la formazione del vortice negli istanti  $t= 3/8T$  e  $7/8T$  e il suo migrare verso il centro di rotazione nelle altre parti del periodo.

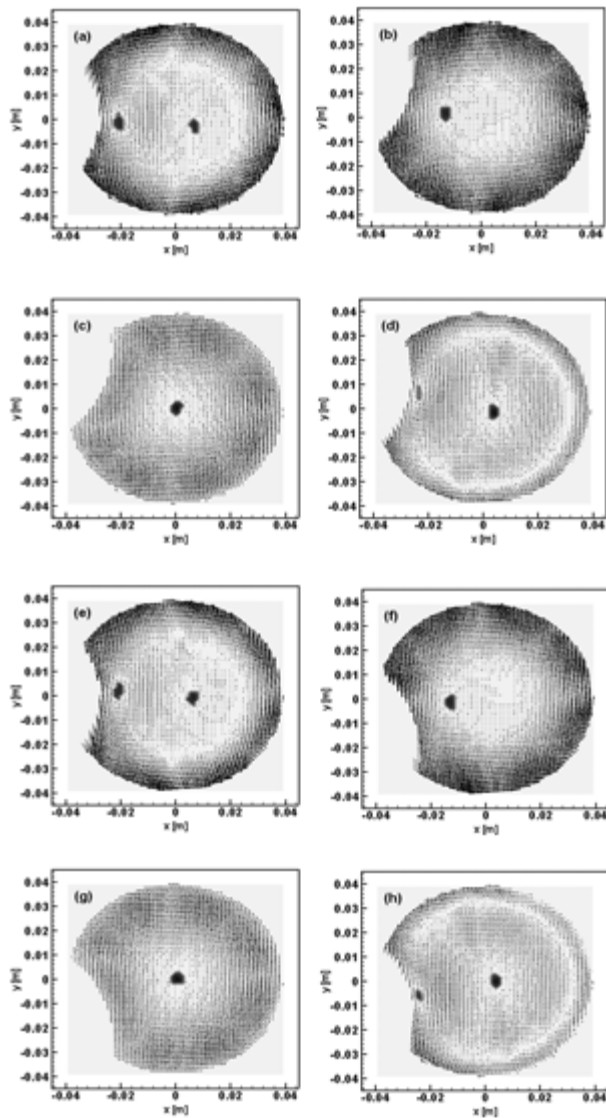


Figura 6. Campi di moto 2D con sovrapposta la distribuzione delle curve di livello della funzione  $\Gamma$  al variare del tempo all'interno di un periodo  $T$  dell'esperimento def-8. a)  $t=0$ ; b)  $t=T/8$ ; c)  $t=T/4$ ; d)  $t=3/8T$ ; e)  $t=T/2$ ; f)  $t=5/8T$ ; g)  $t=3/4T$ ; h)  $t=7/8T$ .

Gli istanti della formazione corrispondono ai momenti successivi all'inversione di velocità circonferenziale. In realtà, ci vuole un certo tempo dopo tale inversione per il formarsi di una struttura vorticoso. Infatti, a partire dalla posizione del periodo corrispondente all'annullarsi della velocità della parete, la distribuzione radiale della velocità presenta un'inversione che a partire dalla parete interessa strati di fluido sempre più interni. Il momento di distacco del vortice corrisponde all'istante in cui tale inversione raggiunge il massimo della deformazione. Da quel momento in poi il vortice si sposta quasi orizzontalmente verso il centro del dominio per poi perdere la sua intensità. Analogo

comportamento è stato rilevato in tutti gli esperimenti condotti con il dominio deformato, indipendentemente dall'ampiezza dell'oscillazione e dalla frequenza. La formazione del vortice è quindi dovuta esclusivamente alla geometria del dominio.

## 5. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro sono state presentate misure bidimensionali del campo di moto del vitreo oculare sollecitato da oscillazioni periodiche di tipo sinusoidale. Due configurazioni geometriche sono state studiate in dettaglio, una geometria regolare sferica ed una geometria deformata, più simile alla forma reale della camera vitreale umana. Nel primo caso i risultati sperimentali, in termini di profili radiali della velocità circonferenziale, sono stati confrontati con un modello teorico semplificato. Il confronto tra teoria ed esperimenti ha mostrato un buon accordo, confermando la validità della teoria formulata da David *et al.* [1998]. Una seconda serie di esperimenti è stata condotta con la geometria deformata dalla presenza della lente evidenziando alcune caratteristiche peculiari della dinamica del vitreo oculare in presenza di un dominio non regolare. Infatti, in tutti gli esperimenti svolti si è osservata la formazione di una struttura vorticosa in prossimità del massimo ingombro della lente, la quale poi tendeva a migrare verso il centro di rotazione del dominio. Questo aspetto rappresenta una prima sostanziale differenza con i campi di moto misurati nel caso sferico, in cui non si ha la formazione di nessun moto di piccola scala. I risultati preliminari qui presentati riguardano unicamente le strutture del campo di moto. Tuttavia, un'analisi più accurata verrà condotta per capire come altre grandezze dinamiche vengano modificate dalla presenza di una irregolarità del dominio. Particolare attenzione verrà dedicata alla valutazione delle tensioni tangenziali e normali sul contorno del dominio, in quanto tale contorno rappresenta la retina dell'occhio umano. Una quantificazione degli sforzi indotti dal moto del vitreo oculare sulla retina può avere ricadute in campo clinico oculistico nella comprensione dell'insorgenza di alcune patologie legate al distacco della retina stessa.

*Il presente lavoro è stato cofinanziato dal MIUR nell'ambito del progetto FIRB2001 (RBAU01Z44F005). Gli autori ringraziano l'Ing. Giancarlo Cassini per aver contribuito alla messa a punto dell'apparato sperimentale e il Prof. Giovanni Seminara per le utili discussioni. Un particolare ringraziamento al Dott. Andrea Scupola che ha fornito indicazioni sugli aspetti clinici del problema. Federica Di Battista, Claudia Chiesura e Elisa Colangeli hanno contribuito alla presente ricerca durante le loro tesi di laurea.*

### Bibliografia:

- Agüi, J. C. e Jiménez, J. 1987. *On the performance of particle tracking*. J. Fluid Mech., 185, 447-468.
- David, T., Smye, S. & James, T. 1998. *A model for the fluid motion of vitreous humour of the human eye during saccadic movements*. Phys. Med. Biol. 43, 1385-99.
- Graftieaux, L., Michard, M. & Grosjean, N. 2001. *Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows*. Meas. Science and Tech., 12, 1422-1429
- Lee B, Litt M & Buchsbaum, G. 1992. *Rheology of the vitreous body. Part I: viscoelasticity of human vitreous*, Biorheology, 29, 521-33.
- Lindner, K. 1933. *Über die Herstellung von Modellen zu Modellversuchen der Netzhautabhebung*, Klin. Mbl. Augenheilk. 90, 289-00 (in Tedesco).
- Miller, RG. 1974. *Biometrika*, 61, 1-17.
- Repetto, R. 2005. *An analytical model of the dynamics of the liquefied vitreous induced by saccadic eye movements*. In corso di pubblicazione su Meccanica.
- Rosengren, B. & Östrelin, S. 1976. *Opthalmologica*, 73, 513-24.
- Stüer, H. & Blaser, S. 2000. *Flow, Turbulence and Combustion*. 64, 215-232.

# Simulation of the three-dimensional flow around a square cylinder between parallel walls at moderate Reynolds numbers

Simone Camarri, Maria-Vittoria Salvetti  
*Aerospace Engineering Department, University of Pisa, Italy*  
*E-mail: s.camarri@ing.unipi.it, mv.salvetti@ing.unipi.it*

Marcelo Buffoni  
*Aeronautical and Space Engineering Department, Politecnico of Torino, Italy*  
*E-mail: marcelo.buffoni@polito.it*

Angelo Iollo  
*Aeronautical and Space Engineering Department, Politecnico of Torino, Italy and Bordeaux Applied Mathematics Laboratory, University of Bordeaux I, France*  
*E-mail: angelo.iollo@polito.it, Angelo.Iollo@math.u-bordeaux1.fr*

*Keywords:* three-dimensional bluff-body wake, confined square cylinder, numerical simulation.

**SUMMARY:** Numerical simulations of the flow around a square cylinder between two parallel walls (blockage ratio equal to 12.5%) are presented. Reynolds numbers, based on the cylinder side length and on the maximum inflow velocity, in the range  $100 \div 300$  are considered. The numerical solver is based on P1 finite-element discretization of the viscous terms and on a finite-volume treatment of the convective ones on unstructured tetrahedral grids. Numerical finite-volume fluxes are computed through the Roe scheme and a MUSCL-type reconstruction, which leads to second-order accuracy and to the introduction of a very small amount of numerical viscosity acting only on the highest resolved frequencies. Preconditioning is used to deal with low Mach numbers, in a formulation which maintains time consistency, and time advancing is implicit and second-order accurate. Validation is performed by comparing the results of 2D simulations, carried out on progressively refined grids, with those of 2D simulations in the literature, characterized by different numerical methods and grids. 3D simulations are carried out at  $Re=200$  and 300 and the onset of three-dimensionality in the wake after an impulsive start-up is analyzed.

## 1. INTRODUCTION

Bluff-bodies may be used in laminar channel flows for enhancing transport and mixing. Moreover, when bluff-bodies with separation points fixed by the geometry are considered, this configuration is also interesting for experimental devices (e.g. vortex flowmeters). Recently, the wake of unconfined square cylinders in uniform flow at low Reynolds numbers has extensively been studied. However, only a few studies have investigated the flow around a square cylinder symmetrically positioned in laminar flow between parallel walls (Galletti et al. [2004], Breuer et al. [2000], Li and Humphrey [1995], Mukhopadhyay et al. [1992], Davis et al. [1984]). These studies are carried out at low Reynolds numbers ( $Re \leq 1200$ , based on the square side length and on the maximum velocity of the incoming Pouseuille flow) and they are all two-dimensional. In particular, in Breuer et al. [2000] well resolved 2D simulations are carried out at Reynolds numbers up to  $Re = 300$  for a blockage ratio equal to 12.5%. In the unconfined case it is shown (Robichaux et al. [1999] and Luo et al. [2003]) that, for Reynolds numbers around 160 three dimensional disturbances become unstable in the cylinder wake. Although the effect of the confining walls on the critical Reynolds number at

which three-dimensional instability of the wake occurs is not clear, it might be possible that the 2D approximation used in Breuer et al. [2000] is not valid for all the range of considered Reynolds numbers, as also suggested by the authors themselves. The objective of the present work is to carry out 3D simulations of the same configuration considered in Breuer et al. [2000] at Reynolds numbers for which 3D structures might be present in the wake, and to compare our results with the corresponding ones obtained under the hypothesis of two-dimensionality of the flow. Thus, 3D effects on the aerodynamic forces can be characterized for this case and the formation and dynamics of the 3D vortical structures in the wake can be analyzed. To this purpose, the code AERO is used, which is a 3D solver for the Navier-Stokes equations based on a mixed finite-volume/finite-element formulation applicable to unstructured grids (Farhat et al. [1999]), briefly described in Section 2. The test-case configuration and the main simulation parameters are described in Section 3. The validation of the numerical approach and the analysis of the sensitivity to grid refinement is carried out by comparing the results of 2D simulations at different Reynolds numbers with those in Breuer et al. [2000] and in Galletti et al. [2004] (Section 4). 3D simulations carried out at  $Re=200$  and  $300$  are then presented in Sec. 5; in particular, the main features of the wake dynamics and structure are illustrated.

## 2. NUMERICAL INGREDIENTS

The Navier-Stokes equations for compressible flows have been discretized in space using a mixed finite-volume/finite-element method applied to unstructured tetrahedrizations. The adopted scheme is vertex centered, i.e. all degrees of freedom are located at the vertices. P1 Galerkin finite elements are used to discretize the diffusive terms.

A dual finite-volume grid is obtained by building a cell  $C_i$  around each vertex  $i$  through the rule of medians. The convective fluxes are discretized on this tessellation, i.e. in terms of fluxes through the common boundaries shared by neighboring cells.

The Roe scheme (Roe [1981]) represents the basic upwind component for the numerical evaluation of the convective fluxes  $\mathcal{F}$ :

$$\Phi^R(W_i, W_j, \vec{n}) = \frac{\mathcal{F}(W_i, \vec{n}) + \mathcal{F}(W_j, \vec{n})}{2} - \gamma_s P^{-1} |P\mathcal{R}| \frac{W_j - W_i}{2} \quad (1)$$

in which  $\Phi^R(W_i, W_j, \vec{n})$  is the numerical approximation of the flux between the  $i$ -th and the  $j$ -th cells,  $W_i$  is the solution vector at the  $i$ -th node,  $\vec{n}$  is the outward normal to the cell boundary and  $\mathcal{R}(W_i, W_j, \vec{n})$  is the Roe matrix. The matrix  $P(W_i, W_j)$  is the Turkel-type preconditioning term, introduced to avoid accuracy problems at low Mach numbers (Guillard and Viozat [1999]). Note that, since it only appears in the upwind part of the numerical fluxes, the scheme remains consistent in time and can thus be used for unsteady flow simulations. Finally, the parameter  $\gamma_s$ , which multiplies the upwind part of the scheme, permits a direct control of the numerical viscosity, leading to a full upwind scheme for  $\gamma_s = 1$  and to a centered scheme when  $\gamma_s = 0$ . The spatial accuracy of this scheme is only first order. The MUSCL linear reconstruction method (“Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws”), introduced by Van Leer [1977], is employed to increase the order of accuracy of the Roe scheme. This is obtained by expressing the Roe flux as a function of the reconstructed values of  $W$  at the cell interface:  $\Phi^R(W_{ij}, W_{ji}, \vec{n}_{ij})$ , where  $W_{ij}$  is extrapolated from the values of  $W$  at nodes  $i$  and  $j$ . A reconstruction using a combination of different families of approximate gradients (P1-elementwise gradients and nodal gradients evaluated on different tetrahedra) is adopted, which allows a numerical dissipation made of sixth-order space derivatives to be obtained. The MUSCL reconstruction is described in detail in Camarri et al. [2004], in which

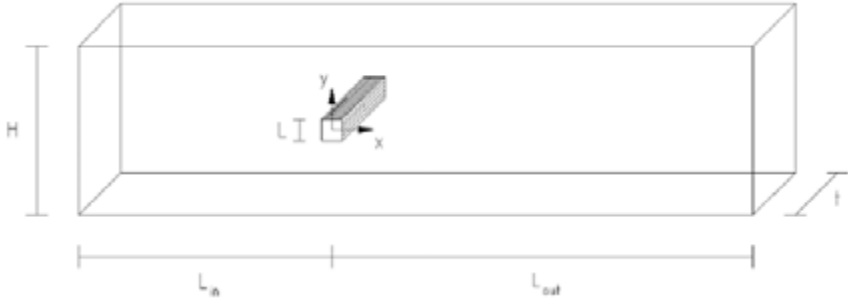


Figure 1: *Computational domain*

the capabilities of this scheme in concentrating the numerical viscosity effect on a narrow-band of high-frequency fluctuations is also discussed.

An implicit time marching algorithm is used in the present study, based on a second-order time-accurate backward difference scheme. A first-order semi-discretization of the jacobians is used together with a defect-correction procedure; the resulting scheme is second-order accurate in time.

More details on the numerical ingredients used in the present work can be found in Farhat et al. [1999] and in Camarri et al. [2004].

### 3. TEST-CASE DESCRIPTION AND SIMULATION PARAMETERS

The flow around a square cylinder symmetrically positioned between two parallel walls is considered here; this configuration and the adopted frame of reference are sketched in Fig. 1. The ratio between the cylinder edge length  $L$  and the distance between the walls  $H$  is  $L/H = 1/8$ . The incoming flow is a laminar Poiseuille flow directed in the  $x$  direction and the considered Reynolds numbers, based on the maximum velocity of the incoming flow and on  $L$ , range between 100 and 300. Steger-Warming decomposition is used to impose non-reflective inflow and outflow boundary conditions. At the inflow the Poiseuille flow is assumed to be undisturbed. Periodic boundary conditions are imposed in the spanwise direction and no-slip conditions are forced on the cylinder and on the parallel walls. Two different computational domains have been used, for carrying out 2D and 3D simulations, which differ only for the spanwise extent of the domain. In both cases, with reference to Fig. 1,  $L_{in}/L = 12$  and  $L_{out}/L = 20$ . For 2D simulations, the spanwise length adopted is  $t/L = 0.6$ , and it has been systematically checked that the simulated spanwise velocity was negligible. For the 3D simulations, the spanwise length of the domain is  $t/L = 6$ . This choice has been made following the indications given in Sohankar et al. [1999] and Saha et al. [2003] for the numerical study of the three-dimensional wake instabilities of a square cylinder in an open uniform flow. No indication is available in the literature for the case here considered.

Grid convergence tests have been carried out in the 2D simulations using three grids, mainly differing for the spatial resolution in proximity of the cylinder. Details of the grids are reported in Tab. 1. We remind that the grids are unstructured and made of tetrahedral elements.

The grid GR4, used for the 3D simulations, has been built by replicating the grid GR1 (see Tab. 1) ten times in the spanwise direction. The details of GR4 are also reported in Tab. 1.

Since we intend to simulate an incompressible flow, the simulations have been carried out by assuming that the maximum Mach number of the inflow profile is  $M = 0.1$ . This value allows

grid	total number of nodes	nodes on the cylinder perimeter	$t/L$
GR1	$7.5 \cdot 10^5$	250	0.6
GR2	$6.6 \cdot 10^5$	210	0.6
GR3	$6.0 \cdot 10^5$	170	0.6
GR4	$6.6 \cdot 10^6$	250	6.0

Table 1: Details of the grids used in the simulations

compressibility effects to be reasonably neglected in the results and do not pose serious problems for the numerics. Moreover, the preconditioning described in Sec. 2 is used to increase the accuracy of the results. In our preliminary simulations it was observed that the preconditioner leads to a more accurate value of the pressure coefficient near the stagnation points in the upwind cylinder face, improving the mean value of the drag coefficient. The time fluctuations of the force coefficients were insensitive to the preconditioner. Concerning the numerical viscosity, the upwind parameter  $\gamma$  was set to  $\gamma = 1.0$  on the nodes within a distance equal to  $0.1L$  from the cylinder and  $\gamma = 0.1$  in the rest of the domain. This choice ensured the stability of all the simulations carried out and, at the same time, allowed the preconditioner to be particularly effective in the proximity of the cylinder.

#### 4. VALIDATION

In order to validate the numerical approach and to perform a grid convergence study, 2D numerical simulations have been carried out for  $Re=100, 180$  and  $300$ , on grids GR1, GR2 and GR3. The results have been compared with those obtained for the same configuration in Breuer et al. [2000] and in Galletti et al. [2004], with different numerical methods and grid resolutions. The main bulk parameters characterizing the aerodynamics forces acting on the cylinder are shown in Tab. 2; as can be seen the agreement with the results obtained in the literature is satisfactory. Moreover, it may be concluded that grid independence has almost been reached, since in all cases the difference between the parameter values obtained with the different grids is very low ( $\leq 2\%$ , except for  $A_{CD}$ , which assumes, however, almost negligible values in most cases). Note that for the Strouhal number, for which data are available from both the reference works, the scatter between our results is lower than that between the data in the literature.

As an example of the vorticity fields typical of these 2D simulations, Fig. 2 shows the instantaneous vorticity isocontours obtained in the simulation at  $Re=180$  on grid GR1. It is worth noting the vertical position of the vortices is opposite with respect to the one in the classical von Kármán street; indeed, clockwise vortices, which form from the upper edge of the cylinder, are located lower in the street than the counterclockwise ones. This behavior is typical of bluff-body flows between parallel walls, and has been found, for instance, in Galletti et al. [2004], for the same configuration as the one considered here, and in Zovatto and Pedrizzetti [2001], for a confined circular cylinder flow.

Although this peculiar structure of the vortex street, at  $Re = 100$  and  $180$  the behavior of the aerodynamic forces is the one typically found in 2D simulations of bluff body flows; indeed, as shown in Fig. 3 for  $Re = 180$ , the time variation of the lift coefficient is perfectly periodic at the shedding frequency, while the  $C_D$  also exhibits a perfectly periodic oscillation at the harmonic frequency (not shown here for sake of brevity). At  $Re = 300$  the lift coefficient still shows periodic oscillations in time but with an amplitude modulation having a period of approximately three shedding cycles. A similar behavior, which is absent in 3D simulations (see Sec. 5), has been observed

	Re	St	$\overline{C}_D$	$A_{C_D}$	$A_{C_L}$
GR1	300	0.1250	1.6205	0.4889	3.4019
GR2	300	0.1234	1.6359	0.5151	3.4635
GR3	300	0.1237	1.6509	0.5191	3.4807
Breuer et al.	300	0.1271	1.8603	0.5081	3.3534
Galletti et al.	300	0.1320	—	—	—
GR1	180	0.1404	1.3659	0.0463	0.9303
GR3	180	0.1388	1.3803	0.0459	0.9423
Breuer et al.	180	0.1440	1.3250	0.0490	0.9090
Galletti et al.	180	0.1370	—	—	—
GR1	100	0.1368	1.3758	0.0065	0.3715
GR3	100	0.1362	1.3820	0.0066	0.3638
Breuer et al.	100	0.1391	1.3500	0.0077	0.3835
Galletti et al.	100	0.1386	—	—	—
GR4(3D)	300	0.1345	1.4596	0.0876	1.1889

Table 2: Main bulk coefficients characterizing the aerodynamics forces acting on the cylinder.  $St$  is the shedding frequency adimensionalized with  $L$  and the maximum velocity of the incoming flow,  $\overline{C}_D$  is the time averaged drag coefficient,  $A_{C_D}$  and  $A_{C_L}$  are the maximum amplitude of the oscillations of the drag and lift coefficients respectively.

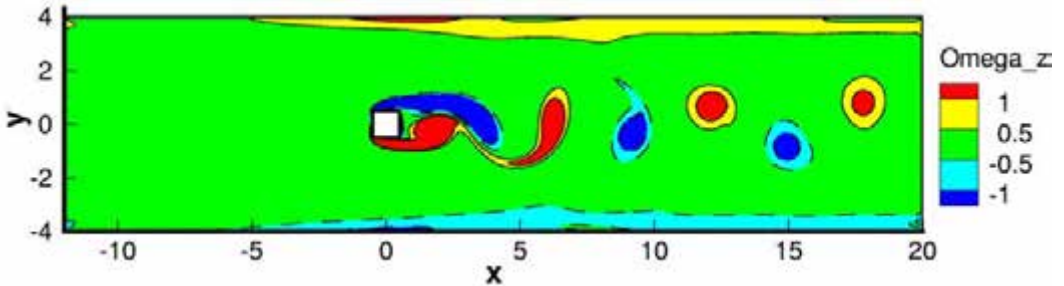


Figure 2: Instantaneous vorticity isocontours obtained in the 2D simulation at  $Re=180$  on grid GR1.

in other 2D simulations at the same Reynolds number of the flow around unconfined (Sohankar et al. [1999]) and confined (Bruneau, private communication) square cylinders, and might be interpreted as a signal of the unsuitability of 2D simulations for this Reynolds number.

### 5. 3D SIMULATIONS

3D simulations have been carried on grid GR4 at  $Re=200$  and  $300$ . For the flow around unconfined square cylinders, at these Reynolds numbers, 3D structures are present in the wake showing the main characteristics of the so called *B transition mode* (see Luo et al. [2003] and Robichaux et al. [1999]). Our simulations are initiated from an impulsive start-up and the transient phase has been recorded and analyzed in order to investigate the mechanisms of formation of 3D structures.

In Figs. 4 and 5 the time behavior of the lift coefficient is shown for  $Re = 200$  and  $Re = 300$  respectively. The values of the maximum and minimum spanwise velocity in the field are also



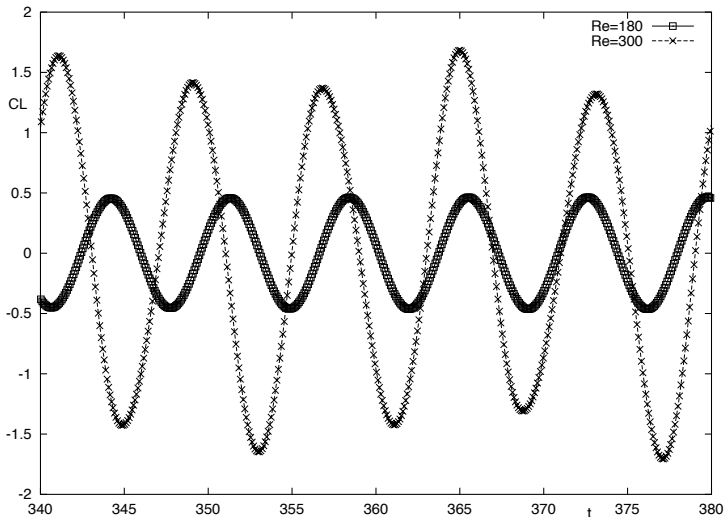


Figure 3: Time variation of the lift coefficient in 2D simulations at  $Re=180$  and  $Re=300$  on grid GR1

reported as an indicator of the occurrence of 3D phenomena in the flow. As can be seen, at  $Re = 200$ , first an almost 2D vortex shedding takes place, characterized by large amplitude oscillations ( $60 < t < 120$ ). 3D phenomena grow more slowly and their effects on the aerodynamic forces become visible only for  $t > 120$ , with a significant reduction of the oscillations amplitude of  $C_L$  and of the mean value of the drag coefficient (see Tab. 2), due to the loss of coherence of the vortex shedding in the spanwise direction. Conversely, at  $Re = 300$ , as expected, the 3D instabilities grow more rapidly and 3D effects on the aerodynamic forces are already significant when the vortex shedding phenomenon begins to take place; thus, one may say that vortex shedding forms as three-dimensional.

Let us analyze now in more details the form of the 3D instabilities and structures. Two different instability modes, initially identified in circular cylinder flows, have also been found for unconfined square cylinders in experiments (Luo et al., [2003]) and in the Floquet instability analysis (Robichaux et al., [1999]). The first one, mode A, occurs at lower  $Re$  and is characterized by the formation of large scale and wavy vortex loops that connect the spanwise von Kármán vortices. On the other hand, mode B is characterized by shorter, finer scaled vortex loops. For unconfined square cylinders, mode A was found to occur at  $Re \simeq 160$  with a spanwise wavelength of  $5.2L$ , while mode B at  $Re = 190 \div 200$  with a spanwise wavelength of  $1.2L$ . A third instability mode having a spanwise wavelength of  $2.8L$  (mode S) was also identified through the Floquet analysis, which was not, however, observed in the experiments. In order to visualize the vortex loops typical of 3D instability, in Fig. 6 two isosurfaces of the streamwise vorticity, obtained in the simulation at  $Re = 200$ , are shown at a time, during the transient, at which the spanwise velocity has reached approximately the 10% of the maximum inflow velocity. The structures in Fig. 6 are those typical of mode A of instability (see, for instance, the visualizations in Robichaux et al., [1999]), which, however, in our case have a spanwise wave length of approximately  $6D$ , due to the imposed periodicity at this length in the spanwise direction. The predominance of mode A is maintained also at the latest stages of the transient available at present in our simulation; thus, it is plausible to conclude that at this  $Re$

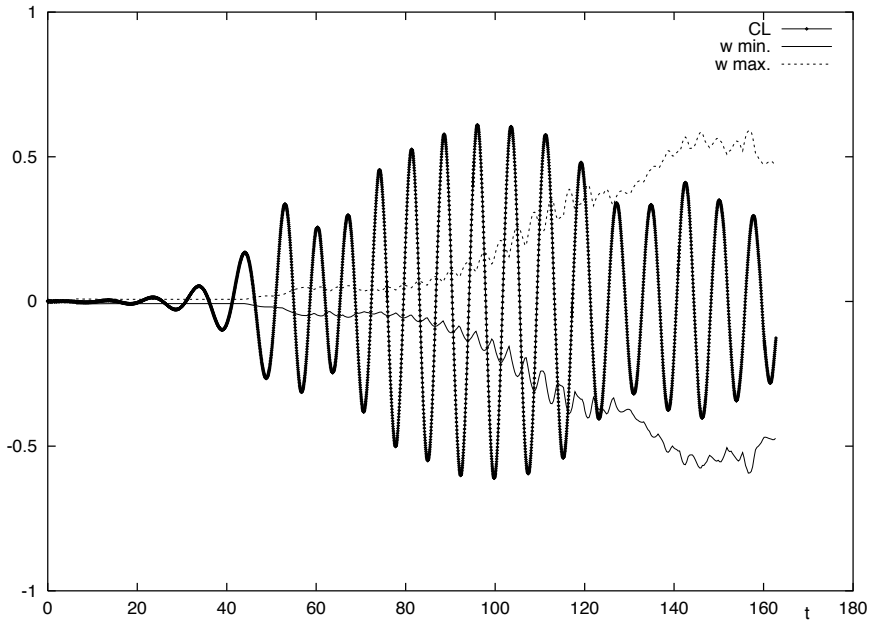


Figure 4: Time variation of the lift coefficient and of the maximum and minimum of the spanwise velocity obtained in the 3D simulation at  $Re=200$ .

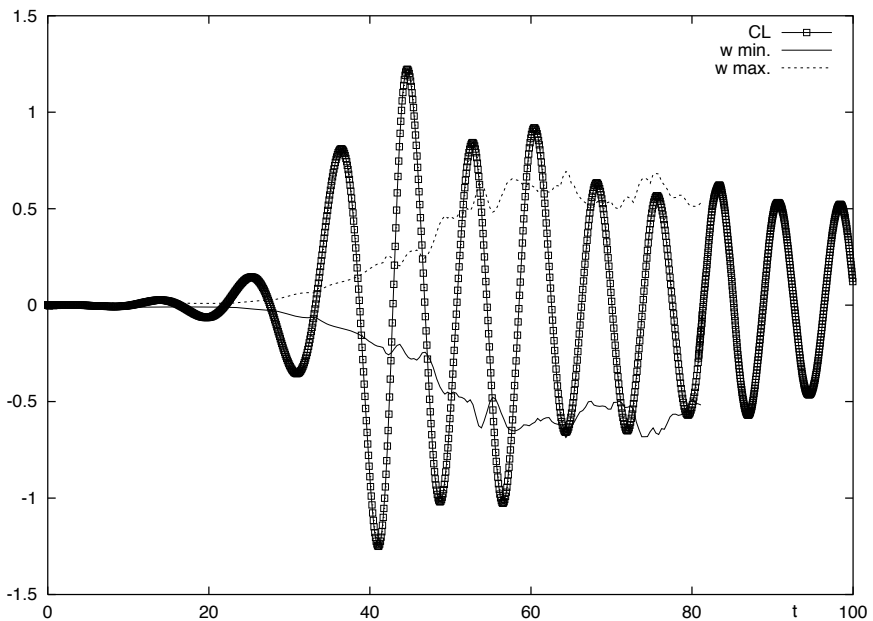


Figure 5: Time variation of the lift coefficient and of the maximum and minimum of the spanwise velocity obtained in the 3D simulation at  $Re=300$ .

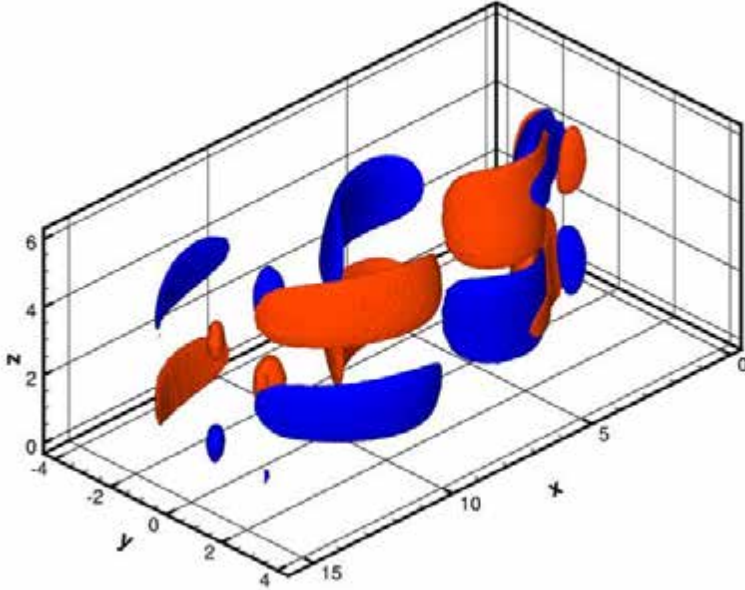
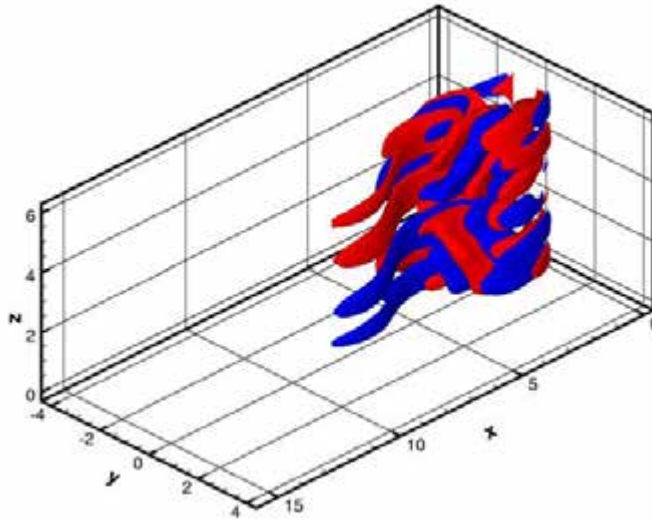
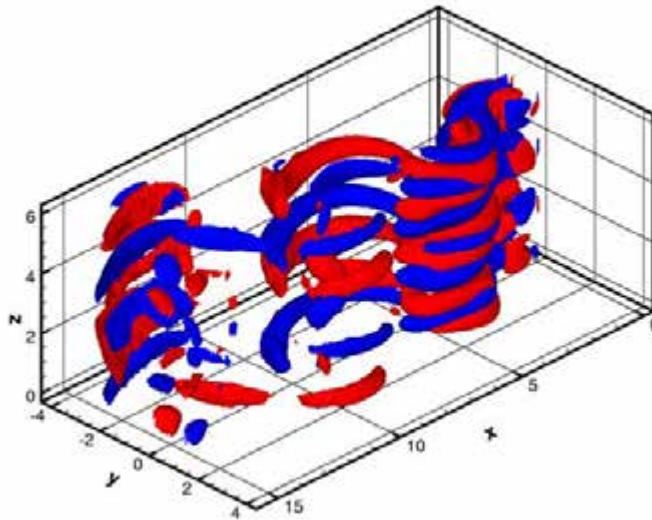


Figure 6: Isosurfaces of streamwise vorticity in the wake obtained at  $Re = 200$  and  $t = 92.4$ . The red surface corresponds to  $\omega_x = 0.1$ , while the blue one to  $\omega_x = -0.1$ .

transition to 3D still follows mode A, while for unconfined cylinders the onset of mode B was found at  $Re = 190 \div 200$ . At  $Re = 300$ , since the early stages of transition, the situation is more complex, as shown in Fig. 7(a), in which two isosurfaces of the streamwise vorticity are reported at a time at which the spanwise velocity has reached approximately the 10% of the maximum inflow velocity. Indeed, mode-A-type structures tend to break in smaller vortical loops, not showing however yet a well defined spanwise length. Later on in the transient (Fig. 7(b)), only these smaller structures are practically visible, which have now a much better defined periodical behavior with a spanwise wave-length of approximately  $1L$  and are, thus, clearly related with the instability mode B. These structures persist after the end of the transient (see Fig. 8) and in the developed 3D wake connect the vortex tubes of the von Kármán street (in black and light gray in Fig. 8). These spanwise vortex tubes are in turn corrugated and distorted by the motion induced by the streamwise vortices, as can be seen in Fig. 9, showing the isocontours of the modulus of the projection of vorticity on a  $(y, z)$  plane in the wake, together with the velocity vectors ( $v$  and  $w$  components) on the same plane. Indeed, the shear layer is clearly deformed by the vortical motion induced by the streamwise vortex loops and this is a typical scenario of 3D wakes at moderate Reynolds numbers, both for circular and square cylinders (see, for instance, Luo et al. [2003]).



(a)



(b)

Figure 7: Isosurfaces of streamwise vorticity in the wake obtained at  $Re = 300$  and (a)  $t \simeq 35$ ; (b)  $t \simeq 57$ . In (a) the red surface and blue surfaces correspond to  $\omega_x = 0.05$  and  $\omega_x = -0.05$  respectively. In (b) the red surface identifies  $\omega_x = 0.4$  and the blue one  $\omega_x = -0.4$ .



Figure 8: Isosurfaces of the streamwise and spanwise vorticity components in the wake obtained at  $Re = 300$  after the transient. The black and light gray surfaces correspond to  $\omega_z = -0.4$  and  $\omega_z = 0.4$  respectively. The pink and blue surfaces identify  $\omega_x = 0.4$  and  $\omega_x = -0.4$  respectively.

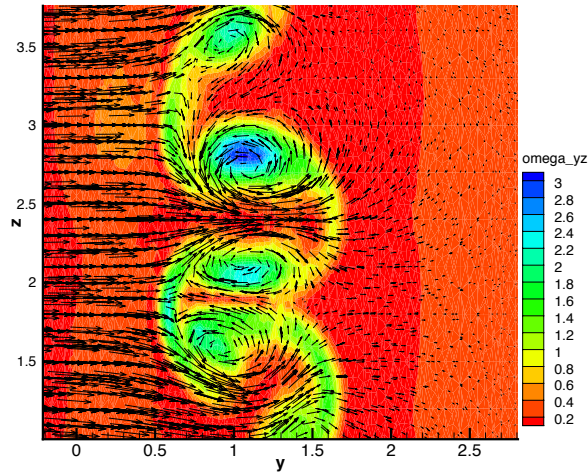


Figure 9: Velocity vectors in a  $(y, z)$  plane at  $x = 4$  and modulus of the projection of the vorticity vector on the same plane;  $Re = 300$  after the transient.

## 6. CONCLUDING REMARKS

Numerical simulations of the flow around a square cylinder between parallel walls, with a blockage ratio equal to 8, have been presented. Reynolds numbers, based on the maximum velocity of the incoming flow and on the cylinder side length, ranging between 100 and 300 have been considered, in order to study the onset of three-dimensionality in the wake.

The employed numerical solver of the Navier-Stokes equations for compressible flows is based on a mixed finite-volume/finite-element formulation applicable to unstructured grids for space discretization and on an implicit time advancing. The resulting numerical method is second-order accurate both in time and space.

The validation of the numerical set-up has been performed by comparing the results obtained in 2D simulations carried out at various Reynolds numbers and grid resolutions with those obtained in 2D simulations of the same configuration, carried out with different numerical methods and grids, available in the literature. The agreement with the reference data is generally good and it may be concluded that grid convergence has practically been reached in our simulation; for instance, for the vortex-shedding Strouhal number, for which data are available from both the reference works, the scatter between our results on different grids is always lower than that between the data in the literature.

Then, 3D have been carried out at  $Re = 200$  and  $300$  and the transient after an impulsive start-up has been analyzed. At  $Re = 200$  the vortex shedding form as two-dimensional and 3D phenomena grow up slowly, following the vorticity pattern typical of mode A of instability, previously observed in experiments and Floquet analysis. Conversely, at  $Re = 300$  3D effects are noticeable already when vortex shedding is beginning and the vorticity configuration is more complex since the early stages of transition. At the end of the transient, however, the wake structure is the one typical of mode B of transition with streamwise vortices of small spanwise wave-length connecting and deforming

the von Kármán vortex tubes.

Besides characterizing the differences in the transition scenario between confined and unconfined cylinders, the next issue of the present study is to investigate whether the transient and fully-developed stages of motif can be described (and eventually controlled) in the context of a low-order model based on proper orthogonal decomposition.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work was carried out under the HPC-EUROPA project (RII3-CT-2003-506079), with the support of the European Community - Research Infrastructure Action under the FP6 "Structuring the European Research Area" Program. IDRIS is gratefully acknowledged for having provided the computational resources.

#### References:

- Breuer, M., Bernsdorf, J., Zeiser T., Durst, F. 2000. *Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume*, International Journal of Heat and Fluid Flow, 21: 186-196.
- Camari S., Salvetti, M.V., Koobus, B., Dervieux, A. 2004. *A low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids*, Computers and Fluids, 33: 1101-1129.
- Davis, R.W., Moore, E.F., Purtell, L.P. 1984. *A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders*, Physics of Fluids, 27(1): 46-59.
- Farhat, C., Koobus, B., Tran, H. 1999. *Simulation of vortex shedding dominated flows past rigid and flexible structures*, Computational Methods for Fluid-Structure Interaction, Kvamsdal T., Enevoldsen I., Herfjord K.C., Jenssen B., Mehr K., Norsett S. editors, Tapir: 1-30.
- Galletti, B., Bruneau, C.H., Zannetti, L., Iollo, A. 2004. *Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder*, Journal of Fluid Mechanics, 503: 161-170.
- Guillard, H., Viozat. C. 1999. *On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit*, Computers and Fluids, 28: 63-86.
- Li, G., Humphrey J.C.A., (1995), *Numerical modelling of confined flow past a cylinder of square cross-section at various orientations*, Journal for Numerical Methods in Fluids, 20: 1215-1236.
- Luo, S.C., Chew, Y.T., Ng, Y.T. 2003. *Characteristics of square cylinder wake transition flows*, Physics of Fluids, 15(9): 2549-2559.
- Mukhopadhyay, A., Biswas, G., Sundararajan, T. 1992. *Numerical investigation of confined wakes behind a square cylinder in a channel*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 14: 1473-1484.
- Robichaux, J., Balachandar, S., Vanka, S.P. 1999. *Three-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder*, Physics of Fluids, 11(3): 560-578.
- Roe, P.L. 1981. *Approximate Riemann Solvers, Parameters Vectors, and Difference Schemes*, Journal of Computational Physics, 43: 357-372.
- Saha A.K., Biswas G., Muralidhar K. 2003. *Three-dimensional study of flow past a square cylinder at low Reynolds number*, International Journal of Heat and Fluid Flow, 24: 54-66.
- Sohankar, A., Norberg, C., Davidson, L. 1999 *Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers*, Physics of Fluids, 11(2): 288-306.
- van Leer, B. 1977. *Towards the ultimate conservative scheme. iv: A new approach to numerical convection*, Journal of Computational Physics, 23: 276-299.
- Zovatto, L., Pedrizzetti, G. 2001. *Flow about a circular cylinder between parallel walls*, Journal of Fluid Mechanics, 440: 1-25.

# Rans Solutions for the Numerical Prediction of Separated Flows

Carlo de Nicola

*Faculty of Engineering, University of Naples, Italy*

*Email:denicola@unina.it*

Benedetto Mele

*Faculty of Engineering, University of Naples, Italy*

*Email:benmele@unina.it*

Renato Tognaccini

*Faculty of Engineering, University of Naples, Italy*

*Email:rtognac@unina.it*

*Keywords:* separated flows, low Reynolds, turbulence modelling, transition prediction

**SUMMARY:** The capability of theoretical prediction of a separated flow can be fundamental in many aspects of industrial design. In this paper an investigation on the capability of the solution of the Reynolds Averaged Navier - Stokes (RANS) equations (RANS Technology) to properly predict the main features of a separated flow is presented.

The validation of a numerical method will be referred to basic flows. Applications will be presented mainly devoted to the flight technology. However considerations and results could be extended, generally speaking, to any other industrial application.

## 1. INTRODUCTION

It is well known that the use of the RANS Technology has a number of critical aspects (e.g., a proper simulation of the real flow properties, the independence from the numerical parameters), even with accurate, converged solutions. This is true not only for separated flows.

However, accuracy and capability of predicting satisfactorily, with a proper detail, a separated flow are potential characteristics, that should be verified for any method and for any application. In short, very expensive calculations may be inaccurate or unacceptable.

On the other hand, RANS Technology can give an approximate, often acceptable, solution from a technical point of view to almost any kind of fluid dynamics problem occurring in the research and industry applications. A number of commercial computer codes are available, with a large variety of applications.

On the contrary, more accurate (or exact) numerical techniques (e.g., Large Eddy Simulation or Direct Numerical Simulation) cannot be used for practical applications.

In this paper a 2D RANS method developed by the Authors and other researchers at the University of Naples 'Federico II' is presented and discussed. It is well known that a 2D approach for turbulent flows has a limitation due to the intrinsic 3D nature of the turbulence. But in the Author's opinion and experience the fundamental features of a 2D experiment could be properly captured.

With respect to the existing general purpose industrial codes, at least when applied to aerospace fluid dynamic problems, this method allows a detailed and accurate numerical analysis of a separated flow.

## 2. SOME CRITICAL ASPECTS IN THE PREDICTION OF A SEPARATED FLOW BY USING RANS TECHNOLOGY

Here we want to point out some aspects occurring when the RANS Technology is used for the prediction of a flow that can be separated. On these aspects the main attention has been focused in the development of the method and in the applications that are proposed in this paper.



The unsteadiness of a separated flow can be only partly reproduced. The unsteadiness of the averaged flow field can be reproduced with some accuracy.

It is important to note that in many situations it is not known whether the flow (and the numerical solution) is steady or not. So may be critical the choice between a time-consistent (Unsteady) and a time-non-consistent (Pseudo Unsteady) solver. The use of the latter is less expensive, but is inappropriate if the solution is unsteady.

The role of the transition may be crucial for some important industrial design applications. So its modelling that is needed in a RANS approach is a crucial point. From the point of view of the Authors, it seems clear that fixing the transitions point is equivalent to fix a solution that is not 'natural' when the experiments have been performed with a free transition (i.e., the flow around a laminar wing).

Because of that, the guidelines for the development of the method have been the following:

- a Time-Consistent approach has been used;
- the turbulence modelling should have the capability to properly predict the transition.

One of the main properties of our method is the capability to predict the transition regions, even in an unsteady flow. These features may be fundamental for a proper prediction of a separated flow.

### 3. TURBULENCE MODELLING AND NUMERICAL ASPECTS

FLOSIM is a 2D URANS code developed at the University of Naples. The code has an explicit time marching steady solver with central second order numerical scheme. Unsteady solver uses the classical dual time stepping method.

One and two-equations eddy viscosity turbulence models have been implemented. Two-equations models are  $k-\omega$  standard (wilcox) and SST (Menter) and a non linear  $k-\omega$  EASM. One-equation models are the Spalart-Allmaras standard (Spalart) and with curvature correction (SARC model) due to Spalart and Shur (Shur). The latter seems to have very good performance for high separated and low Reynolds flows also when there is a strong unsteadiness .

The well known question is the capability of the standard turbulence models to make good prevision of natural transition.

Turbulence models often tend to produce too much turbulence, so that the prediction of the transition may be inaccurate, above all when an extended laminar zone is expected.

Typically, there are two ways to solve this problem:

the first one (and more used) is to fix transition in a point on the wall (2D wall case) consequently introducing the turbulence downstream only: of course in this case previous indications about the transition are needed;

another way is to try to reduce turbulence production: this is the method used by FLOSIM by using Spalart-Shur turbulence model coupled to a very low free stream turbulence boundary condition.

Some turbulence models seem to be not influenced by the asymptotic turbulence level, while other models, such as standard Spalart-Allmaras, may have convergence difficulties when the free stream boundary condition is changed.

The Spalart-Shur turbulence model implemented in FLOSIM is able to give stable and converged calculation also when a very low turbulence level is set.

#### 3.1 Transition on a flat plate

A fundamental test case is relative to classical no pressure gradient flat plate simulation. Here the aim is to evaluate the accuracy of the prevision of the transition zone (Caccavale). Skin friction coefficient calculated with Spalart-Shur turbulence model is plotted in figure 1, it should be noted the good agreement with experimental and theoretical data.

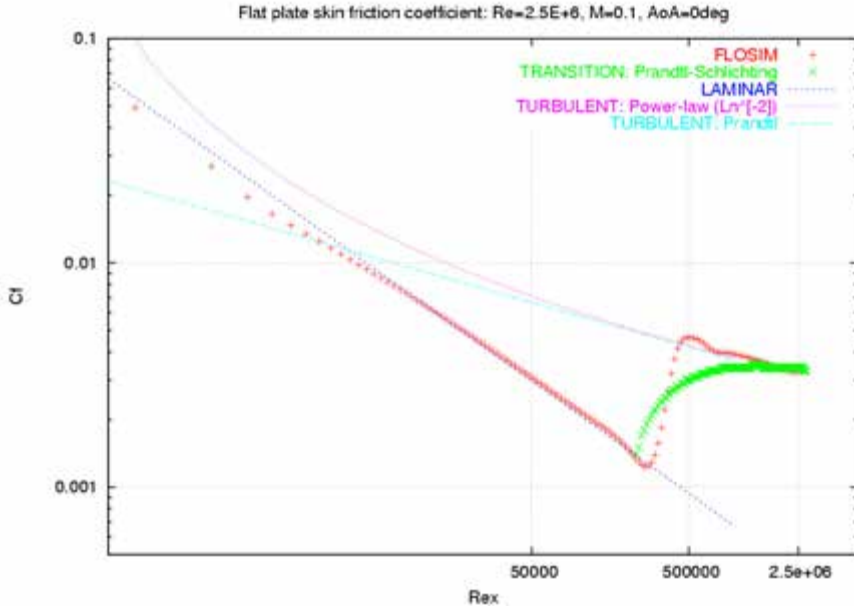


Figure 1: Skin friction coefficient on a flat plate

#### 4. RESULTS

##### 4.1 Bluff bodies

Flow around bluff bodies are a widely investigated class of separated flows. Numerical simulations of the unsteady flow around a circular cylinder with and without a stick (one chord length) attached at the trailing edge. All the simulations have been performed on computational grids having the same characteristics, particularly  $y^+$  is always around and less than unit. The Spalart-Allmaras with curvature correction turbulence model has been used with low asymptotic turbulence, also in the laminar Reynolds number regime. This setting is crucial for a right flow prevision in the transitional regime too. As indicated by the turbulent viscosity ratio, at  $Re=2E+5$  turbulent boundary layer appears, whereas at  $Re=1e+5$  the flows looks laminar. The calculated mean drag coefficients are 1.2 and 0.55 respectively; this result matches well with experimental data (white). In figure 2

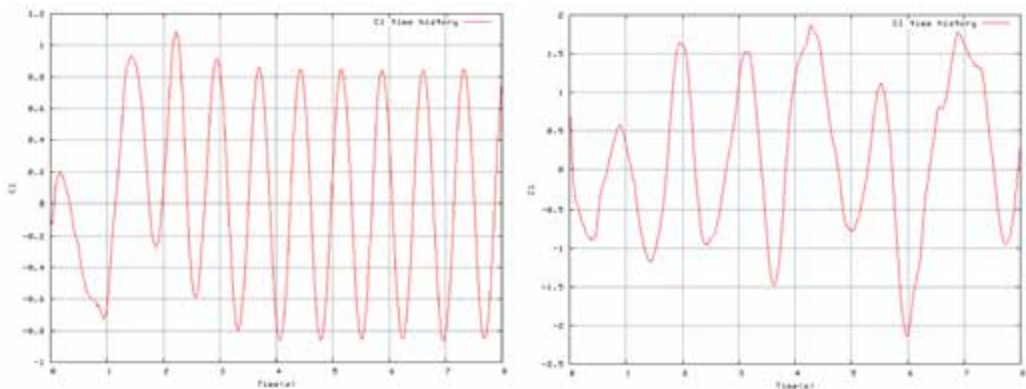


Figure 2:  $C_l$  time histories at Reynolds numbers  $5.E+5$  (left) and  $1.E+5$

the lift coefficient time histories are plotted. The latter shows that turbulence makes vortex shedding much regular compared to that in the transitional regime.

An interesting analysis is the comparison between the flow around the circular cylinder in clean configuration and with a flat plate on the trailing edge. Figure 3 shows the lift coefficient time histories at  $Re=2E+5$ . It's quite evident the damping effect of the flat plate.

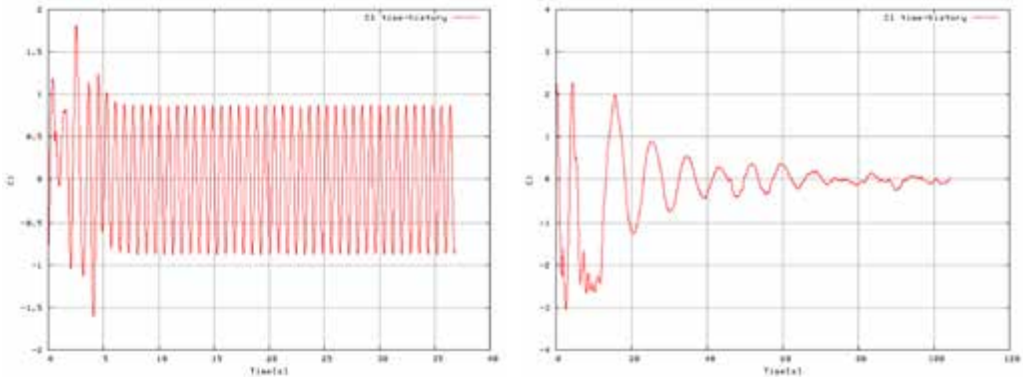


Figure 3: Comparison of  $C_l$  time histories with (right) and without stick at the trailing edge (Reynolds number  $2.E+5$ )

Increasing the Reynolds number the damping effect increases as shown in figure 4.

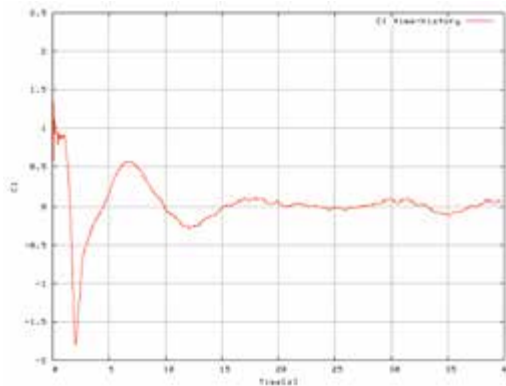


Figure 4:  $C_l$  time history with stick at  $Re=5.E+5$

In figure 5 it is shown the typical decay of the drag coefficient due to the stick: figure is relative to simulation at  $Re=2.E+5$ .

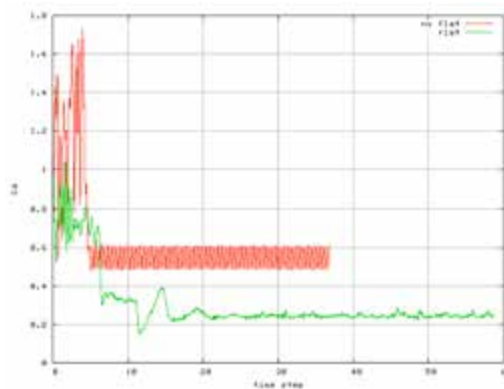


Figure 5: Drag coefficient time histories with and without stick at  $Re=2.E+5$

In the next figure a contour map of vorticity in the case of cylinder with stick is shown.

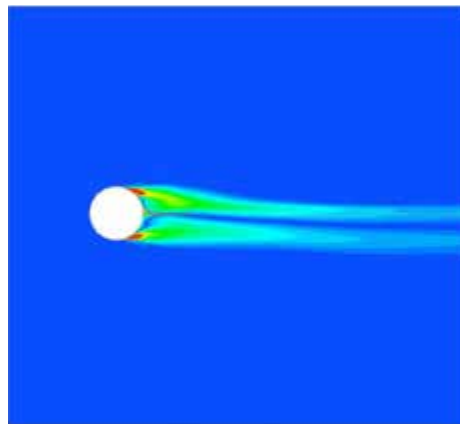


Figure 6: Vorticity contour map ( $Re=2.E+5$ )

#### 4.2 High lift

Separated flows for aeronautical applications are analyzed here. The first example here discussed are concerned to the prevision of stall mechanism.

The simulation of flow around NACA0012 airfoil at Mach 0.3 and Reynolds number  $3E+6$  is an interesting application as it involves various phenomena in the stall zone (de Nicola). In figure 7 the lift curve is plotted, the stall angle is 14 deg with a maximum lift coefficient of 1.4. Calculated lift curve has a good agreement with experimental data of Harris: the discrepancy is due to the wall interference correction (Harris).

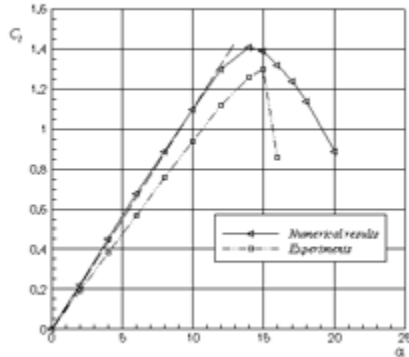


Figure 7: Lift curve: NACA0012 airfoil at  $Re=3E+6$ ,  $Mach=0.3$

Our attention is now focused on the flow features at incidence angles around the stall.

Upper surface skin friction coefficients, plotted in figure 8 for various incidence angles close to the stall, show that at angles of attack before the stall there is a laminar bubble that tends to disappear when the separated zone become larger.

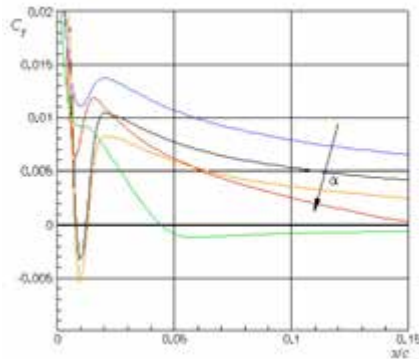


Figure 8: Skin friction coefficient for various angles of attack (upper surface)

From figure 9, where a Mach number contour map at 12 deg is shown, it can be noted that a small supersonic region ending with a shock wave, appears in the leading edge zone. The shock wave also tends to disappear at stall incidence (figure 10). A further analysis at a lower Mach number has shown that the bubble isn't yet present so as the shock wave, this may lead to the hypothesis that the bubble seems to be shock induced. All these phenomena make the stall mechanism very complex as it isn't so abrupt as for a bubble explosion but it is due to a trailing edge separation. However, the bubble and the shock wave may have a strong influence on this stall.

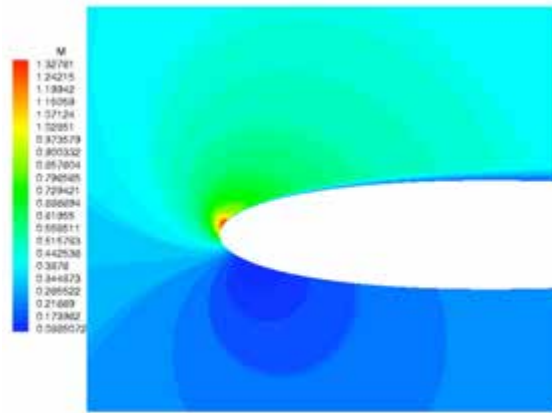


Figure 9: Particular of shock wave at high lift incidence

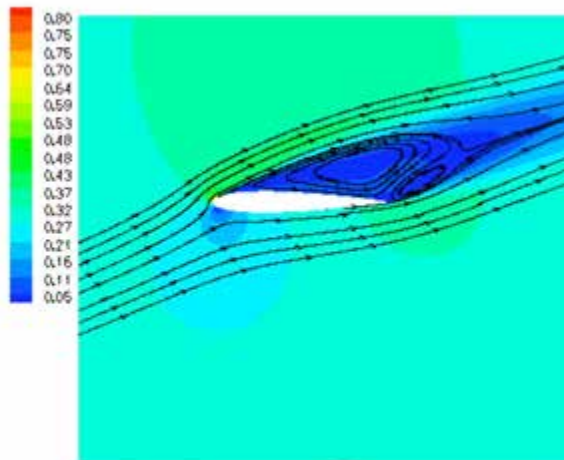


Figure 10: NACA0012 airfoil: streamlines in post stall conditions

Abrupt stall due to a bubble explosion is well predicted in the next case studied. Has been performed numerical simulation of NLR two-component airfoil with 2.6% gap and 20 deg flap deflected; Reynolds number is  $2.51E+6$  and Mach number is 0.185. The computational grid counts 129920 cells structured in 29 blocks (figure 11).

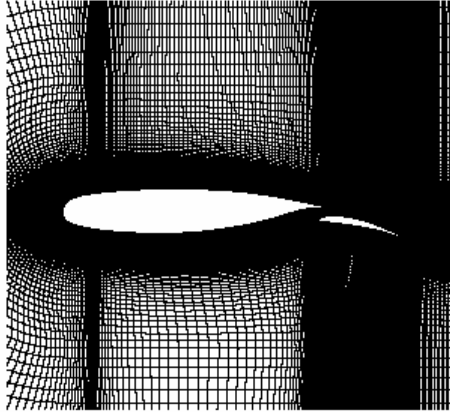


Figure 11: Particular of computational grid for NLR 7301 airfoil

Calculations have been compared with experimental data (Van Den Berg). These data report the existence of a laminar bubble in the leading edge region for all the incidences till the stall, with an abrupt loss of lift in the poststall. As shown in figure 12 the calculations confirm the presence of laminar separation up to the stall and the bubble explosion at stall angle.

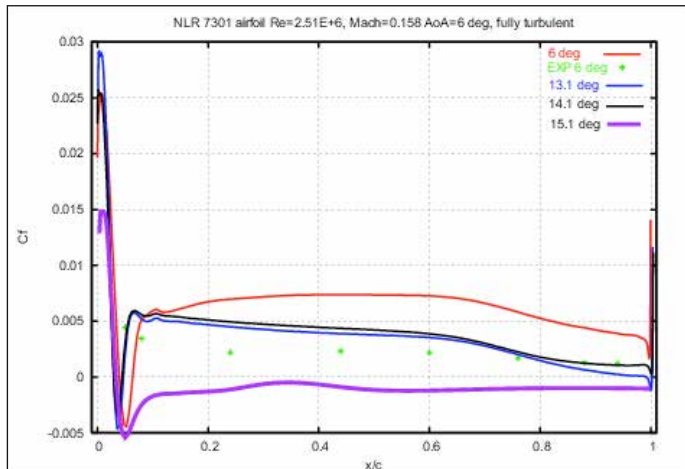


Figure 12: Skin friction coefficient for various incidences

Figure 13, where lift curve is plotted, confirms the good agreement with experimental data also concerning the mechanism of abrupt stall.

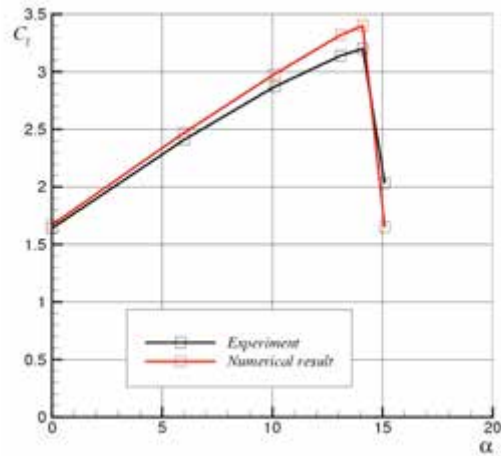


Figure 13: Lift curve NLR 7301 two-component airfoil

#### 4.3 Low Reynolds number

Finally a low Reynolds number unsteady flow calculation around NACA0012 airfoil has been carried out at 20 deg incidence. Reynolds number is 2000. An interesting feature is that the calculation has been performed with turbulence model activated with low free stream turbulence. The flow appears everywhere laminar and this confirms the capabilities of the code to work well at very low Reynolds number. In figure 14 the contour map of density and vorticity is plotted, the frame displaying the typical vorticity spot leaving up the trailing edge. A similar result has been found by Iollo et al. (Iollo).

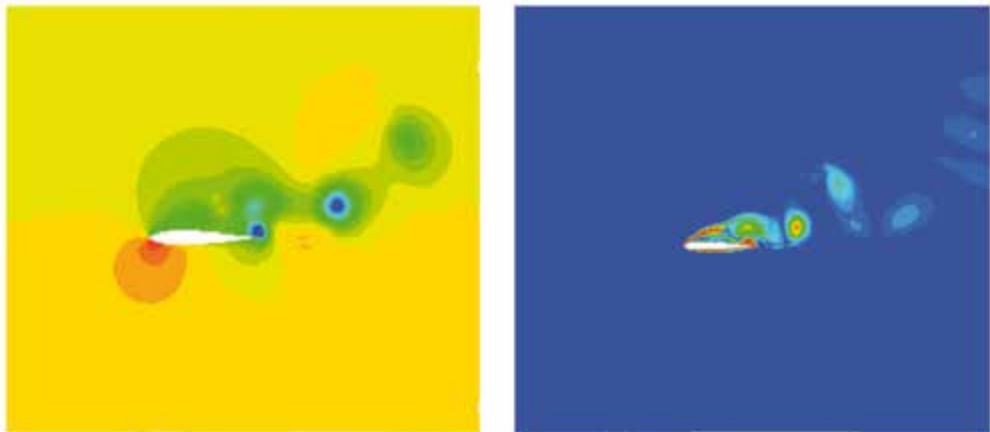


Figure 14: NACA 0012 at Reynolds number 2000,  $\alpha=20^\circ$



## 5. CONCLUSION

In this paper it has been shown that the use of a proper RANS Technology is able to capture the main features of a separated flow. Consequently, an explanation of complex phenomena, so as the stall of an airfoil, can be given.

A 2D method for the prediction of flows with natural transition has been set and discussed; its application to separated flows has given satisfactory results.

In the future our main interest will be addressed to the extension to 3D separated flows.

### *References:*

- Caccavale P., de Nicola C., Mele B., Piccolo A. 2003. *Cfd Analysis for Real 2D Flows*, 7th Int. Symp. On Fluid Control, Measurement and Visualization. FLUCOME '03
- de Nicola C., Mele B., Tognaccini, R. 2005. *Airfoil Drag Calculations in Stall and Poststall Conditions*, Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno.
- Harris C. D. 1981. *Two Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel*, NASA TM 81927.
- Iollo A., Lanteri S. and Desideri J. 2000. *Stability Properties of POD-Galerkin Approximations for the Compressible Navier-Stokes Equations*, Theor. Comput. Fluid Dynamics, Vol. 13, pp. 377-396.
- Menter F.R., 1993. *Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows*, AIAA P. 932906. Orlando.
- Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K., Spalart P.R. 2000. *Turbulence Modeling in Rotating and Curved Channels. Assessing the Spalart-Shur Correction*. AIAA J., Vol. 38, No. 5, pp. 784792.
- Spalart P.R., Allmaras S.R. 1992. *A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*, AIAA P. 92439. Reno.
- Van Den Berg B. 1979. *Boundary Layer Measurements on a Two Dimensional Wing with Flap*. NLR TR 79009.
- White F.M. 1991. *Viscous Fluid Flow*, Second Ed., Mc Graw Hill Int. Ed. Singapore.
- Wilcox D.C. 1998, *Multiscale Model for Turbulent Flows*, AIAA J., vol. 26, No. 11, pp. 13111320.

# Utilizzo di tecniche possibilistiche nella meccanica delle strutture

Stefano Gabriele

*Dipartimento di Strutture, Università "Roma Tre", Roma*

*E-mail: gabriele@uniroma3.it*

Claudio Valente

*Dipartimento PRICOS, Università "G. d'Annunzio", Chieti-Pescara*

*E-mail: c.valente@unich.it*

Fabio Brancaleoni

*Dipartimento di Strutture, Università "Roma Tre", Roma*

*E-mail: branca@uniroma3.it*

*Parole chiave:* sistemi meccanici a parametri incerti, analisi ad intervalli

## Sommario

Questo lavoro nasce dal crescente interesse per il trattamento delle incertezze nella meccanica delle strutture. Ci si riferisce in particolare alle tecniche possibilistiche basate sulla matematica degli intervalli. L'analisi della letteratura corrente mostra che sono tuttora aperte alcune questioni di base legate soprattutto al campo di applicazione e alle prestazioni delle tecniche possibilistiche a confronto con tecniche più convenzionali di tipo probabilistico ed all'interpretazione fisica del campo di soluzioni ottenibili. Nel lavoro si parte da queste considerazioni per presentare il modello di incertezza ad intervalli ed il suo utilizzo nel caso dell'analisi diretta ed inversa di sistemi meccanici a parametri incerti.

## 1 INTRODUZIONE

Nella meccanica strutturale il concetto di incertezza viene utilizzato in vari contesti: nella modellazione, nell'analisi, nella sperimentazione, nella definizione di grandezze caratteristiche, nella definizione di livelli di sicurezza e affidabilità. Quando si affronta un problema deterministico è necessario scegliere a priori un modello meccanico rappresentativo del problema fisico, nella soluzione invece di un problema a parametri incerti bisogna in aggiunta scegliere un modello di rappresentazione delle grandezze incerte. Convenzionalmente la seconda scelta cade su modelli probabilistici [Ditlevsen '81] anche se esistono modelli diversi per la rappresentazione delle incertezze. Ad esempio nel caso della logica fuzzy [Zadeh '78] i parametri incerti sono rappresentati, in maniera equivalente alla teoria probabilistica, mediante distribuzioni dette di appartenenza. Sia le distribuzioni probabilistiche che quelle fuzzy necessitano al loro interno di punti di riferimento a cui vengono associati rispettivamente valori di massima probabilità o di massimo grado di appartenenza. E' di interesse però prendere in considerazione anche altri tipi di grandezze incerte concettualmente distinte dalle precedenti perché non associate a distribuzioni, ma definite su intervalli all'interno dei quali la grandezza in questione può assumere tutti i possibili valori senza che ve ne sia qualcuno privilegiato. Si dirà allora che la classe di appartenenza della grandezza è un intervallo di possibilità. Quest'ultimo tipo di grandezze incerte vengono nel seguito meglio formalizzate ed utilizzate.

Il modello di incertezza più idoneo al trattamento di un problema meccanico viene scelto in funzione della natura delle grandezze incerte che caratterizzano il problema. Si distinguono due differenti problemi. Nel problema *diretto* dato il modello meccanico e data l'incertezza nei parametri si vuole valutare l'incertezza nella risposta del modello. Nel problema *inverso* invece note le misure incerte e scelto il modello meccanico si vogliono ricercare quei parametri che permettono al modello di riprodurre al meglio le grandezze misurate.

Nel primo caso l'incertezza associabile ai parametri del modello è frutto della scarsa conoscenza dei materiali, della geometria, dalle condizioni di vincolo, ecc. è cioè una misura dell'ignoranza che si ha nella fase di modellazione. Nel secondo caso invece, soprattutto nei problemi inversi che fanno riferimento all'identificazione costitutiva ed all'identificazione dinamica [Frisswell e Mottershead '95], la scarsa ripetibilità delle misure sperimentali fa nascere un'effettiva incertezza nella risposta della struttura.

In definitiva, nella scelta del modello di incertezza si deve tenere presente che per le incertezze di modellazione andranno sempre supposte a priori distribuzioni probabilistiche o fuzzy oppure intervalli di possibilità. Nel caso invece delle incertezze sperimentali i diversi modelli di incertezza saranno più o meno efficaci in funzione della variabilità e del numero di ripetizioni delle misure a disposizione. Infatti la caratterizzazione probabilistica è strettamente dipendente dal numero di misure, mentre per la caratterizzazione possibilistica ad intervalli è sufficiente conoscere gli estremi di variazione delle misure.

Obiettivo del presente lavoro è di discutere l'utilizzo delle tecniche possibilistiche nell'analisi diretta e inversa di strutture a parametri incerti a confronto con la più convenzionale analisi probabilistica. Le metodologie qui presentate sono sviluppate nell'ambito della così detta "*analisi ad intervalli*", la quale prevede per ogni grandezza incerta l'inclusione in intervalli di possibilità. Le soluzioni ad intervalli vengono discusse e confrontate con soluzioni probabilistiche in forma chiusa oppure ottenute con simulazioni MonteCarlo. Al fine di rendere coerente e generale l'esposizione nella sezione due viene introdotta una notazione unificata per i modelli di incertezza a confronto. Nella terza sezione vengono introdotti in maniera formalizzata i problemi incerti diretto ed inverso. Nella sezione 4 vengono confrontati alcuni risultati relativi al problema diretto nel caso statico e nel caso dinamico con riferimento ad un semplice problema meccanico.

## 2 MODELLI DI INCERTEZZA

Viene utilizzata una notazione unificata per le grandezze incerte, qui indicate in lettere maiuscole, indipendentemente dal modello di incertezza con cui vengono rappresentate. Un generico parametro incerto è quindi indicato con  $X$ . Supponendo che  $X$  sia definito sull'insieme dei numeri reali, l'incertezza di  $X$  è definita dall'intervallo in cui è possibile o probabile che  $X$  prenda valori.

### *Modello ad Intervalli*

Per rappresentare  $X$  nell'ambito della matematica ad intervalli, si usa la notazione in [Moore '66] in cui l'intervallo è definito mediante gli estremi inferiore ( $x_{\text{inf}}$ ) e superiore ( $x_{\text{sup}}$ ):

$$X = [x_{\text{inf}}, x_{\text{sup}}] : \{x \in \mathbb{R} \mid x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}}\} \quad (1)$$

In vista dei confronti con modelli di incertezza convenzionali di tipo probabilistico, l'intervallo viene riscritto secondo [Hansen '92] in notazione *centrale*:

$$X = x_c + \Delta X \cdot e_\Delta \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_c = \frac{x_{\text{inf}} + x_{\text{sup}}}{2} = \text{valore centrale}; \\ \Delta X = \frac{x_{\text{sup}} - x_{\text{inf}}}{2} = \text{raggio}; \\ e_\Delta = [-1, 1] \text{ intervallo unit\`a}. \end{cases} \quad (2)$$

L'espressione (1) evidenzia la natura insiemistica della rappresentazione che costituisce la base per la definizione delle operazioni tra intervalli [Moore '66]. La (2) è invece una espressione di comodo in cui l'incertezza associata ad  $X$  è misurata dal raggio dell'intervallo. Si osserva che la natura dell'incertezza definita da  $X$  è possibilistica nel senso che è possibile che ogni  $x \in X$  assuma valori tra  $x_{\text{inf}}$  e  $x_{\text{sup}}$  senza che nessuno di questi sia favorito rispetto agli altri.

### *Modello probabilistico*

Ai fini del confronto e per coerenza con la rappresentazione (2), si adotta un modello probabilistico definito dalla distribuzione uniforme per  $X$  nel senso che ciascun elemento nell'intervallo ha identica probabilità di essere estratto. In questo caso si ha:

$$\begin{cases} \text{densità: } f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ \text{media: } E[X] = \frac{a+b}{2} \\ \text{varianza: } \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

Si noti che assumendo  $\Delta X = (b-a)/2$ , in coerenza al modello possibilistico, si ottiene  $\sigma_X^2 = \Delta X^2/3$  e quindi:

$$X = E[X] \pm \sqrt{3}\sigma_X \quad (3)$$

cosicché l'espressione (3) di  $X$  diviene formalmente identica alla (2) quando si ponga  $E[X] = x_c$  e  $\Delta X = \sqrt{3}\sigma_X$ .

### *Incetezza relativa*

In generale, per entrambi i modelli presentati, è conveniente esprimere l'incertezza in forma adimensionale. Si introduce allora il rapporto:

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{x_0} \quad (4)$$

chiamato *incertezza relativa* in cui  $\Delta X$  è la quantità di incertezza mentre  $x_0$  è un valore di riferimento interno a  $X$ , che nel caso possibilistico è il valore centrale  $x_c$ , mentre nel caso probabilistico è la media  $E[X]$ .

### 3 PROBLEMI MECCANICI CON INCERTEZZA

Per definitezza, in questo lavoro, la discussione del problema posto è svolta in riferimento ad un particolare esempio meccanico. Nello specifico, si considera il problema dell'inflessione di una trave incastrata soggetta ad un carico concentrato all'estremo libero (Figura 1). Il modello di trave è quello di Eulero e si considerano come parametri incerti l'intensità  $P$  del carico e la rigidezza flessionale  $B$ . Si fa notare come questa scelta permetta di evidenziare sia una dipendenza diretta ( $P$ ) che una dipendenza inversa ( $B$ ) del modello dai parametri incerti.

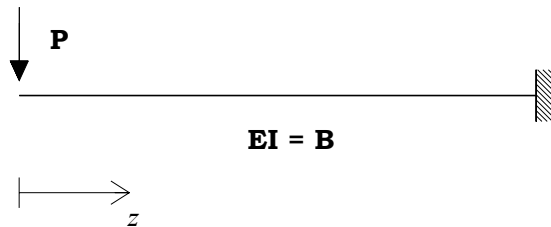


Figura 1 – Mensola con carico  $P$  e rigidezza  $B$  a valori incerti

Si nota inoltre che, da un punto di vista ingegneristico, è di interesse considerare l'impostazione sia del problema diretto che di quello inverso e per entrambi la soluzione sia nel caso statico che in quello dinamico. Si riassumono di seguito le relazioni che governano i problemi citati evidenziandone la dipendenza dai parametri incerti scelti.

#### *Problema diretto*

Dati  $P$  e  $B$  incerti si vuole calcolare l'incertezza sulla risposta  $v$  che definisce lo spostamento trasversale della linea d'asse della trave.

$$\text{Caso statico:} \quad v(z) = \frac{P}{B} g(z) \quad (5)$$

$$\text{Caso dinamico:} \quad v(\omega) = P(\omega)H(\omega) = \frac{P}{B} \hat{D}(\omega) \quad (6)$$

In ambito lineare, le equazioni (5) e (6) hanno la stessa struttura ed in esse la funzione  $v$  rappresenta la soluzione al variare rispettivamente della posizione  $z$  oppure della frequenza  $\omega$ . Nel primo caso la  $v(z)$  è ricavata per integrazione diretta dell'equazione differenziale della linea elastica flessionale  $v'' = M(z)/B$ , essendo  $M(z) = -Pz$  il momento flettente. Nel caso dell'analisi dinamica, la risposta definita dalla (6) nel dominio della frequenza  $\omega$  è calcolata nell'ipotesi che l'intensità del carico  $P$  vari nel tempo secondo una legge sinusoidale, in tal caso è possibile esprimere ancora la soluzione in funzione del rapporto  $P/B$ , attraverso la rigidezza dinamica  $\hat{D}(\omega)$  che si ottiene per  $B = 1$ .

*Problema inverso*

Allo stesso modo si presenta un'impostazione formalizzata del problema inverso per mostrare il ruolo che giocano le incertezze nella formulazione del problema. Si suppone di conoscere le ampiezze della funzione  $v^*$  in alcune posizioni,  $z^*$  oppure  $\omega^*$ , rispettivamente nel caso statico o dinamico.

In questo caso il problema è allora quello di calcolare i valori di  $P$  e  $B$ , in modo che la risposta analitica  $v$  calcolata negli stessi punti  $z^*$  oppure  $\omega^*$  sia uguale a quella misurata  $v^*$ . Questo tipo di problemi inversi si definiscono di aggiornamento parametrico ed in letteratura [Sorenson '80, Friswell e Mottershead '95] vengono classicamente formulati nel seguente modo:

$$\text{Caso statico:} \quad \min \left\langle v^*, \frac{P}{B} g(z^*) \right\rangle \quad (7)$$

$$\text{Caso dinamico:} \quad \min \left\langle v^*, \frac{P}{B} \frac{1}{\hat{D}(\omega^*)} \right\rangle \quad (8)$$

In termini generali dunque si deve risolvere un problema di minimizzazione del tipo:

$$\min \langle v^*, v(P, B) \rangle \quad (9)$$

in cui il funzionale definito dall'operatore di confronto  $\langle \cdot \rangle$  misura la distanza tra  $v^*$  e  $v(P, B)$ .

E' importante notare che nel caso del problema diretto (cfr. equazioni (5) e (6)) i parametri incerti  $P$  e  $B$  si possono considerare dei coefficienti di valore assegnato ed il valore di  $v$  ha come variabile indipendente rispettivamente  $z$  oppure  $\omega$ . Nel caso del problema inverso invece (cfr. equazione (9)), sono i parametri incerti  $P$  e  $B$  che diventano variabili indipendenti del funzionale da minimizzare con la soluzione che viene calcolata in ascisse prefissate ( $z^*$ ,  $\omega^*$ ). Questa considerazione diventa importante quando il problema inverso viene riformulato tenendo conto delle incertezze [Gabriele '04].

Nelle equazioni dalla (5) alla (9) l'incertezza relativa espressa secondo la (4) assume la forma:

$$\begin{cases} \varepsilon_P = \frac{\Delta P}{P_0} \\ \varepsilon_B = \frac{\Delta B}{b_0} \end{cases} \quad (10)$$

Per i due modelli di incertezza considerati le quantità definite nella (10) sono esplicitate nelle:

$$\begin{array}{l} \text{Intervalli:} \\ \text{Probabilità:} \end{array} \quad \begin{cases} P = p_0 (1 \pm \varepsilon_P) = p_c + \Delta P \cdot e_\Delta = [p_i, p_s] \\ B = b_0 (1 \pm \varepsilon_B) = b_c + \Delta B \cdot e_\Delta = [b_i, b_s] \\ P = p_0 (1 \pm \varepsilon_P) = p_0 \pm \Delta P = E[P] \pm \sqrt{3} \sigma_P \\ B = b_0 (1 \pm \varepsilon_B) = b_0 \pm \Delta B = E[B] \pm \sqrt{3} \sigma_B \end{cases} \quad (11)$$

Le espressioni (11) evidenziano come, con la notazione adottata, ci sia una corrispondenza diretta nella rappresentazione delle grandezze incerte indipendentemente dal modello di incertezza adottato. Si osserva inoltre che mentre per gli intervalli i parametri quantitativi (valore centrale e raggio) rimangono fissi, per la probabilità i parametri equivalenti (media e deviazione standard) variano al variare della distribuzione ipotizzata e del numero di campioni analizzati.

## 4 SOLUZIONE DEL PROBLEMA DIRETTO

### 4.1 Caso statico

Si considera l'inflessione  $v(z)$  della trave in Figura 1 definita dall'equazione (5), dalla quale è evidente che la soluzione incerta dipende dal valore del rapporto  $P/B$ . La soluzione ad intervalli segue dall'applicazione della regola di divisione [Moore '66]:

$$V(z) = [v_i(z), v_s(z)] = \frac{P_c}{b_c} \left[ \frac{1 - \varepsilon_P}{1 + \varepsilon_B}, \frac{1 + \varepsilon_P}{1 - \varepsilon_B} \right] g(z) \quad \begin{cases} v_c = \frac{P_c (1 + \varepsilon_P \varepsilon_B)}{b_c (-1 + \varepsilon_B^2)} g(z) \\ \Delta V = \frac{P_c (\varepsilon_B + \varepsilon_P)}{b_c (-1 + \varepsilon_B^2)} g(z) \end{cases} \quad (12)$$

Nell'espressione (12) del valore centrale e del raggio di  $V$  si evidenzia come la soluzione è non lineare nei parametri  $\varepsilon_P$  e  $\varepsilon_B$ . Per basse incertezze nella rigidità  $B$  il termine  $\varepsilon_B^2$  diviene trascurabile rispetto all'unità e la soluzione può essere linearizzata quando l'incertezza di  $P$  domina su quella di  $B$ . Lo stesso non accade per basse incertezze nei valori del carico  $P$ .

Per quanto riguarda la soluzione probabilistica si considerano due diverse soluzioni:

$$\begin{aligned} a) \quad V_i(z) &= \frac{P_i}{B_i} g(z) \\ b) \quad \tilde{V} &= v_0 + \left. \frac{\partial v}{\partial B} \right|_0 \varepsilon_B + \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_0 \varepsilon_P \Rightarrow \begin{cases} E[\tilde{V}] = v_0 = \frac{P_0}{b_0} g(z); \\ \sigma_{\tilde{V}}^2 = \left( \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_0 \right)^2 \sigma_{\varepsilon_P}^2 + \left( \left. \frac{\partial v}{\partial B} \right|_0 \right)^2 \sigma_{\varepsilon_B}^2 = \frac{1}{18} v_0^2 (\varepsilon_P^2 + \varepsilon_B^2) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

La soluzione  $a)$  è fornita da una simulazione MonteCarlo eseguita numericamente su un campione generato con distribuzione uniforme. Questa soluzione vista la semplicità del caso in esame è anti-economica da un punto di vista computazionale, ma rispecchia una comune prassi nel calcolo probabilistico e quindi ha una valenza generale. La soluzione in forma chiusa  $b)$  è ottenuta mediante sviluppo in serie di  $v$  arrestato al primo ordine dell'equazione (5) e fornisce l'espressione approssimata di media e varianza calcolate sulla funzione approssimante  $\tilde{V}$ . Rispetto alla (12) si nota che nella soluzione probabilistica approssimata al primo ordine la media stimata  $E[\tilde{V}]$  rimane costante, mentre la varianza è non lineare con proporzionalità diretta a  $(\varepsilon_P^2 + \varepsilon_B^2)$ , questo

implica che per piccole incertezze tali che  $(\varepsilon_P, \varepsilon_B) \ll 1$  la soluzione risulta sottostimata rispetto a quella ad intervalli.

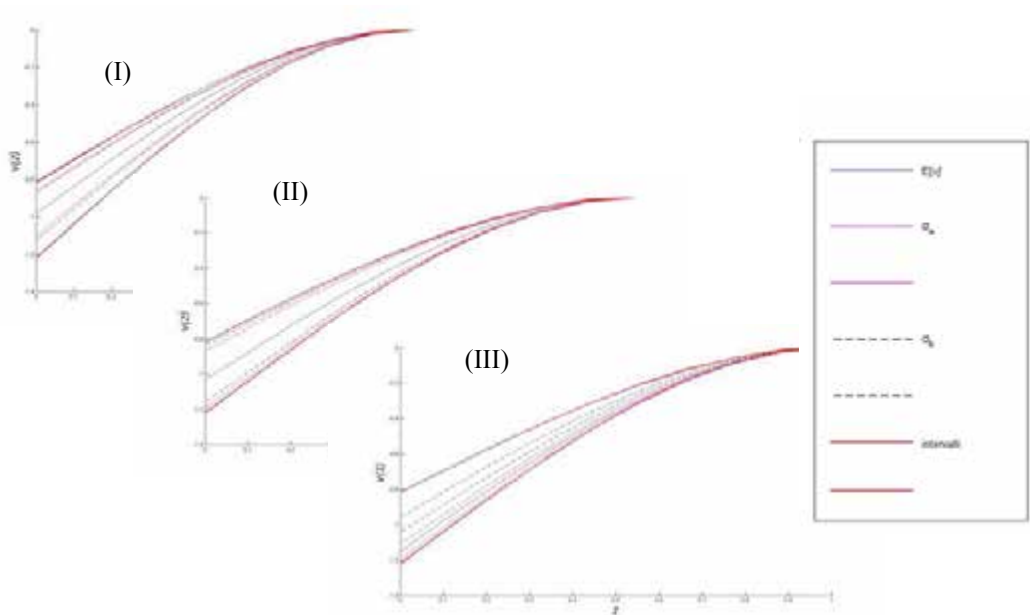


Figura 2 – Campo di variazione della linea elastica della trave per incertezze relative  $\varepsilon_P = \varepsilon_B = 0.1$ . Confronto tra intervalli e probabilità (I, II, III = numerosità campione elevata, media, bassa).

Per ciascuna delle tre soluzioni incerte ad intervalli e probabilistiche le incertezze relative della funzione  $v$  sono:

Intervalli :		$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_c} = \frac{\varepsilon_B + \varepsilon_P}{1 + \varepsilon_P \varepsilon_B};$	
Probabilità :	$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ MonteCarlo} \\ b) \text{ Approx 1}^\circ \text{ ordine} \end{array} \right.$	$\varepsilon_v^a = \frac{\sqrt{3}\sigma_v}{E[V]};$	(14)
		$\varepsilon_v^b = \frac{\sqrt{3}\sigma_{\tilde{v}}}{E[\tilde{V}]} = \sqrt{\varepsilon_P^2 + \varepsilon_B^2}$	



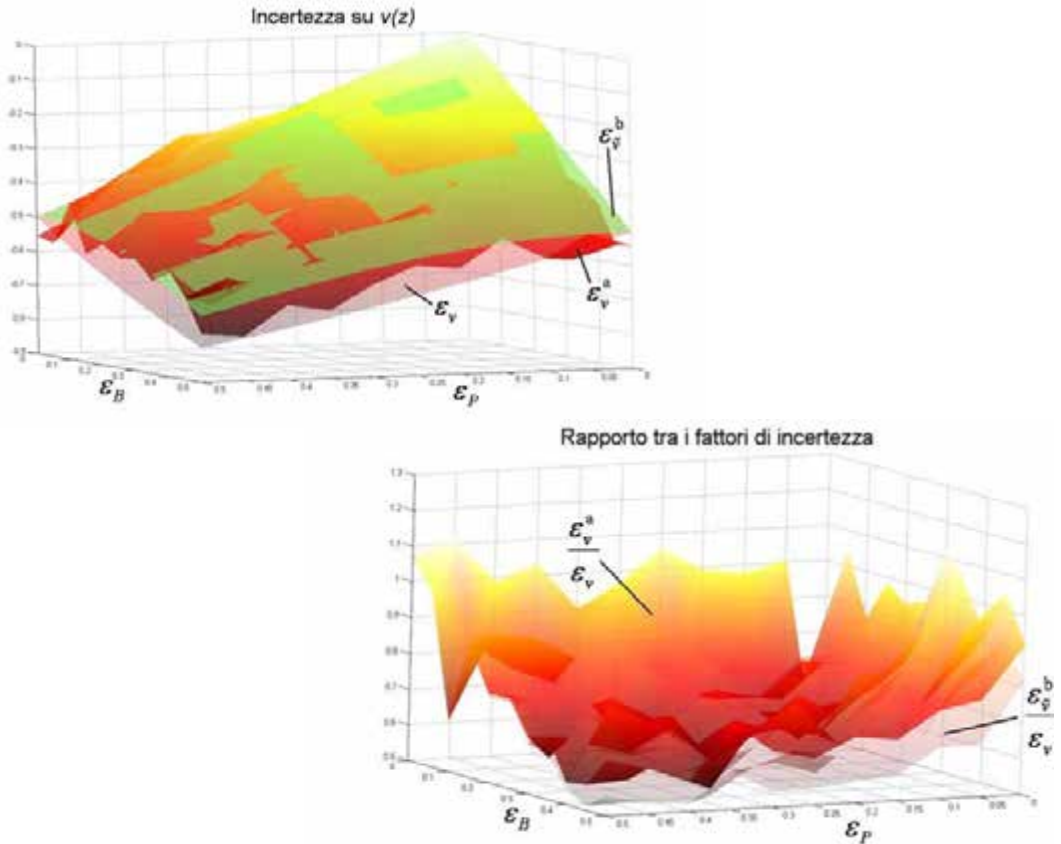


Figura 3 – Superfici di incertezza per variazioni dell'incertezza relativa fino a 0.5

Si noti che il coefficiente  $\sqrt{3}$  in  $\varepsilon_v^a$  e  $\varepsilon_v^b$  corrisponde all'aver considerato uniforme anche la distribuzione risultante su  $v$ . Questa assunzione è stata adottata perché corrisponde ad una approssimazione generalmente seguita in problemi più complessi di quello in considerazione in cui è difficile stimare analiticamente l'effettiva distribuzione probabilistica della soluzione.

In Figura 2 sono riportati i risultati della soluzione statica per un'incertezza relativa su  $P$  e  $B$  pari a 0.1. I tre diagrammi sono distinti a partire dall'alto in funzione della soluzione MonteCarlo, che è calcolata con un numero di campioni rispettivamente equivalente ad elevato, medio e basso. La soluzione ad intervalli ottenuta dalla (12), una volta fissata l'incertezza su  $P$  e  $B$ , rimane invariata ed include la soluzione probabilistica per intero. Un'osservazione importante in questo caso è che la soluzione ad intervalli (12) è esatta nell'ambito dell'aritmetica degli intervalli [Moore '66], questo fa sì che non possano esistere soluzioni fisiche al di fuori di questa.

La soluzione probabilistica varia invece al variare del numero di campioni. Soluzioni ad elevato livello di confidenza si ottengono con altrettanto elevato numero di campioni questo fa sì che in problemi complessi la componente computazionale risulta penalizzante. D'altro canto le soluzioni probabilistiche approssimate permettono una riduzione dei tempi computazionali, ma al contrario richiedono un onere elevato negli sviluppi analitici. Le soluzioni ad intervalli sono computazionalmente assai più vantaggiose ed hanno l'ulteriore vantaggio di includere sempre la

soluzione. Un problema di cui non si discute qui è però la dipendenza dall'espressione dell'equazione risolutiva che porta in genere a sovrastimare il risultato [Alefeld e Mayer '00] che può perdere di significato fisico nel caso di elevata incertezza.

È interessante notare come al variare dell'incertezza sui parametri varia l'incertezza su  $v$ , è inoltre interessante mettere a confronto tale variazione rispetto ai diversi modelli di incertezza. Per questo in Figura 3 sono raffigurate le superfici dell'incertezza relativa di  $v$  nei tre casi considerati (14) in funzione incertezze relative  $\varepsilon_P$ ,  $\varepsilon_B$ . Il grafico in alto mostra che le tre superfici sono simili, in particolare si nota che la soluzione MonteCarlo ( $\varepsilon_v^a$ ) è più irregolare perché esclusivamente numerica. Essa è comunque ben approssimata dalla soluzione probabilistica al primo ordine ( $\varepsilon_v^b$ ) e che entrambe queste si accordano con la soluzione ad intervalli ( $\varepsilon_v^c$ ) la quale come detto tende a fornire una sovrastima della soluzione, nel caso attuale il limite inferiore della soluzione probabilistica. In definitiva quindi la soluzione ad intervalli è paragonabile a quella probabilistica a densità uniforme. Il confronto è quantificato nella superficie raffigurata in basso, in cui si rappresentano i rapporti di incertezza tra la soluzione ad intervalli e quelle probabilistiche. In questo secondo diagramma si vede, per i motivi sopra detti, che la differenza tra le soluzioni aumenta all'aumentare dell'incertezza nei parametri  $P$  e  $B$ .

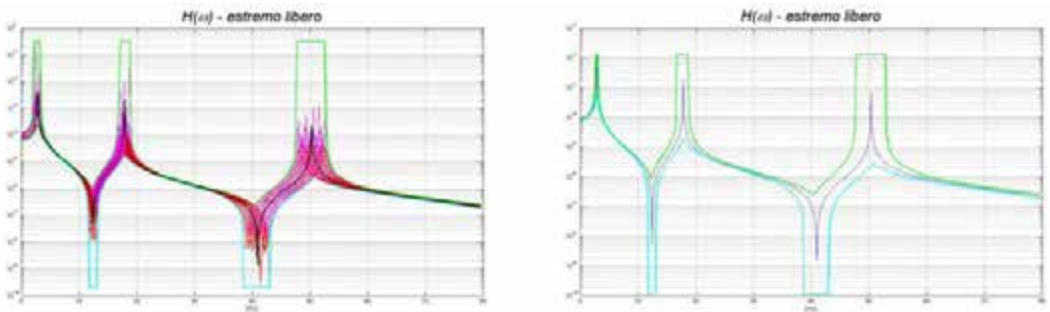


Figura 4 – Soluzione ad intervalli: (sx) equazione (16), (dx) equazione (17)

#### 4.2 Caso dinamico

La soluzione dinamica della trave in Figura 1 è data dall'equazione (6) nell'ipotesi di comportamento lineare della struttura e di forzante  $P$  variabile nel tempo con un andamento di tipo armonico. In questo caso è la soluzione nel dominio della frequenza si può esprimere attraverso la sovrapposizione modale [Ewins '84], pertanto la funzione di trasferimento  $H(\omega)$  assume la forma:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Phi_r \cdot \Phi_r^T}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (15)$$

in cui i vettori  $\Phi_r$  rappresentano le forme modali della trave normalizzate rispetto alla massa e gli  $\omega_r^2$  sono gli autovalori reali del sistema non smorzato.

Il comportamento lineare ipotizzato fa sì che la dipendenza della soluzione dall'intensità del carico  $P$ , sia identica al caso statico, si considera quindi l'incertezza solamente nella rigidità  $B$ .

La soluzione ad intervalli degli autovalori di un sistema incerto è un problema non banale [Shalaby '00], per esso vengono impiegati due metodi di calcolo. Il primo ha carattere generale [Qiu, Chen et al. '95] mentre il secondo è specializzato all'esempio in questione. La soluzione probabilistica di confronto viene calcolata in forma numerica con una simulazione MonteCarlo al variare di  $B$  distribuito uniformemente. Per la sola soluzione ad intervalli si riportano le equazioni risolventi il problema degli autovalori incerti.

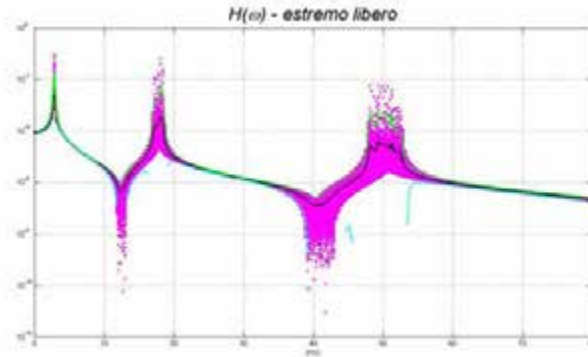


Figura 5 – Soluzione probabilistica da simulazione MonteCarlo

Il metodo generale proposto [Qiu, Chen et al. '95] è formulato per sistemi discreti e fornisce la soluzione ad intervalli distinguendo il problema del limite inferiore da quello del limite superiore. Tale metodo soffre di una sovrastima eccessiva della soluzione alle basse frequenze; la correzione proposta in [Gabriele '04] consiste nel considerare l'intervallo di incertezza iniziale come unione di sottointervalli ( $B = \bigcup_i B^i$ ) nei quali il problema della sovrastima è mitigato. La soluzione in frequenza è quindi data da:

$$\Omega_r = \bigcup_i \Omega_r^i \Rightarrow H(\Omega) = \bigcup_i H^i(\Omega) \quad (16)$$

dove la  $\Omega$  maiuscola indica l'incertezza nel parametro rispetto al valore deterministico  $\omega$ . Il secondo metodo è invece direttamente derivato dal rapporto di Rayleigh specializzato al caso della trave in esame nell'ipotesi di invarianza delle forme modali all'interno dell'intervallo di incertezza considerato. L'autovalore  $r$ -mo può essere quindi calcolato dall'espressione semplificata:

$$\Omega_r^2 = B(\Phi_r^T \hat{K} \Phi_r) \quad (17)$$

essendo  $\hat{K}$  la matrice di rigidezza calcolata per  $B = 1$ .

Si riportano i risultati delle funzioni di risposta in frequenza all'estremo libero della trave, ottenute per un'incertezza relativa di  $B$  pari a 0.1. In Figura 4 sono riportate le soluzioni ad intervalli per i due metodi considerati, la figura di sinistra si riferisce alla soluzione ottenuta con l'equazione (16), quindi dall'unione di venti sottointervalli, mentre la figura di destra è riferita alla soluzione semplificata a singolo passo ottenuta mediante l'equazione (17).

In Figura 5 è riportata la soluzione ottenuta dalla simulazione MonteCarlo in cui sono indicati sia i risultati delle singole estrazioni, sia la curva media  $E(H)$ , sia le curve  $E(H) \pm \sqrt{3}\sigma_H$  assunte come limite di incertezza. Si fa notare che il limite inferiore tende a  $-\infty$  in corrispondenza della seconda e della terza risonanza, questo accade quando  $\sqrt{3}\sigma_H > E[H]$ . Lo stesso accade nel caso dell'analisi ad intervalli quando la sovrastima è eccessiva rispetto al valore centrale. Nell'esempio la soluzione fornita ad intervalli non soffre di questo difetto in quanto la sovrastima nelle frequenze è contenuta dall'aver adottato la partizione  $B = \bigcup_i B^i$ . Infine la Figura 6 riporta il confronto tra le due soluzioni presentate. Le conclusioni sono identiche a quanto discusso nel caso statico in particolare si sottolinea che i risultati ottenuti nell'ipotesi di probabilità a distribuzione uniforme si accordano con i risultati dell'analisi ad intervalli e che questa ultima fornisce sempre soluzioni inclusive. La capacità inclusiva dell'analisi ad intervalli ne caratterizza la robustezza, in quanto garantisce i limiti di incertezza della soluzione.

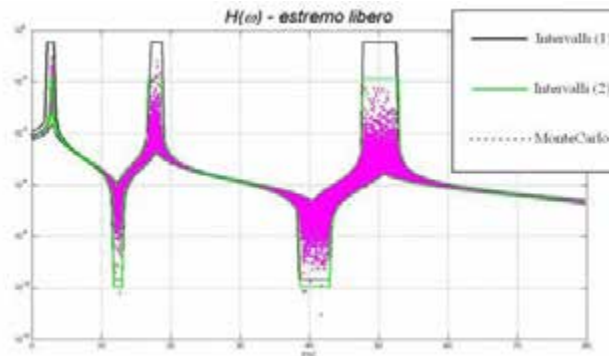


Figura 6 – Confronto delle soluzioni

## 5 CONCLUSIONI

Le considerazioni espone nell'articolo sono finalizzate all'analisi del trattamento delle incertezze in problemi di meccanica strutturale. Sono state esaminate a confronto due impostazioni alternative: una, di tipo convenzionale, basata sulla teoria della probabilità, l'altra di recente sviluppo basata sull'analisi ad intervalli. La principale differenza tra le due impostazioni consiste nella rappresentazione dell'incertezza che nel primo caso avviene tramite distribuzioni che privilegiano un parametro posizionale, p. es. la media, mentre nel secondo caso si fa uso di nozioni insiemistiche senza privilegiare valori nell'intervallo di definizione del parametro incerto. Ai fini del confronto sono stati considerati modelli semplici di incertezza riproposti secondo una formulazione unificata conveniente a rendere omogeneo il confronto. In particolare è stata introdotta una misura adimensionale dell'incertezza per la valutazione quantitativa della dispersione dei risultati. E' stata mostrata l'impostazione formalizzata per problemi di tipo così detto diretto ed inverso sia in campo statico che dinamico con dipendenza parametrica a sua volta diretta ed inversa. Le valutazioni quantitative sono state presentate in funzione di un semplice problema meccanico nel solo caso di problema diretto. I risultati mostrano che in entrambi i casi, statico e dinamico, l'impostazione probabilistica e ad intervalli si equivalgono sebbene con alcune

importanti precisazioni a vantaggio della seconda. Infatti, a fronte di problemi legati alla sovrastima della soluzione, l'analisi ad intervalli ha la proprietà di includere sempre la soluzione fisica del problema con onere computazionale irrilevante rispetto al calcolo in probabilità.

*References:*

- Alefeld, G., Mayer, G., 2000, *Interval analysis: theory and applications*, J. of Computational and Applied Mathematics, 121, 421-464.
- Ditlevsen, O., 1981. *Uncertainty Modeling*, McGraw-Hill.
- Ewins, D.J., 1984, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Pr.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E., 1995, *Finite element model updating in structural dynamics*, Kluwer Academic Publishers.
- Gabriele, S., 2004, *Aggiornamento parametrico di modelli EF con tecniche di analisi ad intervalli*, Collana delle Tesi del Dottorato di Ricerca in Scienze dell'Ingegneria Civile, Università Roma Tre, Tesi n°6.
- Hansen, E. R., 1992, *Global Optimization Using Interval Analysis*, Marcel Dekker, New York.
- Moore, R. E., 1966, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J.
- Qiu, Z., Chen, S., Jia, H., 1995, *The Rayleigh Quotient Iteration Method for Computing Eigenvalue Bounds of Structures with Bounded Uncertain Parameters*, Computer & Structures, Vol. 55 No. 2, 221-227.
- Shalaby, M. A., 2000, *The Interval Eigenvalue Problem: Review Article*, ECCOMAS 2000, Barcelona.
- Sorenson, H.W., 1980, *Parameter Estimation - Principles and Problems*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Zadeh, L. A., 1978, *Fuzzy Set as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

# Instability Characteristics of Harmonic Disturbances in a Turbulent Separation Bubble

Astrid H. Herbst

*Dept. of Mechanics, Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden*  
*E-mail: herbsta@mech.kth.se*

Steve Deubelbeiss

*Inst. of Fluid Dynamics, Dept. of Mechanical and  
Process Engineering, ETH Zürich, Switzerland*  
*E-mail: stdeubel@student.ethz.ch*

Saskia Speer

*Inst. f. Strömungslehre, Universität Karlsruhe, Germany*  
*E-mail: s.speer@gmx.de*

Ardeshir Hanifi

*Division of Systems Technology, Swedish Defence Research Agency, Stockholm, Sweden*  
*E-mail: ardeshir.hanifi@foi.se*

Dan S. Henningson

*Dept. of Mechanics, Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden*  
*E-mail: henning@mech.kth.se*

*Keywords: separated flow, direct numerical simulation, flow instability, POD*

**SUMMARY:** The instability characteristics of a turbulent flat plate boundary layer separating under a strong adverse pressure gradient are examined. The analysis is based on the data of direct numerical simulation. A theoretical model of harmonic perturbations is considered, including the contribution of the turbulent part of the flow, to investigate the stability characteristics of the flow. The structure of the organized waves is also investigated by means of Proper Orthogonal Decompositions (POD).

## 1. INTRODUCTION

The understanding of the behavior of a flow in a boundary layer and the knowledge of its physical implications like the wall shear rate or the heat transfer is in many technical and industrial applications often of paramount importance (for example for the design of a turbine blade). These physical properties depend heavily on if the flow is laminar, transitional or turbulent and if a separation bubble occurs or not. Therefore, Direct Numerical Simulations of a turbulent boundary layer separating under a strong adverse pressure gradient have been performed in Herbst (2004) and Herbst & Henningson (2005) which provide a basis for the present work. Flow separation limits the performance of many technical devices due to severe pressure losses. For this reason flow control may be desired to eliminate or reduce the size of the separation bubble. An interesting control approach, investigated in Herbst (2004) and Herbst & Henningson (2005), is to use *periodic excitation* to eliminate the separation. The turbulent flow over a flat plate with pressure gradient has been chosen as a model for separation and its control for the technological applications of interest, e.g. in diffusers.

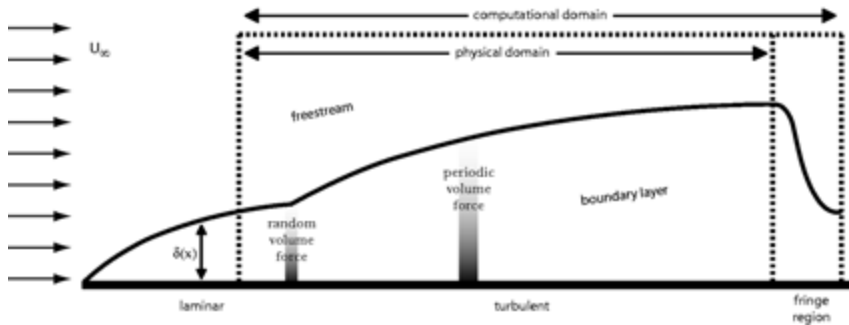


Figure 1: The physical and computational domain with random volume force for turbulence generation and the periodic volume force for the separation control.

These previous studies showed that the parameters (frequency and spanwise wavenumber) of the most efficient periodic forcing do not correspond to the most unstable mode predicted by the local linear stability analysis. This stability analysis was made based on the time-averaged profiles, ignoring the contribution of the turbulent part of the flow. One of the objectives of the present work is to advance the analysis by including the effects of the random turbulent flow. For this matter, we follow the approach of Hussain & Reynolds (1972) who used an eddy viscosity model to calculate the Reynolds stress terms caused by presence of organized waves in a turbulent flow. This approach was also used by Reau & Tumin (2000) to investigate the characteristics of harmonic perturbations in turbulent wakes.

The present article is based on the master thesis of S. Speer (2004) and S. Deubelbeiss (2005). Since new numerical simulations were performed some parts of the analysis were repeated and enhanced.

## 2. DIRECT NUMERICAL SIMULATIONS

The flow in a separated boundary layer over a flat plate has been studied by means of numerical simulations. Further, a periodic volume forcing has been used to control the separation bubble. The computational box (see figure 1) is 450 nondimensional units long including the fringe region with a length 50, 50 units high and 24 units wide. A resolution with 480 points in streamwise direction, 193 points in wall normal direction and 64 points in spanwise direction is used. Here, the reference length is the displacement thickness at inlet of the box where the Reynolds number  $Re=400$ . For a description of the numerical tools the readers are referred to Herbst (2005).

At the leading edge  $x=0$  a laminar Blasius boundary layer profile is introduced. Downstream at position  $x=10$  the laminar-turbulent transition is triggered by a random volume force near the wall (see figure 1). When no control is imposed, the separation of the flow occurs at  $x_{sep}=126$

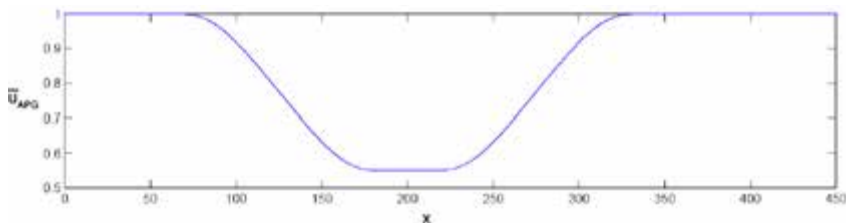


Figure 2: Freestream velocity distribution at the beginning of the simulation.

and the reattachment point is at  $x_{att}=247$  (reattachment length:  $x_r=121$ ). The control is performed by means of an oscillating volume force  $F_y$  in the wall-normal direction. This volume force decays

exponentially from the boundary layer wall and is centered around  $x_0$ :

$$F_y = f_0 \exp\left(-\frac{y}{c} - \left[\frac{x-x_0}{x_{scale}}\right]^2\right) \cos(\omega t) \cos(\beta z), \quad (1)$$

where  $f_0$  is the forcing amplitude,  $\omega$  the oscillation frequency,  $\beta$  the spanwise wavenumber,  $x_{scale}$  a parameter controlling the decay of the forcing in  $x$ -direction and  $c$  a parameter controlling the wall normal decay. It has been shown by Herbst & Henningson (2005) that the closer the forcing position (for the separation control) is located with respect to the separation point, the more effective it is in suppressing the separation. In the calculations presented here, the location of forcing is  $x_0=110$ , its frequency  $\omega=0.09$  and its amplitude set to either  $f_0=0.1$  or  $0.01$ .

To give a picture of the flow analyzed here, some plots with fundamental values (from the DNS calculations in Herbst (2004) and Herbst & Henningson (2005) are shown in figures 3 and 4.

In figure 3 the mean flow component in streamwise direction averaged in time and spanwise direction can be seen. The upper figure shows the unforced case with the separation bubble (white: negative streamwise velocity) and the lower one shows the forced case with a forcing frequency  $\omega=0.09$  and a forcing amplitude  $f_0=0.1$ . For the latter one the separation bubble almost disappears.

In figure 4 the  $U_{rms}$ -velocity is plotted for the unforced and forced cases. It is obvious that the range of fluctuations for the forced case is increased and that its maximum occurs around the forcing position.

### 3. STABILITY ANALYSIS

#### 3.1. Equations

Here, we present the equations describing the evolution of organized waves in a turbulent flow. The derivation follows closely the work of Hussain & Reynolds (1972).

As we are interested in evolution of coherent structures in a turbulent flow, we introduce the following decomposition of variables

$$\xi(\vec{x}, t) = \bar{\xi}(\vec{x}) + \tilde{\xi}(\vec{x}, t) + \xi'(\vec{x}, t). \quad (2)$$

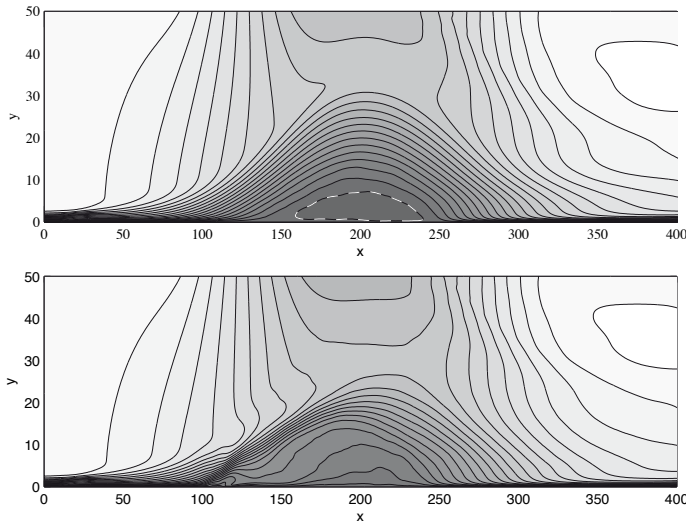


Figure 3: Mean velocity component in streamwise direction for the unforced and forced case in contour plots. Contours of mean velocity component in streamwise direction for (a) the unforced and (b) the forced case with the forcing frequency  $\omega=0.09$  and the forcing amplitude  $f_0=0.1$  (neg: dark grey to pos: white, white dashed line:  $-0.025$ , contour spacing  $0.05$ ).



where  $\overline{(\cdot)}$  denotes the mean (time-averaged) quantities,  $\langle \cdot \rangle$  the periodic wave and  $\langle \cdot \rangle'$  corresponds to

$$\overline{\xi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(\vec{x}, t + \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$\langle \xi(\vec{x}, t) \rangle = \xi(\vec{x}, t^\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi(\vec{x}, t^\varphi + iT_P), \quad t^\varphi = \frac{\varphi}{2\pi} T_P, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (4)$$

the turbulent motion. The time average  $\overline{\xi}$  and phase average  $\langle \xi \rangle$  are defined as

Here,  $T_p$  is the cycle duration and  $\phi$  the phase angle.

Introducing the triple decomposition (2) into the Navier-Stokes equations, phase averaging and subtracting the time-averaged equations give the dynamical equations for the organized waves which in non-dimensional form are

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{r}_{ij}, \quad (5)$$

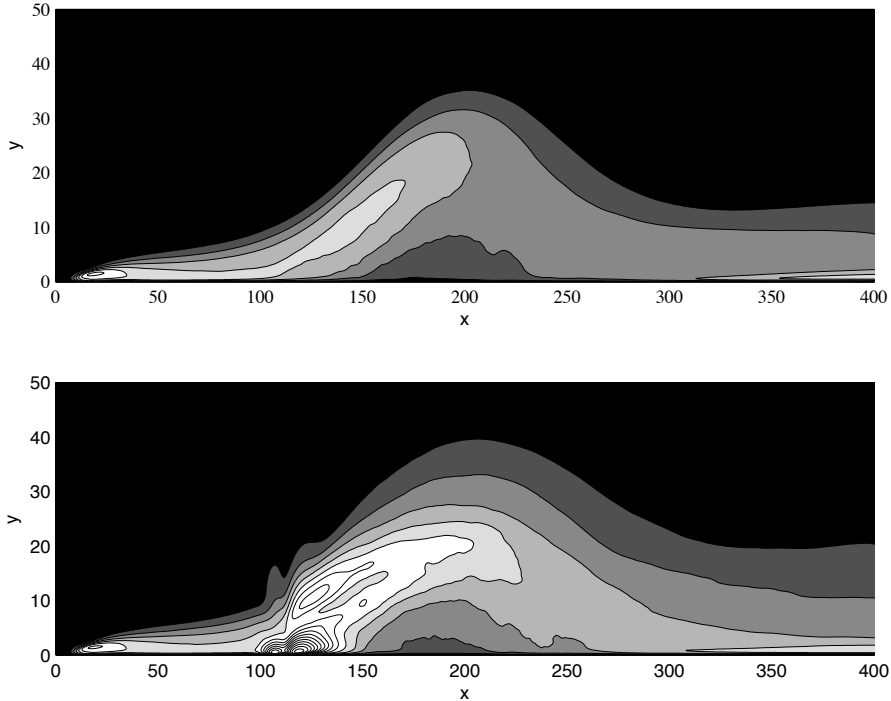


Figure 4:  $U_{rms}$  -velocity for the (a) unforced and (b) forced case (zero: dark grey to pos: white, contour spacing 0.03).

with

$$\tilde{r}_{ij} = \left\langle u'_i u'_j \right\rangle - \overline{u'_i u'_j}. \quad (6)$$

Here,  $u_i$  represents the  $i$ -th component of the velocity vector,  $p$  the pressure,  $t$  the time. The Reynolds number is defined as  $Re = U_{ref}^* L_{ref}^* / \nu_{ref}^*$ , where  $U_{ref}^*$ ,  $L_{ref}^*$  and  $\nu_{ref}^*$  represent a characteristic velocity, length and kinematic viscosity, respectively. Throughout this text, the subscripts 1, 2 and 3 correspond to the streamwise ( $x$ ), wall normal ( $y$ ) and spanwise ( $z$ ) directions, respectively. The velocities in the respective directions will also be denoted by  $u = u_1$ ,  $v = u_2$  and  $w = u_3$ . The term  $\tilde{r}_{ij}$  is the difference between the phase and time averages of the Reynolds stresses of the background turbulence and can be regarded as the oscillation of the background Reynolds stresses due to the passage of the organized disturbance. Following the work of Hussain & Reynolds (1972), we adopt an eddy viscosity model and assume

$$\tilde{r}_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = -2\nu_t \tilde{s}_{ij}, \quad \tilde{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (7)$$

Here,  $\nu_t$  is calculated based on the DNS results defined either as

$$\nu_t = \nu_t^e = -\frac{\overline{u'_i u'_j} \tilde{s}_{ij}}{2\overline{s_{kl} s_{kl}}} \quad \text{or} \quad \nu_t = \nu_t^k = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (8)$$

with  $k$  being the turbulent kinetic energy,  $\epsilon$  the dissipation rate and  $c_\mu = 0.09$  a model constant. We assume the organized waves to be normal modes given as

$$\tilde{\xi}(x, y, z, t) = \hat{\xi}(x, y) e^{i\theta}, \quad \text{with } \theta = \left( \int_{x_0}^x \alpha(x') dx' + \beta z - \omega t \right), \quad (9)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are stream- and spanwise wavenumbers, respectively, and  $\omega$  the angular frequency of the wave. Introducing the ansatz (9) and (7) in equation (5), removing the terms nonlinear in  $\tilde{u}_i$  and assuming weak streamwise dependency of flow variables result to a modified set of Parabolized Stability Equations, PSE (see e.g. Bertolotti et al. 1992).

### 3.2 Analysis

Here we present the results of the stability analysis of the unforced separation bubble. To measure the size of the disturbance, we choose an integral quantity defined as

$$A_{u^2} = \int_0^\infty |\tilde{u}|^2 dy. \quad (10)$$

with corresponding growth rate as

$$\sigma_{u^2} = -\alpha_i + \frac{\partial}{\partial x} \ln(\sqrt{A_{u^2}}), \quad (11)$$

In figure 5 the growth rates of disturbance with different  $\beta$  are shown. The data are given for both  $\nu_t = \nu_t^k$  and quasi laminar case  $\nu_t = 0$ . It was observed that for  $x < 140$  the eddy viscosity has a damping effect on the growth rate of the disturbances. However, for  $x > 140$  the effect of eddy viscosity was found to be the opposite for  $\beta > 0.1$ . The most interesting result is that when the eddy viscosity is taken into the account the damping rate decreases with increasing value of  $\beta$ . The opposite is valid for the quasi laminar case.

In order to make a comparison with the DNS result, we extract the coherent structures corresponding to the frequency of periodic forcing by a Fourier Transform of the spanwise- and phase-averaged data. Figure 6 demonstrates the structure of the organized wave in the separation bubble. As can be seen there, the amplitude of the wave decays as it propagates downstream.

In figure 7(a), the values of  $A_u^2$  as a function of streamwise position for the low and high amplitude cases are plotted. For comparison, the linear PSE results are also given. The DNS data show an initial growth of the disturbances which is then followed by a long region of decay. The maximum amplitude is reached at  $x \approx 120$  which is close to the point of separation in unforced case  $x=126$ . As can be seen, the PSE results seem to predict the decay of low amplitude case correctly. Surprisingly, the quasi laminar results ( $v_i=0$ ) fit better to the DNS data.

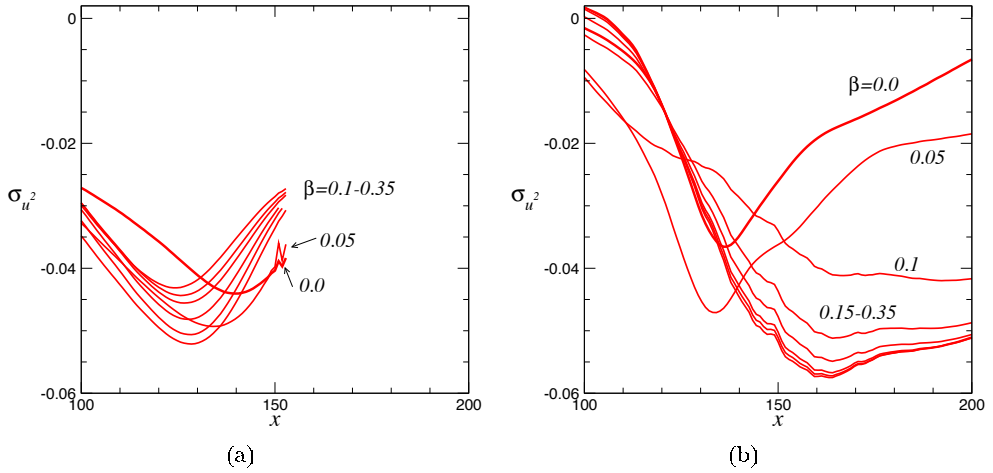


Figure 5: Growth rate based on  $A_u^2$  for different values of spanwise wavenumber  $\beta$ . (a)  $v_i = v_i^k$ ; (b)  $v_i = 0$ ,  $\omega = 0.09$ .

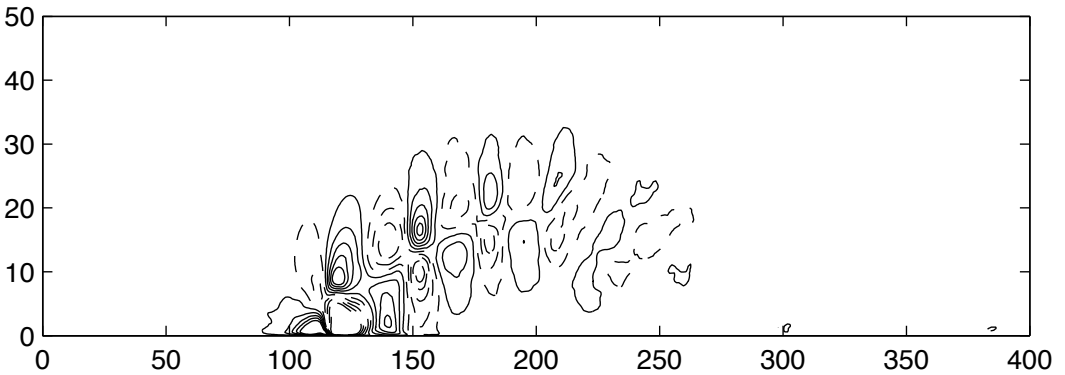


Figure 6: Contour plot of the coherent structure. Contours ranging from -0.225 to 0.225, contour spacing 0.05, dashed lines denote neg. values, solid lines denote pos. values.

In figure 7(b) the phase of the disturbance (high amplitude case) measured at the location of its maximum at each streamwise position is shown. Estimating the wavelength of the disturbance as  $\alpha = d\Phi/dx$  gives a value of 0.22, which corresponds to a phase velocity of  $c = 0.41$ . This value is close to that found in quasi laminar calculations.

In figure 8 the amplitude of disturbances from DNS and PSE calculations at two different streamwise positions are compared to each other. Although the variation of  $A_u^2$  in PSE and low amplitude forcing DNS are in close agreement, the shapes of disturbances are different.

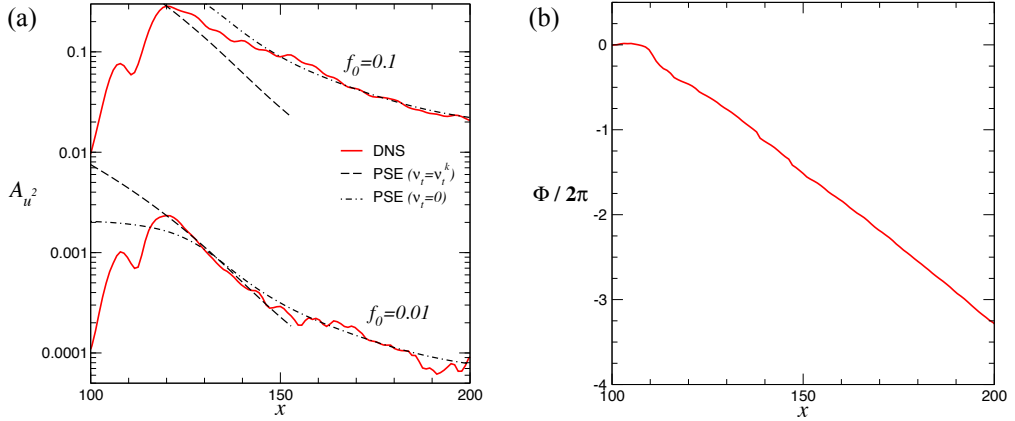


Figure 7: (a) Amplitude; (b) phase of the disturbance from DNS.

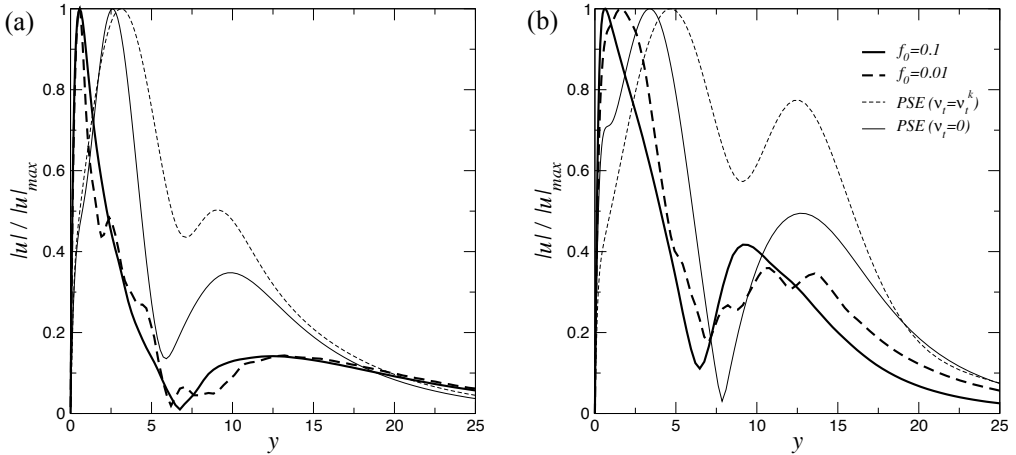


Figure 8: Amplitude of disturbances as a function of wall-normal coordinate. (a)  $x=102$ ; (b)  $x=121$ .

#### 4. PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION

Proper orthogonal decomposition (POD) was introduced by Lumley to identify coherent structures of random turbulent flows. The implementation of the POD in the manuscript is based on the method of snapshots developed by Sirovich (1987). For a given number  $M$  of snapshots of instantaneous velocity fields  $u_i(x,y,z,t_p)$  at discrete times  $t_p$ , the eigenvectors and eigenvalues of the discrete correlation matrix

are computed. For a thorough derivation of the equations and a detailed treatment of the subject, see e.g. the Holmes et. al. (1996).

$$A_{i,j} = 1/M \sum_{k=1}^{nx} \sum_{l=1}^{ny} \sum_{m=1}^{nz} \sum_{n=1}^3 u_i(x_k, y_l, z_l, t_i) u_i(x_k, y_l, z_l, t_j) \quad (12)$$

The results for POD applied to the periodically excited turbulent separation bubble are presented in this section. POD has been applied to three dimensional velocity fields, but since the flow is homogeneous in spanwise direction, every POD mode is associated with a Fourier mode in spanwise

direction. Consequently contour plots of a selected  $x$ - $y$ -plane are sufficient to show the results of the POD. The contour plots belong all to  $z=0$  and are therefore situated in the middle of the domain. The dataset which POD was performed on consists of 150 snapshots taken within one forcing-period and equidistant in time.

Figure 9 shows the eigenfunctions associated with the eight highest eigenvalues. The smaller the magnitude of the corresponding eigenvalues the less energy do the eigenfunctions contain. Therefore we focus on the eigenfunctions corresponding to the highest eigenvalues. The eigenfunction corresponding to the highest eigenvalue (mode 1) is shown in figure 9(a) and can be associated with the baseflow. Mode 2 and 3, shown in figures 9(b) and (c) show almost similar structures, originating around  $(x=110, y=0)$ , the point where the forcing is centred and decaying only slowly while travelling upwards in the shear layer. Figure 10(a) and (b) shows the eigenvalues. The first eigenvalue is four times higher than the second one. Remarkable is that the following eigenvalues occur in pairs, the second and third eigenvalues have the same order of magnitude (0.093 and 0.084) and are more than a factor two larger than the fourth and the fifth eigenvalue (0.04 and 0.03). Apart from a phase shift the projection of the snapshots on the eigenfunctions representing the time dependence of the expansion coefficient of the highest modes (figure 10(c) and (d)) is almost the same for the modes 2 and 3 with the frequency of the original forcing and for the modes 4 and 5 which represent the first harmonic. Since the structures displayed by figures 9(b) and (c) and by the figures 9(d) and (e) are also very similar is it again likely that each pair belongs to one structure that is travelling downstream.

## 5. CONCLUSIONS

A flat plate boundary layer flow under strong adverse pressure gradient causing a separation bubble was considered. The data from direct numerical simulations were analysed by means of stability theory and Proper Orthogonal Decomposition technique.

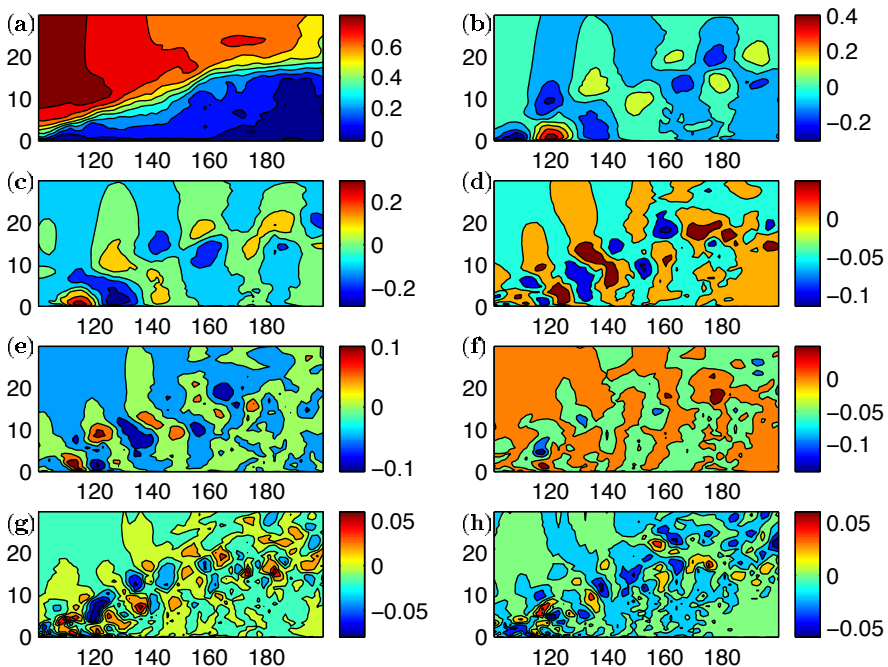


Figure 9: Contour plots of the eigenfunctions associated with the eight highest eigenvalues (Mode 1- 8) in descending order starting in (a).

The organized wave caused by periodic forcing was extracted by Fourier transform of the phase-averaged data.

For stability analysis, a theoretical model of harmonic perturbations is considered, including the effects of the random turbulent flow. Here, we have used an eddy viscosity approach to model the oscillations of the background Reynolds stresses caused by the organized wave. The equations were derived using the nonlocal stability theory based on the PSE method. The stability calculations seemed to predict the decay rate of the coherent structures correctly, while the shape of disturbances were different. It should be mentioned once again that due to large forcing amplitude the nonlinear effects are important here and may be able to explain some of the differences.

The POD technique was also used to extract the different structures of the flow. These results show a similarity to the structures found by Fourier transform of phase-averaged data.

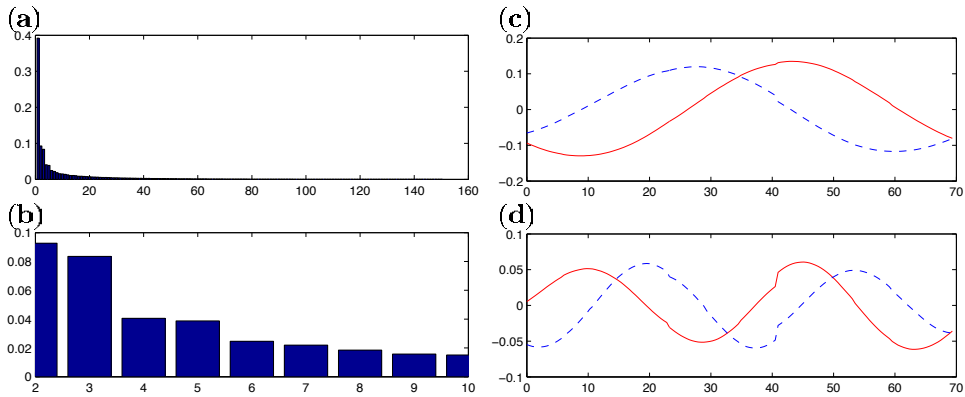


Figure 10: Eigenvalues corresponding to (a) mode 1- 50 (b) mode 2-8. Projection of the snapshots of the DNS on (c) modes 2 and 3 and (d) modes 4 and 5.

## 6. BIBLIOGRAPHY

- Herbst, A. (2004), *Studies of periodic excitation of a turbulent separation bubble*, Licentiate thesis, Stockholm, Royal Institute of Technology (KTH), Department of Mechanics.
- Herbst, A. H., Henningson, D. S. (2005), *The influence of periodic excitation on a turbulent separation bubble*, to appear in *Flow, Turbulence and Combustion*.
- Hussain, A., Reynolds, W. (1972), *The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow*. part 3. Theoretical models and comparisons with experiments, *J. Fluid Mech.* 54, p.263--288.
- Reau, N., Tumin, A. (2000), *On harmonic perturbations in turbulent wakes*, AIAA-2000-2539.
- Speer, S.(2004) *Proper orthogonal decomposition applied to turbulent separation*, Master thesis, Stockholm, Royal Institute of Technology (KTH), Department of Mechanics (2004).
- Deubelbeiss, S. (2005), *Instability characteristics of harmonic disturbances in a turbulent separation bubble* Diploma Thesis, Institute of Fluid Dynamics, Department of Mechanical and Process Engineering, ETH Zurich.
- Bertolotti, F., Herbert, T. (1992), *Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer*, *J. Fluid Mech.* 242, p. 441-474.
- Sirovich, L. (1987), *Turbulence and the dynamics of coherent structures*, *Quarterly of applied mathematics* XLV, p. 561-582.
- Holmes, P., Lumley, J.L., Berkooz, G. (1996), *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics.



# U-RANS Simulations Around Bluff Bodies

Claudio Marongiu  
Pier Luigi Vitagliano  
Francesco Capizzano  
Pietro Catalano

*Italian Center for Aerospace Research, Capua, Italy*  
*E-mail: c.marongiu@cira.it*

*Keywords:*RANS, U-RANS, Turbulence

**SUMMARY:** This work focuses on the applicability of an U-RANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) model to the simulation of flows around bluff bodies. Test configurations, as the cylinder and the square in 2D, and the cube in 3D are discussed for validation purposes. The flow around a matrix of cubes has been considered as final application. All computations are performed by the U-ZEN flow solver, a code developed at CIRA.

## 1. INTRODUCTION

The fluid dynamic analyses of bluff bodies with simple geometries, like cylinders, square and cube, represent an interesting problem for the CFD community. These applications are often used as test cases for the validation of numerical methods. They are interesting not only in the aerospace field, where an airfoil or a wing at high incidence behaves as a bluff body, but also for automotives and other configurations like civil constructions. The numerical solution of flows with a large separation region (comparable to the characteristic length of the domain) is a difficult task because of the turbulence that influences the whole field. Although the Navier Stokes equations are able to resolve the turbulent flows directly (DNS), the time and spatial resolution needed is so high that the applications of industrial interest are not practicable. In fact, the direct simulation requires a computational cost proportional to  $Re^{9/4}$  (where  $Re$  is the Reynolds number of the problem) [1]. Nowadays, the most competitive methodology is based on RANS approach. The weakness of this method is the closure problem. The unknowns added by the Reynolds averaging, are treated through the turbulence models by introducing an inaccuracy degree not well-defined. The Unsteady RANS model is defined by resolving the RANS equations through a time accurate integration. The U-RANS computations are more expensive with respect to the RANS, but they allow to resolve fluid dynamic problems where an unsteady solution is foreseen. In this way, the domain of the solutions extends by including the time dependent ones. Nevertheless, the limitations due to the turbulence models continue to be relevant. The aim of this work is to show some applications of U-RANS models for flows around bluff bodies. Some theoretical considerations on the applicability of this approach are discussed. Two-dimensional applications around the circular and square cylinder are performed. The flow around a wall mounted cubical obstacle in a channel flow is computed. Finally, the flow around a matrix of cubes placed on the floor of a channel is considered. For all numerical simulations the U-ZEN code, developed at CIRA, is used.

## 2. CONSIDERATIONS ON THE TIME AVERAGING FOR THE U-RANS MODEL

The presence in the flow of large recirculation regions is characterized by three-dimensionality, unsteadiness, and sometimes by macroscopic instabilities such as vortex shedding. For such flows, the numerical simulation is rather difficult. The turbulence itself is an intrinsically unsteady phenomenon. By excluding a direct numerical simulation, where any time and spatial scale is resolved, the methodologies normally employed in an industrial environment are based on average operations. Because of the non-linearity of the Navier-Stokes equations, the average operation gives



new unknowns that makes the system not resolvable. The closure problem is faced by adding new equations that constitute the turbulence model. In the RANS approach, the exact solution  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  is decomposed into two contributions:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \bar{\underline{u}}(\underline{x}) + \underline{u}'(\underline{x}, t) \quad (1)$$

where the mean solution  $\bar{\underline{u}}(\underline{x})$  is independent by the time. The turbulent fluctuation is represented by  $\underline{u}'(\underline{x}, t)$ . The decomposition (1.) is consistent with the following average operator:

$$\bar{\underline{u}}(\underline{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{u}(\underline{x}, t) dt \quad (2)$$

As a consequence,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{u}'(\underline{x}, t) dt = 0 \quad (3)$$

On the basis of this decomposition, the averaged momentum equation yields new unknowns contained in the so-called Reynolds stress tensor. By assuming the definition of the average (2.), the RANS equations admit only steady solutions. Besides, even if considering the steady problems only, the RANS solution is not equivalent to a time average Navier-Stokes solution because of the approximate representation of the Reynolds stress tensor:

$$\underline{u}(\underline{x})_{RANS} \neq \bar{\underline{u}}(\underline{x}) \quad (4)$$

By adding the time derivative of the average solution into the RANS equations, the U-RANS model is obtained. But, on the basis of the definition (2.), the presence of a time derivative into the momentum equation is not consistent. Therefore, in the U-RANS models the average is defined as:

$$\bar{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underline{u}(\underline{x}, t) dt \quad (5)$$

The definition (5.) introduces a new parameter, T. There are several theoretical explanations to the use of (5.), but no one is satisfactory enough. A way suggested by Wilcox, [2] is based on the concept of the time scale separation. The hypothesis is that at least two time scales  $T_1$  and  $T_2$  exist, such that  $T_2 \gg T_1$ , and the time scale T must be included between  $T_1 \ll T \ll T_2$ . In this context, the U-RANS should be able to simulate flows where slow variations of the mean quantities with a period  $T_2$  occur, and the turbulence fluctuations are simulated on the time scale  $T_1$  by the same closure models adopted for RANS. Nevertheless, serious objections are raised to this approach, because it is well known that the turbulent flows exhibit more than two time scales, and an energetic exchange among the various scales occur. Besides, the models adopted for the RANS closure problem are calibrated through experimental data without any definition of the time scale T, yielding some

doubts about the applicability of the average (5.) into the equations. Following these considerations, it is possible to state that only certain classes of turbulent unsteady flows can be resolved by the U-RANS model. Some cases where the U-RANS have been successfully applied are characterized by a single dominant frequency in the field, so that the following decomposition of the solution is allowed, [3]:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \bar{\underline{u}}(\underline{x}) + \tilde{\underline{u}}(\underline{x}, t) + \underline{u}'(\underline{x}, t) \quad (6)$$

The term  $\tilde{\underline{u}}(\underline{x}, t)$  takes into account the coherent variation of the mean solution. The turbulence represented by the term  $\underline{u}'(\underline{x}, t)$  is not resolved, but modeled as in the RANS approach. So, the cases that exhibit an explicit forcing term, such as the simulation of control devices, [6], moving bodies, or fluid dynamic instabilities like vortex shedding, [4], [5], can be simulated by an U-RANS model. The cases where the turbulence unsteadiness does not present any frequency peak need more appropriate methodologies.

### 3. NUMERICAL MODELING

The numerical simulations presented here are carried out by using the ZEN code, developed at CIRA [7]. ZEN is a very robust, flexible and well assessed computational tool for the aerodynamic analysis of complex configuration in subsonic, transonic and supersonic flow regimes. It solves the compressible RANS equations around complex 3D configurations (including complete aircraft) with a multi-block approach. As discrete mathematical model, a cell centered finite-volume method is used, with explicitly added artificial dissipation. A multi-grid method is used with the relaxation operator consisting of a Runge-Kutta time integration scheme. The solution procedure is based on the time marching concept. The time integration is accelerated by local time stepping and implicit residual averaging. The time-marching approach obtains the steady-state solution by evolving in a pseudo-time from an initial guess until the convergence is achieved. The time accurate solutions are achieved by the dual time stepping method.

### 4. FLOW AROUND THE CIRCULAR CYLINDER AT RE 3900

A first example of flow around a bluff body is the cylinder with circular section. It is a well-documented case, for that many experimental and numerical data are available.[8] It is known that the flow is laminar and steady for Reynolds up to 40. The flow is still laminar for  $Re < 150$ , but an unsteady vortex shedding occurs. By increasing the Reynolds three dimensional effects are found. The sub-critical regime is defined between  $Re$  300 and  $2 \times 10^5$ . Here, the separation is laminar, and the transition to turbulent flow occurs in the wake. The case examined here is  $Re = 3900$ , based on the cylinder diameter  $d$ . Although the experiments show three dimensional effects, the simulation has been carried out on a two-dimensional domain. The computational grid, shown in Figure 1, has a C-topology, with  $200 \times 60$  cells. The body circumference has been discretized by 72 cells. The size of the first cell near the wall is  $3 \times 10^{-3}d$  in the normal direction. The flow domain extends from  $20d$  upstream to  $15d$  downstream, where far-field conditions are imposed. Two turbulence models have been tested, the standard  $k-\epsilon$  model, and the TNT Kok  $k-\omega$  model [9]. The transition is imposed at 50% of the circumference. The comparisons are reported in terms of averaged field over one vortex shedding period. The time step used is  $0.125d/U_\infty$ . The Strouhal number obtained numerically is 0.208, whereas the experimental is 0.215. The mean  $C_d$  is 0.865, in good agreement with the experimental value (0.98). In Figure 2 the averaged stream lines are shown. In Figure 3, some velocity profiles in the wake are shown. In particular, two abscissas,  $x/d = 1.06$  e  $x/d = 3.00$ , are examined. The z-direction is normal to the streamwise direction. The coordinate system origin is located at the center of the cylinder. The experimental data (Lourenco[10]), and some numerical results obtained

with LES methods (Mahesh [12], Mittal [13] and Kravchenko [14]), are also reported. For the  $u$ -component, there are no significant discrepancies between the numerical and experimental data (Figure 3a and Figure 3c). The U-RANS results, nevertheless, show weaker gradients in the  $z$ -direction. At  $x/d=3.00$ , Figure 3c, the experimental data show higher values for  $z/d > 1$ , with respect to the numerical ones. Some uncertainties on the velocity values for  $z/d \approx 0$  occur. Among the two turbulence models  $k-\varepsilon$  and  $k-\omega$ , no important difference can be seen. The differences are more evident for the normal component, as can be seen in Figure 3b and Figure 3d. The numerical-experimental discrepancies are clear, see Figure 3b, moreover the U-RANS disagree with LES for  $z/d < 0.7$ .

## 5. FLOW AROUND A SQUARE CYLINDER AT RE 22000

Another example of unsteady turbulent flow is represented by the square cylinder test. The Reynolds number is 22000, where the reference length is the square edge  $H$ . The experimental information are reported in [11]. In such conditions, the flow exhibits a turbulent wake with an alternating detachment of vortices. The phenomenology is similar to the previous case. But, here, the separations are geometrically imposed because of the sharp edges. The computational grid consists of an O topology around the body, see Figure 4. The square edge has been discretized with 48 cells. The size of the first cell near the wall is  $10^{-3}H$ . The flow domain extends from  $5H$  upstream to  $14H$  downstream. Far field conditions are imposed at the external boundaries. A fully turbulent simulation has been carried out. To initialize the unsteady computation, a preliminary solution has been computed with a large time step. Then, an instantaneous asymmetric disturb has been added. After a transitory time of about 60 time units, a periodic regime has been found. The time interval is 0.05, that samples the vortex shedding period with about 140 steps. The Strouhal number obtained numerically is 0.142. The experimental value is 0.132. In Figure 5, the averaged stream lines are reported. It can be observed that the flow separates immediately on the upper and lower edges. Two counter-rotating vortices are present on the rear face. Besides, near the vertices at  $x/h=0.5$ , and  $z/h=\pm 0.5$ , two secondary vortices are formed. In Figure 6, the comparisons of some velocity profiles are shown. The major discrepancies occur in the wake center for  $z/h \approx 0$ . Globally, the results are satisfactory.

## 6. FLOW AROUND A WALL MOUNTED CUBE AT RE 40000

The flow around a cubical obstacle has been the objective of many investigations.[4], [16]. The experimental works are due to Hussein [17], and Martinuzzi [18]. The channel height is  $2H$ , where  $H$  is the cube edge. The Reynolds number is 40000, based on the cube edge and the bulk velocity  $U_b$ . The inflow conditions are imposed at  $6H$  upstream. The out flow boundaries are placed  $13H$  downstream. The lateral walls are located  $5.5H$  away from the body. A no-slip boundary condition is applied on the floor and on the roof. At the lateral walls a slip-solid wall condition has been used. The cube edge is discretized with 48 cells. The size of the first cell near the wall is  $10^{-4}H$ . Globally, the fine level grid contains  $2.4 \cdot 10^6$  cells. A RANS computation has been carried out by using the Kok's TNT  $k-\omega$  turbulence model. By looking at the stream lines in the center plane ( $y/H=0$ ), Figure 7, it is possible to note a separation region upstream the cube. The reattachment occurs at  $x/H = -0.74$ , whereas the experimental value is  $x/H=-1.04$ . The computed downstream bubble length is  $2.7H$  while the experimental value is  $1.6H$ . Another separation is present on the top face of the cube. This last one is the trace of the three dimensional arch vortex that surrounds the cube. The upstream recirculation, instead, is the trace of the horseshoe vortex. In Figure 8, the pressure coefficient on the channel floor and roof along the plane  $y/H=0$  is reported. It can be noted that the pressure on the floor downstream the cube is higher than that on the roof, as noted by Hussein [17]. This is due to the effect of the horseshoe vortex. By the experiments, the maximum pressure difference ( $C_{p_{max}} - C_{p_{min}}$ ) is 1.47, that is underestimated by the computations,  $\Delta C_p=1.31$ . Some velocity profiles are analyzed in Figure 9. At  $x/H=0.5$  the negative peak is underestimated, whereas, the top wall boundary layer is well captured. At  $x/H=1.0$  the experiments show a reverse flow that is under-predicted by the numerical data. At  $x/H = 2.0$  the velocity profile in the bubble center is well reproduced. At

$x/H=4.0$  the numerical results show a slower velocity recovery. Globally, the phenomenology is reasonable well reproduced. The main discrepancies occur in the reverse flow regions.

By using the U-RANS model, Iaccarino (2001), captured a vortex shedding starting from the side walls. The arch vortex moved downstream in alternating way, increasing the momentum exchange in the recirculation region downstream the cube. So, a better prediction of the bubble length with respect to the RANS computation can be obtained through the U-RANS model. Here, the U-RANS computation has been carried out on the medium grid level. By adding an asymmetrical instantaneous disturb in the wake, the unsteadiness has not been found. The U-RANS solution converges toward the RANS one. This is probably due to the insufficient grid resolution. Future investigations will examine this aspect on the finest grid level.

## 7. FLOW IN A MATRIX OF SURFACE-MOUNTED CUBES AT RE 3800

One of the test cases proposed at the workshop held at Delf University in 1997 was the flow around a matrix of surface mounted cubes [19]. The experimental data are available on the ER-COFTAC website. The matrix is made of  $25 \times 10$  cubes. The cube edge is  $H=15$  mm. The channel height is  $3.4H$ . The distances between the rows and columns have a pitch of  $4H$  in both  $x$  and  $y$  directions. In the experimental test, one of the cubes was heated at  $75^\circ$ , but in the present simulations the thermic effects are not simulated. The bulk velocity is  $U_b = 3.86$  m/s. The Reynolds number, based on  $H$  and  $U_b$  is 3800. The experimental measurements were taken at the 18<sup>th</sup> row from the inlet, where the flow is fully developed and symmetric. In this condition, the flow is independent by the inlet and outlet, and periodic conditions can be used. The numerical computation is carried out on a sub-domain of  $4H \times 4H \times 3.4H$  in  $x$ ,  $y$  and  $z$  directions respectively, see Figure 10. The choice of the sub-domain can be arbitrary. In this application the axis origin is shown in Figure 11. The periodic conditions are assigned at the faces normal to the  $x$  direction, and symmetry conditions are used for the faces normal to the  $y$  direction. The sub-domain mass flow rate is  $13.70 \times 10^{-3}$  kg  $s^{-1}$ . The computational grid has 10 blocks, with 626688 cells, Figure 13. The size of the first cell near the wall is  $2 \times 10^{-3}H$ . The cube edge is discretized by using 48 cells.

By analyzing the solution in the center plane  $y/H=0$ , Figure 12, two different regions can be observed. The first is characterized by a turbulent boundary layer on the top-wall, not much influenced by the presence of the obstacles. For  $2H \leq z \leq 2.5H$ , the flow reaches the highest velocity in streamwise direction. The lower region, for  $z \leq 1.5H$ , is characterized by the separations due the obstacles, see Figure 13. The velocity profile at  $x=-0.3H$  in the plane  $y/H=0$ , intersects the separation bubble upstream the cube. Downstream the cube, a primary vortex is present. The vortex structures are similar to that of the single wall-mounted cube. A steady RANS computation using the Kok's TNT turbulence model has been carried out. The RANS simulation reproduces most of the vortical structures discovered by the experimental data. The major discrepancies are evident in the recirculation regions inside the bubbles, that are always over-predicted. The overestimation of the separation bubble at the leading edge increases the blockage effect, by diverting the flow laterally. This explains the overestimation of the velocities in the plane  $z/H=0.5$  at various abscissas, Figure 14. The RANS computation underpredicts the streamwise component up to  $y/H \approx 1.5$ . An U-RANS computation has been carried out starting from the RANS solution, but no differences with respect to the steady ones can be observed. An asymmetric perturbation has been applied on the two bubbles upstream and downstream the cube, but, after a transient time, unsteadiness has not been observed in the solution. In [20], a LES investigation was carried out. By analyzing the energy spectra for the streamwise, vertical and spanwise velocity components, no peak was discovered.

## 8. CONCLUSIONS

The U-RANS methodology is not able to resolve every kind of unsteadiness. When in the solution a well-defined periodicity is present, it is possible to capture the phenomenology. In this paper, four test cases have been shown as examples of flows around bluff bodies. The RANS and U-RANS

methodologies have been discussed with respect to the specific applications herein. The two-dimensional cases, both with and without sharp edges in the body, show a clear presence of vortex shedding, whereas in the 3D cases this does not happen. In the case of a wall mounted single cube, a dynamical mechanism of vortex detachment has been discovered by Iaccarino et al. [4] by using the U-RANS model and by other authors using LES [16]. Some further testing is needed to verify our results. For the matrix of cubes an analogous phenomenon has not been found neither in literature nor in the present work.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The U-ZEN code has been developed within the frame of HALEWING and ACADEMIA projects with the financial support of PRORA and MIUR respectively.

#### References

- [1] Moin P., Kim J., "Tackling Turbulence with Supercomputers", *Scientific American*, **276**, No 1, 1997
- [2] Wilcox D. C., "Turbulence Modeling for CFD", 2<sup>nd</sup> ed., DCW Industries, 1998.
- [3] Sagaut P., [2000], "Large Eddy Simulation for Incompressible Flows", Springer-Verlag Edition
- [4] Iaccarino G., Ooi A., Durbin P. A., Behenia M., "Reynolds averaged simulation of unsteady separated flow", *Int. J. of Heat and Fluid Flow* **24** (2003) 147-156.
- [5] Marongiu C., Catalano P., Amato M., Iaccarino G., "U-ZEN: A Computational Tool Solving U-RANS Equations For Industrial Unsteady Applications", 34<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2004, Portland, OR
- [6] Capizzano F., Catalano P., Marongiu C., Vitagliano P., "U-RANS Modelling of Turbulent Flows Controlled by Synthetic Jets", AIAA-2005-5015, 35<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Toronto, Ontario, 2005
- [7] Catalano P., Amato M., "An evaluation of RANS turbulence modelling for aerodynamics applications", *Aerospace Science and Technology*, Vol 7, No. 7, October 2003, pg 493-509
- [8] Beadan P., Moin P., "Numerical Experiments on the flow past a circular cylinder at sub-critical Reynolds number", Report No. TF-62, 1994, Stanford University.
- [9] Kok J. C., "Resolving the dependence on free-stream values for the  $k-\omega$  turbulence model", *AIAA J.*, Vol. 38, No 7, July 2000, pp.1292-1295
- [10] Lourenco L. M., Shih C., "Characteristics of the plate turbulent near wake of a circular cylinder. A particle image velocimetry study", Private Communication. 1993
- [11] Lyn D. A., Einav S., Rodi W., Park. J. H., "A laser-Doppler velocimetry study of ensemble averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder", *J. Fluid Mech.* 304, 205-232, 1995.
- [12] Mahesh K., Costantinescu G., Moin P., "Large Eddy simulation of gas turbine combustors", Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, 2000
- [13] Mittal R., Moin P., "Suitability of upwind biased schemes for large-eddy simulation", *AIAA J.*, 30(8): 1415-1417, 1997
- [14] Kravchenko A., Moin P., "B-Spline methods and zonal grids for numerical simulations of turbulent flows", Report TF-73, Thermosciences Division, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1998
- [15] Myong H., Kasagi N., "A new approach to the improvement of the k- $\epsilon$  turbulence model for wall bounded shear flows", *JSME Intern. J.*, Ser.2 33(1) 63-72.
- [16] Krajnovic S., Davidson, L., "Large Eddy Simulation of the Flow Around a Bluff Body", *AIAA J.*, Vol 49, No 5, May 2002.

- [17] Hussein H. J., Martinuzzi R. J., "Energy balance for turbulent flow around a surface cube placed in a channel", *Phys. Fluids* **8** (3), March 1996
- [18] Martinuzzi R. J., Tropea C., "The flow around Surface-Mounted, Prismatic obstacles Placed in a Fully Developed Channel Flow", *J. of Fluids Eng.*, Vol 115/85 March 1993.
- [19] ERCOFTAC Workshop. Case 6.2: Fully developed flow and heat transfer in a matrix of surface mounted cubes. Proceedings.
- [20] Cheng Y., Lien F. S., Yee E., Sinclair R., "A comparison of large Eddy simulations with a standard  $k-\epsilon$  Reynolds-averaged Navier-Stokes model for the prediction of a fully developed turbulent flow over a matrix of cubes", *J. of Wind Eng. and Industrial Aerod.*, **91** (2003) 1301-1328

Figures

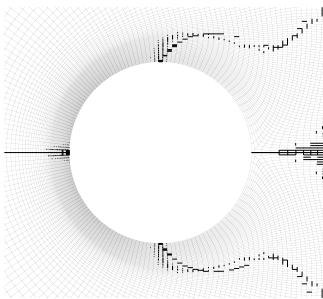


Figure 1 – Circular Cylinder Computational Grid

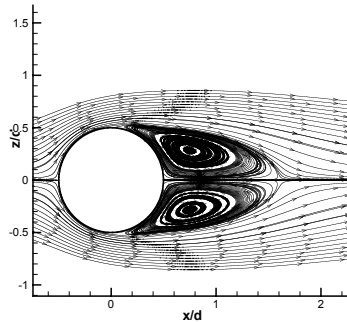


Figure 2 –Averaged Stream lines

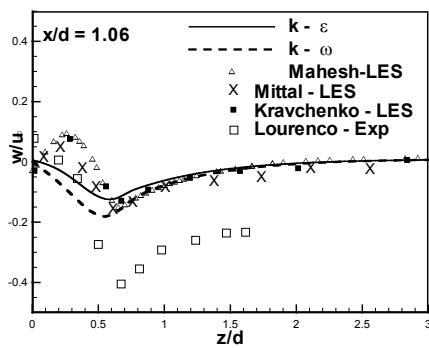
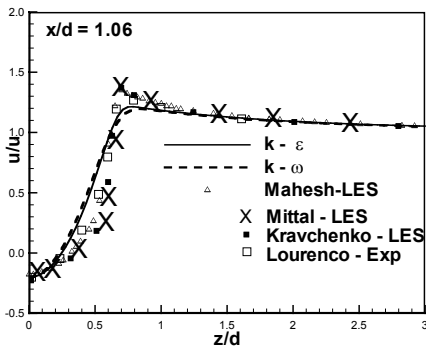


Figure 3. Circular Cylinder at Reynolds 3900. Averaged velocity profiles in the wake. (a)  $x/d = 1.06$   $u$  component. (b)  $x/d = 1.06$   $w$  component. (c)  $x/d = 3.00$   $u$  component. (d)  $x/d = 3.00$   $w$  component

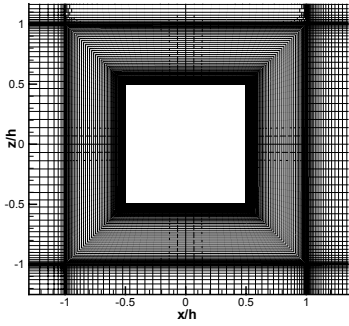


Figure 4 – Square Cylinder: Computational Grid

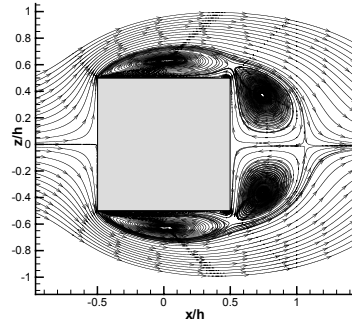
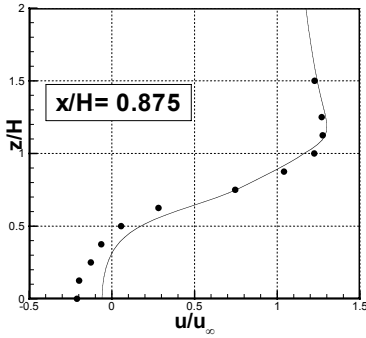
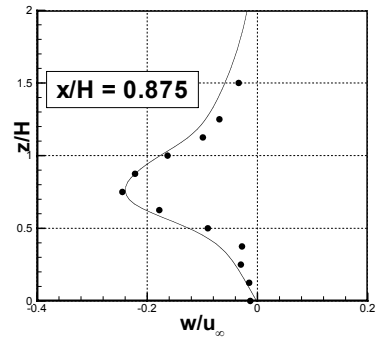


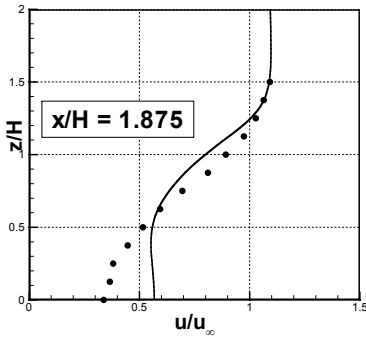
Figure 5 – Averaged Stream lines



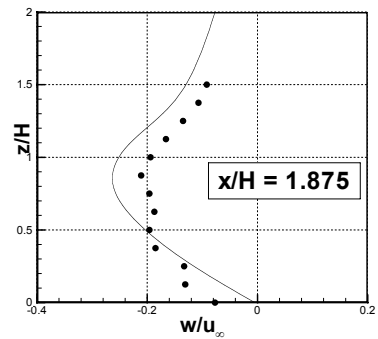
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 6. Square Cylinder: Averaged velocity profiles in the wake. (a)  $x/d = 0.875$   $u$  component. (b)  $x/d = 0.875$   $w$  component. (c)  $x/d = 1.875$   $u$  component. (d)  $x/d = 1.875$   $w$  component

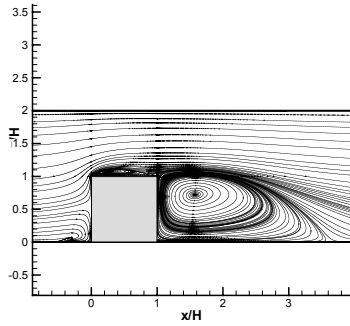


Figure 7 – Wall Mounted Cube. Stream lines in the plane  $y/H = 0$ .

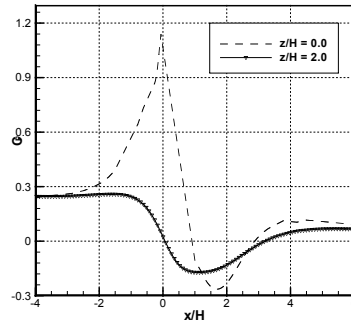


Figure 8 – Wall Mounted Cube. Pressure coefficient on the channel floor and roof along the plane  $y/H = 0$ .

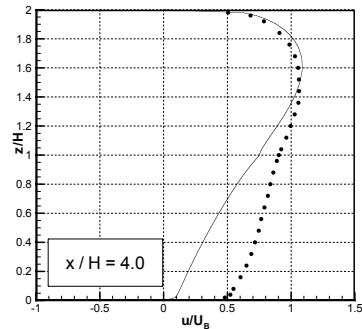
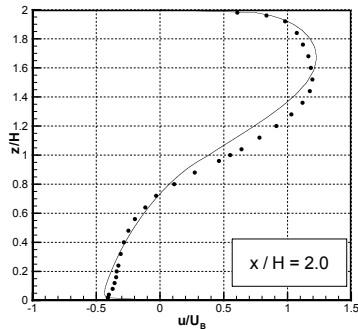
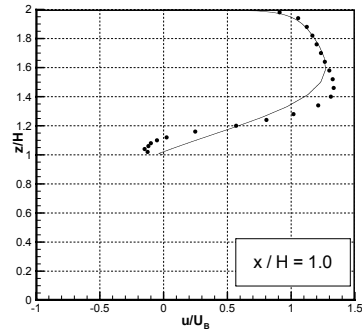
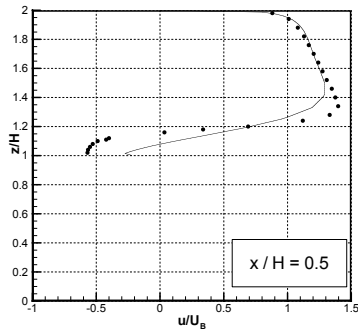


Figure 9 – Wall Mounted Cube. Velocity profiles. Streamwise component along the plane  $y/H = 0$  at different stations. (computations: solid lines, experiments: symbols)



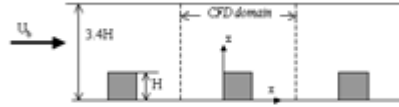
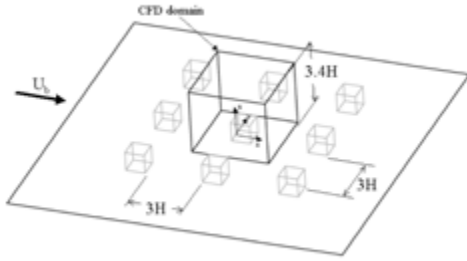


Figure 10 – Three dimensional view of the matrix of cubes on the channel flow

Figure 11 – Side view of the matrix of cubes on the plane  $y=0$ .

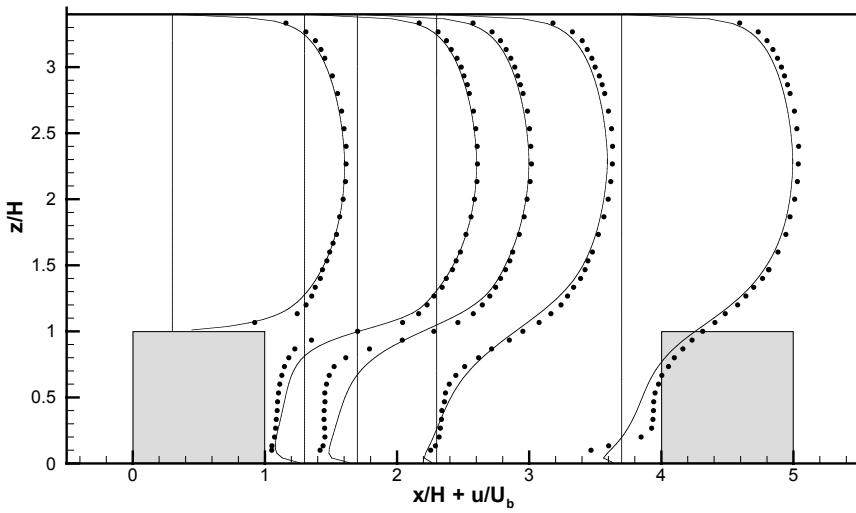


Figure 12 – Streamwise velocity profiles in the plane  $y=0$ , at the experimental abscissas. (computations: solid lines, experiments: symbols)

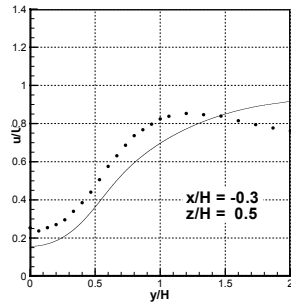
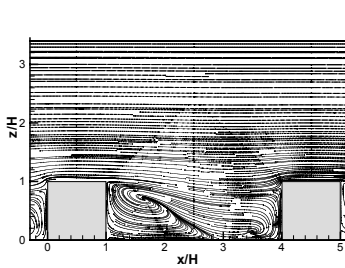


Figure 13 –Matrix of Cubes. Stream lines.

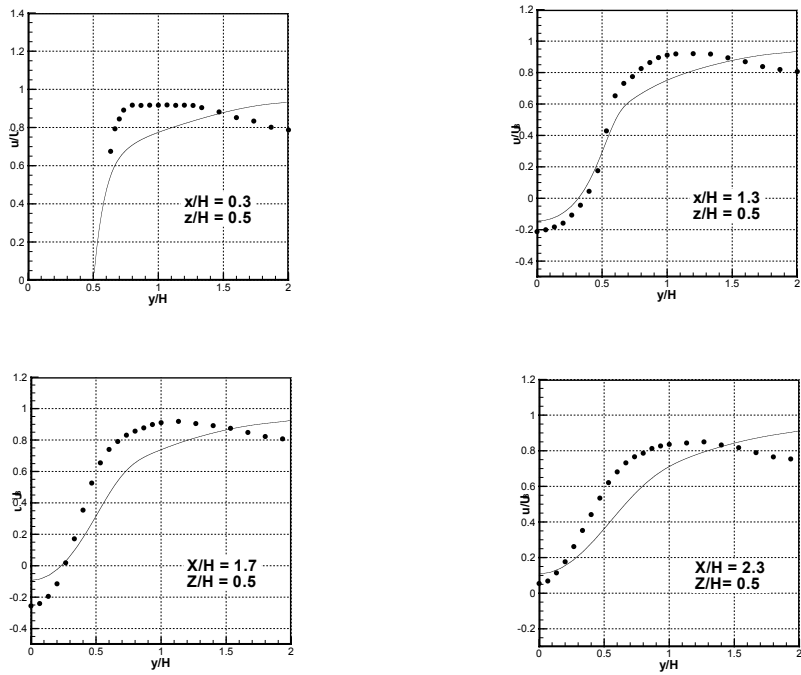


Figure 14 –Velocity profiles in the plane  $z/H=0.5$ . Streamwise component.



# Analisi dinamica deterministica ed aleatoria di oscillatori che percorrono travi su suolo viscoelastico

Giuseppe Muscolino

*Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Messina*

*E-mail: muscolin@ingegneria.unime.it*

Alessandro Palmeri

*Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Messina*

*E-mail: alexpalm@ingegneria.unime.it*

*Keywords:* Interazione Veicolo-Armamento, Modello di Zener, Oscillatori Viaggianti, Viscoelasticità.

**SOMMARIO:** Si presenta una tecnica per l'analisi nel dominio del tempo delle vibrazioni indotte da un oscillatore che percorre una trave elastica su suolo viscoelastico. Le equazioni che governano il moto dell'oscillatore mobile e della trave modellata al continuo sono derivate indipendentemente ed accoppiate imponendo a valle le condizioni di equilibrio e di compatibilità. Contrariamente alle formulazioni usualmente impiegate nella pratica tecnica, che utilizzano valori equivalenti di rigidità e di dissipazione viscosa, l'approccio proposto consente di rappresentare il legame costitutivo della fondazione viscoelastica attraverso modelli reologici più accurati. La tecnica proposta è applicata al caso di un oscillatore lineare che percorre una trave omogenea poggiate su un tappeto di gomma descritto mediante il modello di Zener. Nelle analisi si tiene conto anche dell'effetto dell'irregolarità aleatoria nel contatto oscillatore-trave.

## 1. INTRODUZIONE

In virtù della sua rilevanza nell'analisi e nel progetto dell'armamento ferroviario, la risposta dinamica di travi su fondazione elastica soggette a carichi viaggianti è stata oggetto di numerosi studi, teorici e sperimentali (Fryba 1996, 1999). Il modello più semplice è quello della forza viaggiante, in cui l'azione del veicolo è descritta da un carico concentrato che si muove lungo il binario. Per tener conto dell'interazione dinamica tra veicolo ed armamento si può utilizzare il modello dell'oscillatore viaggiante, in cui il veicolo è schematizzato come un oscillatore ad 1 GdL. Così facendo si possono descrivere qualitativamente i principali fenomeni di interazione veicolo-armamento. Per una più precisa quantificazione, tuttavia, sono necessari modelli più sofisticati, in cui i singoli veicoli ferroviari sono schematizzati come strutture a molti GdL.

L'armamento ferroviario, tuttavia, è usualmente modellato in maniera molto semplificata, come una trave elastica poggiate su un letto di molle elastiche con smorzamento puramente viscoso. Nella realtà il suo comportamento dinamico è molto più complesso, presentando rigidità e dissipazione dipendenti dalla frequenza di vibrazione. E' questo il caso, ad esempio, di alcune tratte della metropolitana di Milano, in cui un materassino di materiale elastomerico è interposto tra rotaia e piastra di supporto al fine di ridurre l'entità delle vibrazioni indotte dal transito dei veicoli. In questo caso l'assunzione di uno smorzamento puramente viscoso risulta inadeguata, ed è richiesto l'uso di modelli reologici più accurati (Bruni & Collina, 2000).

Nel dominio delle frequenze l'introduzione di modelli viscoelastici non presenta particolari difficoltà, e la funzione di risposta in frequenza dell'armamento ferroviario può essere facilmente valutata a partire dalla conoscenza delle proprietà meccaniche dell'elastomero. Tuttavia, per studiare i fenomeni di interazione veicolo-armamento occorre operare nel dominio del tempo, accoppiando le equazioni che governano l'equilibrio dinamico delle due sottostrutture (veicolo ed armamento) con le equazioni di stato dei componenti viscoelastici.

In questo lavoro si considera il caso più semplice di un oscillatore ad un GdL che si muove su una trave elastica su fondazione viscoelastica, descritta dal modello di Zener. Si perviene ad una formulazione nello spazio degli stati in cui le variabili di stato sono lo spostamento e la velocità dell'oscillatore viaggiante, gli spostamenti e le velocità dei primi modi di vibrare della trave e le variabili interne aggiuntive associate al modello viscoelastico della fondazione. Nello studio si tiene anche conto della irregolarità del contatto veicolo-binario, descritta come un processo aleatorio gaussiano, stazionario ed a media nulla, di assegnato spettro di potenza.

2. EQUAZIONI DEL MOTO NEL DOMINIO TEMPO-FREQUENZA

Si consideri il sistema piano mostrato in Figura 1, costituito da un oscillatore ad 1 GdL che percorre una trave elastica su fondazione viscoelastica.

L'oscillatore viaggiante è costituito da una massa  $m_v$  che si muove lungo la trave con legge oraria nota,  $x = x_v(t)$ , ed è collegata ad essa mediante un dispositivo di sospensione lineare descritto dal modello di Kelvin-Voigt, in cui la molla elastica  $k_v$  è in parallelo con il dissipatore viscoso  $c_v$ .

La trave, omogenea e ad asse rettilineo, è descritta dal modello di Bernoulli-Navier. I parametri che intervengono nell'analisi dinamica sono la lunghezza  $L_b$ , l'area  $A_b$ , il momento d'inerzia  $J_b$ , la densità di massa  $\rho_b$ , il modulo di elasticità  $E_b$  ed il rapporto di smorzamento viscoso  $\zeta_b$ , che si assume uguale per tutti i modi di vibrare.

La fondazione viscoelastica, infine, schematizzata in figura come un letto di molle, è anch'essa omogenea ed è completamente definita dalla rigidità dinamica,  $K_f(\omega)$ , che è una funzione complessa della frequenza di vibrazione,  $\omega$ .

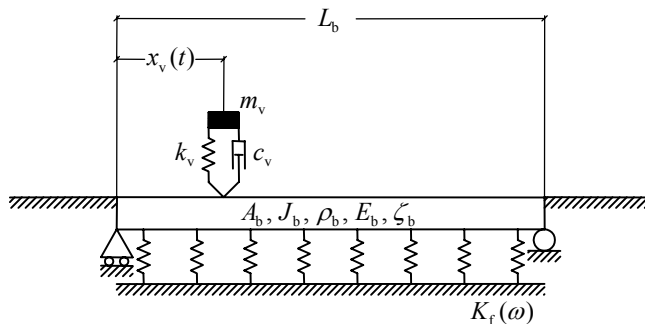


Figura 1. Oscillatore ad 1 GdL che percorre una trave elastica su fondazione viscoelastica.

Nel seguito l'oscillatore viaggiante e la trave su fondazione viscoelastica sono visti come due sottostrutture, per le quali è possibile scrivere separatamente le equazioni di equilibrio dinamico. Queste ultime sono accoppiate a valle, tenendo conto delle equazioni di equilibrio e di compatibilità nel punto di contatto.

### 2.1. Vibrazioni della trave su suolo viscoelastico

Il moto della trave rappresentata in Figura 2a è governato dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\rho_b A_b \ddot{u}(x,t) + E_b J_b u''''(x,t) + D_b(x,t) = f(x,t) - K_f(\omega)u(x,t) \quad (1)$$

in cui il punto e l'apice indicano ordinatamente la derivazione rispetto al tempo  $t$  ed all'ascissa  $x$ ,  $f(x,t)$  e  $u(x,t)$  descrivono rispettivamente il campo delle forze esterne ed il campo degli spostamenti,  $D_b(x,t)$ , infine, rappresenta la forza di dissipazione viscosa nella trave. L'equazione (1) è scritta convenzionalmente nel cosiddetto dominio misto tempo-frequenza, utile ad esprimere la dipendenza dalla frequenza di vibrazione del sistema trave-fondazione.

Proiettando il moto della trave nello spazio modale, il campo di spostamenti si può esprimere come combinazione lineare delle coordinate modali:

$$u(x,t) = \sum_i \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

dove  $\phi_i(x)$  è la  $i$ -esima forma modale della trave e  $q_i(t)$  è la corrispondente coordinata modale, retta dall'equazione differenziale ordinaria:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_b \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_0^{L_b} f(x,t) \phi_i(x) dx - F_i(t) \quad (3)$$

in cui  $\zeta_b$  è il rapporto di smorzamento viscoso della trave, che si assume uguale per tutti i modi, ed  $F_i(t)$  è la  $i$ -esima forza modale associata alla reazione della fondazione viscoelastica,  $K_f(\omega)u(x,t)$ , epurata della parte puramente elastica,  $K_f(0)u(x,t)$ :

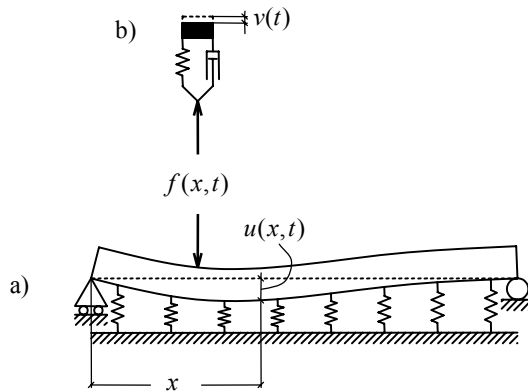


Figura 2. Trave elastica su fondazione viscoelastica (a); oscillatore viaggiante (b).

$$F_i(t) = \frac{K_f(\omega) - K_f(0)}{\rho_b A_b} q_i(t) \quad (4)$$

essendo  $K_f(0)$  il modulo di equilibrio della fondazione, che ne rappresenta la rigidità elastica, ossia la rigidità per carichi statici (al limite per  $\omega \rightarrow 0$ ).

La forma modale  $\phi_i(x)$  e la pulsazione naturale  $\omega_i$  nelle equazioni (2) e (3) si determinano risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$\frac{E_b J_b}{\rho_b A_b} \phi_i''''(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad ; \quad \omega_i = \sqrt{\alpha_i + \frac{K_f(0)}{\rho_b A_b}} \quad (5)$$

con la condizione di ortonormalità:

$$\rho_b A_b \int_0^{L_b} \phi_i(x) \phi_k(x) dx = \delta_{ik}$$

essendo  $\delta_{ik}$  l'operatore delta di Kronecker. Si osservi che la forma modale  $\phi_i(x)$  e l'autovalore  $\alpha_i$  non dipendono dal modulo di equilibrio, mentre la pulsazione naturale  $\omega_i$  aumenta con esso.

L'equazione (3) è stata ottenuta estendendo al caso di strutture continue con dissipazione viscoelastica diffusa il metodo recentemente proposto da Palmeri et al. (2004) per l'analisi modale di strutture intelaiate con dispositivi viscoelastici. Tale metodo consente di eseguire l'analisi dinamica modale di strutture a molti GdL dotate di dissipazione viscoelastica tenendo conto in maniera coerente, e senza approssimazione alcuna, dell'effettivo modello reologico dei componenti viscoelastici.

Nella pratica tecnica, al contrario, si adottano metodi di analisi approssimati, come ad esempio il metodo MSE (Modal Strain Energy), originariamente proposto da Johnson & Kienholz (1982). In accordo a tale metodo l'effetto della fondazione viscoelastica sull' $i$ -esimo modo di vibrare è tenuto in conto mediante valori equivalenti della pulsazione naturale e del rapporto di smorzamento. Così facendo, dunque, la trave su fondazione viscoelastica è ricondotta ad un sistema classicamente smorzato, in cui gli oscillatori modali presentano un modello di Kelvin-Voigt equivalente, con dissipazione puramente viscosa.

## 2.2. Vibrazioni dell'oscillatore

L'equilibrio dinamico dell'oscillatore viaggiante in Figura 2b è governato, nella direzione verticale, dall'equazione:

$$m_v \ddot{v}_a(t) + c_v \dot{v}(t) + k_v v(t) = m_v g \quad (6)$$

dove  $\ddot{v}_a(t)$  è l'accelerazione assoluta,  $v(t)$  e  $\dot{v}(t)$  sono ordinatamente lo spostamento relativo e la velocità relativa e  $g$  è l'accelerazione di gravità. Quando l'oscillatore percorre la trave ( $0 \leq x_v(t) \leq L_b$ ) l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione relativa,  $\ddot{v}(t)$ , dell'accelerazione del punto di contatto con la trave,  $d^2 [u(x_v(t), t)] / dt^2$ , e dell'accelerazione dovuta all'irregolarità del contatto oscillatore-trave,  $d^2 [-r(x_v(t))] / dt^2$ , essendo  $r(x)$  la funzione deterministica che descrive l'irregolarità. Quando, invece, l'oscillatore si trova all'esterno della trave ( $x_v(t) < 0$  o  $x_v(t) > L_b$ ) l'accelerazione assoluta coincide con l'accelerazione relativa. L'equazione (6), dunque, si può riscrivere nella forma:

$$\ddot{v}(t) + 2\zeta_v \omega_v \dot{v}(t) + \omega_v^2 v(t) = g - \Pi_v(t) \frac{d^2}{dt^2} [u(x_v(t), t) - r(x_v(t))] \quad (7)$$

dove  $\omega_v = \sqrt{k_v/m_v}$  e  $\zeta_v = c_v/[2\omega_v m_v]$  sono rispettivamente la pulsazione naturale ed il rapporto di smorzamento dell'oscillatore viaggiante e dove  $\Pi_v(t)$  è una funzione finestra che vale 1 quando il veicolo è in contatto con la trave, 0 in caso contrario:

$$\Pi_v(t) = U(x_v(t))U(L_b - x_v(t)) \quad (8)$$

essendo  $U(x)$  la funzione gradino unitario, tale che  $U(x) = 0$  per  $x < 0$  e  $U(x) = 1$  per  $x \geq 0$ .

### 2.3. Condizione di compatibilità

Si osservi che l'equazione (7) garantisce la compatibilità tra le vibrazioni di trave ed oscillatore mobile. Esplicitando l'accelerazione relativa a secondo membro, si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{v}(t) + 2\zeta_v \omega_v \dot{v}(t) + \omega_v^2 v(t) = g + N(t) + \\ - \Pi_v(t) [\ddot{u}(x_v(t), t) + 2\dot{u}'(x_v(t), t)\dot{x}_v(t) + u''(x_v(t), t)\dot{x}_v^2(t) + u'(x_v(t), t)\ddot{x}_v(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

essendo  $N(t) = \Pi_v(t) [r''(x_v(t))\dot{x}_v^2(t) + r'(x_v(t))\ddot{x}_v(t)]$  la forzante dinamica sull'oscillatore viaggiante, la quale, nota l'irregolarità,  $r(x)$ , e la legge oraria,  $x_v(t)$ , può essere valutata preventivamente. Sostituendo, quindi, l'equazione (2) nella (9) si ottiene:

$$\ddot{v}(t) + 2\zeta_v \omega_v \dot{v}(t) + \omega_v^2 v(t) = g + N(t) - \sum_i \{M_i(t)\ddot{q}_i(t) + C_i(t)\dot{q}_i(t) + K_i(t)q_i(t)\} \quad (10)$$

dove i coefficienti tempo-dipendenti  $M_i(t) = \phi_i(x_v(t))\Pi_v(t)$ ,  $C_i(t) = 2\phi_i'(x_v(t))\dot{x}_v(t)\Pi_v(t)$  e  $K_i(t) = [\phi_i''(x_v(t))\dot{x}_v^2(t) + \phi_i'(x_v(t))\ddot{x}_v(t)]\Pi_v(t)$  sono rispettivamente la massa, la dissipazione e la rigidità con cui l' $i$ -esima forma modale della trave interagisce con le vibrazioni verticali dell'oscillatore viaggiante.

### 2.4. Condizione di equilibrio

Al fine di soddisfare l'equilibrio si esprime la forzante  $f(x, t)$  nell'equazione (3) come la reazione del dispositivo di sospensione dell'oscillatore viaggiante, localizzata nel punto di contatto con la trave,  $x = x_v(t)$ :

$$f(x_v(t), t) = [k_v v(t) + c_v \dot{v}(t)]\Pi_v(t)\delta(x - x_v(t)) \quad (11)$$

dove  $\delta(x)$  è la funzione delta di Dirac. Sostituendo l'equazione (11) nella (3), si trova:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \Pi_v(t)[k_v v(t) + c_v \dot{v}(t)]\phi_i(x_v(t)) - F_i(t) \quad (12)$$

## 3. MODELLO DI ZENER

In Figura 3 è rappresentato il modello di Zener, costituito da una molla  $k_3$  in serie con un modello solido standard, in cui una molla  $k_2$  è in parallelo con un elemento di Maxwell, ottenuto disponendo una molla  $k_1$  in serie con un dissipatore  $c_1$ . Tale modello è stato utilmente impiegato da Bruni e Collina (2000) per rappresentare il comportamento dinamico del materiale elastomerico che in alcune tratte della metropolitana



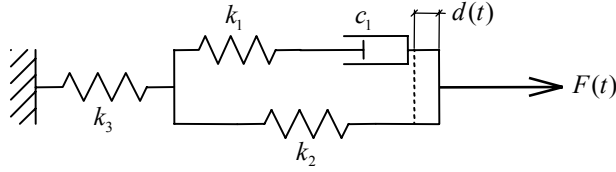


Figura 3. Modello di Zener.

di Milano è stato inserito per ridurre gli effetti dinamici su veicoli ed armamento. Si dimostra che la rigidità dinamica di questo modello è:

$$K(\omega) = \left\{ k_3^{-1} + \left[ k_2 + \left( k_1^{-1} + \frac{1}{j\omega c_1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}$$

ed il modulo di equilibrio è  $K(0) = (k_2^{-1} + k_3^{-1})^{-1}$ .

Nel dominio misto tempo-frequenza la forza di reazione del modello viscoelastico, epurata dalla parte puramente elastica,  $F(t)$ , è legata alla deformazione,  $d(t)$ , dalla relazione:

$$F(t) = [K(\omega) - K(0)]d(t) \quad (13)$$

In alternativa, la forza  $F(t)$  nel dominio del tempo si può esprimere come:

$$F(t) = k_1 \lambda_1(t) + k_2 \lambda_2(t) - K(0)d(t) \quad (14)$$

essendo  $\lambda_1(t)$  e  $\lambda_2(t)$  due variabili interne che misurano la deformazione delle due molle  $k_1$  e  $k_2$ . Queste ultime sono governate dalle equazioni:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\lambda}_2(t) - \frac{\lambda_1(t)}{\tau_1} \quad ; \quad \lambda_2(t) = \frac{k_3}{k_2 + k_3} \delta(t) - \frac{k_1}{k_2 + k_3} \lambda_1(t) \quad (15)$$

dove  $\tau_1 = k_1/c_1$  è il tempo di rilassamento dell'elemento di Maxwell. Sostituendo la seconda delle equazioni (15) nella (14) e nella prima delle (15) si ottiene:

$$F(t) = a_1 \lambda_1(t) \quad ; \quad \dot{\lambda}_1(t) = D_0 \dot{d}(t) + D_1 \lambda_1(t) \quad (16)$$

avendo posto:

$$a_1 = k_1 \left( 1 - \frac{k_2}{k_2 + k_3} \right) \quad ; \quad D_0 = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \quad ; \quad D_1 = -\frac{k_2 + k_3}{(k_1 + k_2 + k_3)\tau_1}$$

#### 4. MODELLO ALEATORIO DELL'IRREGOLARITA'

L'irregolarità nel contatto oscillatore-trave,  $r(x)$ , si può pensare come la realizzazione di un processo aleatorio, gaussiano, stazionario ed a media nulla. Questo, dunque, è completamente definito dalla spettro

di potenza monolatero,  $G_r(\gamma)$ , dove  $\gamma$  è il numero d'onda. Assegnato lo spettro  $G_r(\gamma)$ , il generico campione dell'irregolarità si può generare mediante la formula:

$$r(x) = \sum_{j=1}^n A_j \sin(\gamma_j x + \theta_j)$$

dove  $A_j = \sqrt{2 G_r(\gamma_j) \Delta\gamma}$  e  $\gamma_j = (j-1/2) \Delta\gamma$  sono rispettivamente l'ampiezza ed il numero d'onda del  $j$ -esimo contributo,  $\Delta\gamma = \gamma_c/n$  è il passo di campionamento,  $\gamma_c$  è il numero d'onda di cut-off,  $n$  è il numero di termini considerati nella sommatoria e  $\theta_j$  è la  $j$ -esima fase aleatoria, uniformemente distribuita nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Il corrispondente segnale  $N(t)$  si può esprimere nella forma:

$$N(t) = \Pi_v(t) \left[ -\dot{x}_v(t) \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j^2 \sin(\gamma_j x + \theta_j) + \ddot{x}_v(t) \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j \cos(\gamma_j x + \theta_j) \right] \quad (17)$$

In ambito ferroviario (Frýba 1996), ad esempio, si può utilizzare per l'irregolarità  $r(x)$  il modello empirico proposto dalla francese SNCF (Société Nationale des Chemins de Fer):

$$G_r(\gamma) = \frac{10^{-6} A_r}{(1 + \gamma/\gamma_0)^3} \quad (18)$$

dove  $A_r$  è un parametro delle dimensioni di una lunghezza al cubo, legato alla qualità dell'armamento, e  $\gamma_0$  è una costante, delle dimensioni di un numero d'onda.

## 5. RISPOSTA NELLO SPAZIO DEGLI STATI

### 5.1. Equazioni accoppiate

Nei precedenti paragrafi si sono presentate le equazioni che governano le coordinate modali della trave elastica (eq. (12)), le vibrazioni dell'oscillatore viaggiante (eq. (10)) ed il modello di Zener (eq. (16)). Tali equazioni possono essere riscritte in forma matriciale, una volta introdotti i vettori delle variabili di stato  $\mathbf{z}_i(t) = [q_i(t) \quad \dot{q}_i(t)]^T$  per l' $i$ -esimo modo di vibrare della trave e  $\mathbf{z}_v(t) = [v(t) \quad \dot{v}(t)]^T$  per l'oscillatore viaggiante. Inoltre, dal confronto tra le equazioni (4), (13) e (16) si trae che una variabile interna,  $\lambda_{i1}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , deve essere aggiunta per ciascun modo di vibrare della trave.

Così facendo, l'equazione (12) diviene:

$$\dot{\mathbf{z}}_i(t) = \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i(t) + \mathbf{D}_{iv}(t) \mathbf{z}_v(t) - \mathbf{v} F_i(t) \quad (19)$$

in cui:

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i \omega_i \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_{iv}(t) = \phi_i(x_v(t)) \Pi_v(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_v & c_v \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'equazione (10) diviene:

$$\dot{\mathbf{z}}_v(t) = \mathbf{D}_v \mathbf{z}_v(t) + \mathbf{v} [g + N(t)] + \sum_i [\mathbf{D}_{vi}(t) \mathbf{z}_i(t) - \mathbf{v} M_i(t) \mathbf{v}^T \dot{\mathbf{z}}_i(t)] \quad (20)$$

in cui:

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_v^2 & -2\zeta_v \omega_v \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_{vi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_i(t) & -C_i(t) \end{bmatrix}$$

Sostituendo l'equazione (19) nella (20) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{z}}_v(t) = \bar{\mathbf{D}}_v(t) \mathbf{z}_v(t) + \sum_i \bar{\mathbf{D}}_{vi}(t) \mathbf{z}_i(t) + \mathbf{v} [g + N(t)] + \mathbf{v} \sum_i [M_i(t) F_i(t)] \quad (21)$$

avendo posto:

$$\bar{\mathbf{D}}_v(t) = \mathbf{D}_v - \mathbf{v} \mathbf{v}^T \sum_i M_i(t) \mathbf{D}_{iv}(t) \quad ; \quad \bar{\mathbf{D}}_{vi}(t) = \mathbf{D}_{vi}(t) - \mathbf{v} \mathbf{v}^T M_i(t) \mathbf{D}_i$$

Tenuto conto della prima delle equazioni (16), le forze  $F_i(t)$  nelle equazioni (19) e (21) si possono esprimere nella forma:

$$F_i(t) = \frac{a_i}{\rho_b A_b} \lambda_{i1}(t) \quad (22)$$

in cui la variabile interna  $\lambda_{i1}(t)$  si può pensare come la deformazione nella molla  $k_1$  nel modello di Zener che descrive l'effetto della fondazione viscoelastica sull' $i$ -esima forma modale della trave. La variabile interna  $\lambda_{i1}(t)$ , in virtù della seconda delle equazioni (16), è governata dall'equazione:

$$\dot{\lambda}_{i1}(t) = \mathbf{d}_0^T \mathbf{z}_i(t) + D_1 \lambda_{i1}(t) \quad (23)$$

dove  $\mathbf{d}_0^T = [0 \quad D_0]$ .

Le equazioni (19), (21), (22) e (23) devono essere risolte simultaneamente. A tal fine, fissato il numero  $m$  di modi della trave da considerare nell'analisi, si introduce il super-vettore delle variabili di stato  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{z}_v^T(t) \mid \mathbf{z}_1^T(t) \quad \cdots \quad \mathbf{z}_m^T(t) \mid \lambda_1(t) \quad \cdots \quad \lambda_m(t)]^T$ , che è retto dall'equazione:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{D}(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (24)$$

dove:

$$\mathbf{D}(t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \bar{\mathbf{D}}_v(t) & \bar{\mathbf{D}}_{v1}(t) & \cdots & \bar{\mathbf{D}}_{vm}(t) & \frac{M_1(t)A}{\rho_b A_b} \mathbf{v} & \cdots & \frac{M_m(t)A}{\rho_b A_b} \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{D}_{1v}(t) & \mathbf{D}_1 & & & -\frac{A}{\rho_b A_b} \mathbf{v} & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbf{D}_{mv}(t) & & & \mathbf{D}_m & & & -\frac{A}{\rho_b A_b} \mathbf{v} \\ \hline [0 \ 0] & \mathbf{d}_0^T & & & D_1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ [0 \ 0] & & & \mathbf{d}_0^T & & & D_1 \end{array} \right] ; \quad \mathbf{f}(t) = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{v} [g + N(t)] \\ \hline [0 \ 0]^T \\ \vdots \\ [0 \ 0]^T \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right]$$

### 5.2. Schema numerico

L'equazione (24) rappresenta un sistema di  $3m+2$  equazioni differenziali lineari ordinarie non omogenee, di primo grado, con coefficienti tempo-dipendenti, la cui soluzione nel dominio del tempo può essere conseguita mediante la soluzione al passo descritta qui di seguito.

Si discretizza l'asse dei tempi in intervalli di ampiezza costante,  $\Delta t$ . Nell' $i$ -esimo intervallo temporale,  $[t_i, t_{i+1}]$ , con  $t_i = i \Delta t$ , si assume che la matrice dinamica sia costante,  $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}(t_i)$ . Conseguentemente, all'interno di tale intervallo l'equazione (24) si può pensare nella forma:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{D}_i \mathbf{z}(t) + [\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}_i] \mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t) \quad , \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

dove a secondo membro, oltre al vettore forzante  $\mathbf{f}(t)$ , compare una pseudo-forzante, anch'essa tempo dipendente,  $[\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}_i] \mathbf{z}(t)$ . Se quest'ultimo termine è lineare nel passo, il vettore della risposta a fine passo,  $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}(t_{i+1})$ , si può valutare mediante l'espressione:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \Theta_i \mathbf{z}_i + \gamma_{i1} (\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i) \mathbf{z}_{i+1} + \gamma_{i0} \mathbf{f}(t_i) + \gamma_{i1} \mathbf{f}(t_{i+1}) \quad (25)$$

dove le matrici  $\Theta_i$ ,  $\gamma_{i0}$  e  $\gamma_{i1}$  sono così definite:

$$\Theta_i = \exp(\mathbf{D}_i \Delta t) \quad ; \quad \mathbf{L}_i = (\Theta_i - \mathbf{I}_{3m+2}) \mathbf{D}_i^{-1} \quad ; \quad \gamma_{i0} = (\Theta_i - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L}_i) \mathbf{D}_i^{-1} \quad ; \quad \gamma_{i1} = (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{L}_i - \mathbf{I}_{3m+2}) \mathbf{D}_i^{-1}$$

essendo  $\mathbf{I}_{3m+2}$  la matrice identità di ordine  $3m+2$ . Risolvendo l'equazione (25) rispetto a  $\mathbf{z}_{i+1}$  si trova (Muscolino 1996):

$$\mathbf{z}_{i+1} = \tilde{\Theta}_i \mathbf{z}_i + \tilde{\gamma}_{i0} \mathbf{f}(t_i) + \tilde{\gamma}_{i1} \mathbf{f}(t_{i+1}) \quad (26)$$

in cui:

$$\mathbf{J}_i = [\mathbf{I}_{3m+2} - \gamma_{i1} (\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i)]^{-1} \quad ; \quad \tilde{\Theta}_i = \mathbf{J}_i \Theta_i \quad ; \quad \tilde{\gamma}_{i0} = \mathbf{J}_i \gamma_{i0} \quad ; \quad \tilde{\gamma}_{i1} = \mathbf{J}_i \gamma_{i1}$$

Lo schema numerico così ottenuto è stato implementato su software Mathematica 4.0 per eseguire le prove numeriche presentate nel paragrafo successivo. Per i confronti, uno schema numerico del tutto simile è stato formulato ed implementato per il caso in cui la fondazione viscoelastica è descritta dalla metodo MSE.

## 6. APPLICAZIONI NUMERICHE

Al fine di validare la tecnica proposta, e di evidenziare l'errore che si commette utilizzando il metodo MSE, si sono studiate le vibrazioni indotte dal passaggio di un oscillatore che percorre una trave semplicemente appoggiata con velocità costante  $V$ , per cui la legge oraria dell'oscillatore viaggiante è  $x_v(t) = Vt$ . Le caratteristiche geometriche e meccaniche di trave, fondazione ed oscillatore viaggiante sono riportate in Tabella 1.

La  $i$ -esima forma modale della trave è data dall'espressione:  $\phi_i(x) = \sqrt{2/m_b} \sin(i\pi x/L_b)$ , essendo  $m_b = \rho_b A_b L_b$  la massa della trave. In Figura 4 sono rappresentate le prime cinque forme modali, ed in Tabella 2 sono riportati i corrispondenti valori delle frequenze circolari e dei rapporti di smorzamento che si ottengono utilizzando la tecnica proposta ed il metodo MSE. Si noti che i primi modi di vibrare presen-

Tabella 1. Dati geometrici e meccanici.

trave elastica			oscillatore viaggiante			fondazione viscoelastica		
$\rho_b$	8000	kg/m <sup>3</sup>	$m_v$	120	kg	$k_1$	5000	kN/m <sup>2</sup>
$E_b$	300000	Mpa	$k_v$	10	kN/m	$c_1$	100	kNs/m <sup>2</sup>
$L_b$	10	m	$c_v$	200	Ns/m	$k_2$	1000	kN/m <sup>2</sup>
$\zeta_b$	0.02		$V$	10	m/s	$k_3$	2000	kN/m <sup>2</sup>
$A_b$	50	cm <sup>2</sup>	$\omega_v$	9.13	rad/s	$\tau_1$	0.02	s
$J_b$	417	cm <sup>4</sup>	$\zeta_v$	0.0913		$k_f(0)$	667	kN/m <sup>2</sup>

tano uno smorzamento maggiore, legato alla dissipazione di energia aggiuntiva che è garantita dalla fondazione elastomerica.

In una prima fase si è trascurato l'effetto della irregolarità del contatto oscillatore-trave, ponendo deterministicamente  $N(t) = 0$  nell'equazione del moto. In Figura 5 sono mostrate le deformate della trave quando la posizione dell'oscillatore viaggiante,  $x = x_v(t)$ , è  $0.25 L_b$  (a),  $0.50 L_b$  (b) e  $0.75 L_b$  (c). In tutte e tre le configurazioni si osserva che il metodo MSE, utilizzando valori equivalenti di rigidezza e dissipazione viscosa, sottostima notevolmente le deformazioni subite dalla trave per il passaggio dell'oscillatore.

In Figura 6 sono mostrate le storie temporali dell'abbassamento in mezzeria (a),  $u_m(t) = u(L_b / 2, t)$ , dell'abbassamento relativo dell'oscillatore viaggiante (b),  $v(t)$ , e dell'accelerazione assoluta dell'oscillatore viaggiante (c),  $\ddot{v}_a(t) = g - \omega_v^2 v(t) - 2\zeta_v \omega_v \dot{v}(t)$ . Anche in questo caso i risultati forniti dal metodo MSE sono a svantaggio di sicurezza.

La tecnica proposta si presta ad essere efficacemente applicata per valutare, attraverso simulazioni Monte Carlo, le statistiche della risposta di oscillatore e trave in presenza di irregolarità nel contatto. In una seconda fase, quindi, è stata introdotto nel sistema l'irregolarità aleatoria  $r(t)$ , descritta probabilisticamente dallo spettro di equazione (19), caratterizzato da  $A_r = 31.25 \text{ m}^3$  e  $\gamma_0 = 0.4 \text{ rad/m}$ . In Figura 7a sono rappresentate le densità di probabilità dell'abbassamento della trave in corrispondenza

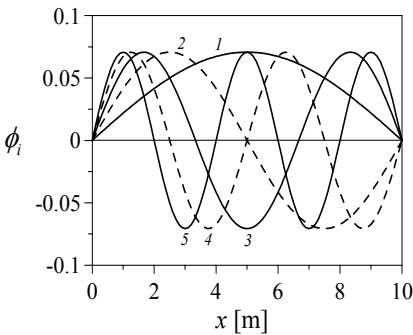


Figura 4. Forme modali della trave.

Tabella 2. Frequenze circolari e rapporti di smorzamento modali

modo	proposto		tecnica MSE			
	$\omega_i$		$\tilde{\omega}_i$		$\tilde{\zeta}_i$	
1	$\omega_1$	130 rad/s	$\tilde{\omega}_1$	194 rad/s	$\tilde{\zeta}_1$	0.0465
2	$\omega_2$	148 "	$\tilde{\omega}_2$	205 "	$\tilde{\zeta}_2$	0.0423
3	$\omega_3$	203 "	$\tilde{\omega}_3$	249 "	$\tilde{\zeta}_3$	0.0326
4	$\omega_4$	308 "	$\tilde{\omega}_4$	340 "	$\tilde{\zeta}_4$	0.0250
5	$\omega_5$	455 "	$\tilde{\omega}_5$	477 "	$\tilde{\zeta}_5$	0.0218

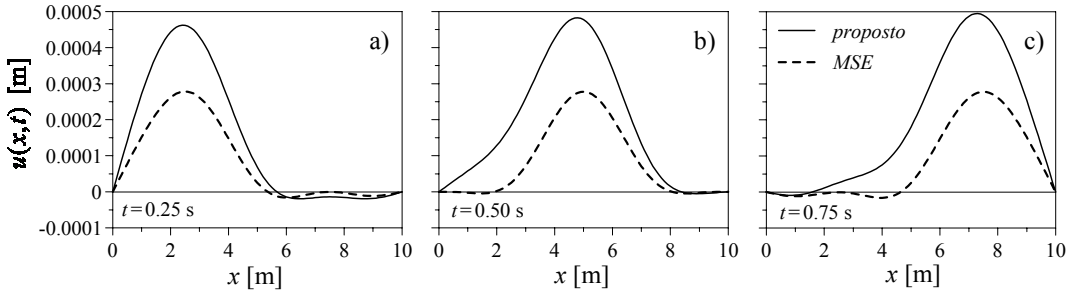


Figura 5. Deformata della trave negli istanti  $t=0.25$  s (a),  $t=0.50$  s (b),  $t=0.75$  s (c).

dell'oscillatore viaggiante, per  $x_v(t) = 0.25 L_b$ ,  $0.50 L_b$  e  $0.75 L_b$ . Le densità di probabilità sono state costruite generando 1500 campioni del processo forzante  $N(t)$  attraverso la formula di equazione (17), ed applicando per ciascuno di essi lo schema numerico di equazione (26). La figura evidenzia che il coefficiente di variazione è elevato solo quando l'oscillatore viaggiante è in mezzeria. In Figura 7b sono confrontate le densità di probabilità fornite dal metodo proposto e dal metodo MSE per l'abbassamento della trave quando  $x_v(t) = 0.50 L_b$ : si osserva che il metodo MSE predice media e varianza inferiori a quelle del metodo proposto. In Figura 7c, infine, sono confrontate le densità di probabilità fornite dal metodo proposto e dal metodo MSE per il picco massimo dell'accelerazione assoluta dell'oscillatore viaggiante. In questo caso, per il sistema considerato nelle applicazioni numeriche, si rileva che i due metodi risultano in ottimo accordo, anche in corrispondenza delle code.

## 7. CONCLUSIONI

Nella memoria è stata presentata una tecnica che consente di eseguire l'analisi nel dominio del tempo delle vibrazioni indotte da un oscillatore ad 1 Gdl che percorre una trave elastica, modellata al continuo, su un suolo viscoelastico.

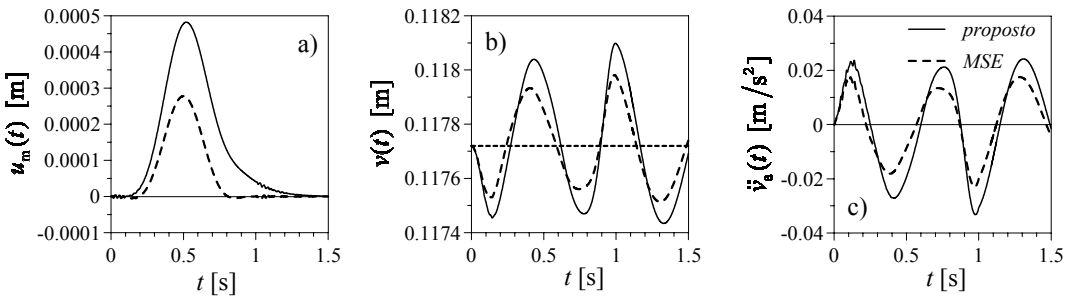


Figura 6. Storie temporali dell'abbassamento della trave in mezzeria (a), dell'abbassamento relativo dell'oscillatore viaggiante (b) e della sua accelerazione assoluta (c).

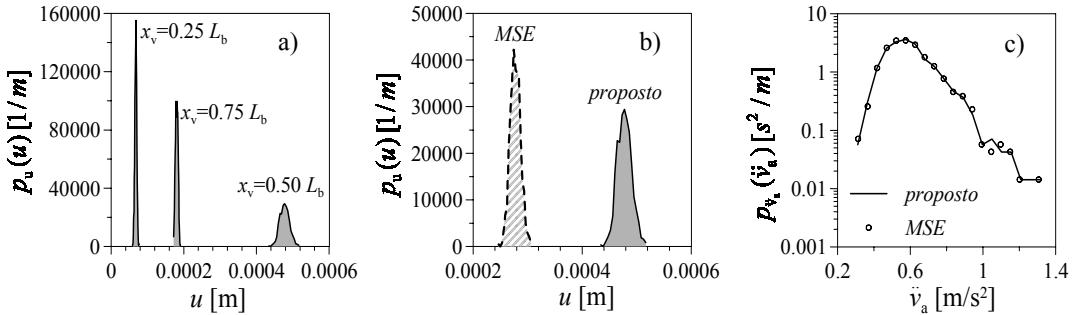


Figura 7. Densità di probabilità dell’abbassamento della trave (a e b) e del picco massimo dell’accelerazione dell’oscillatore viaggiante (c).

Rispetto alle formulazioni disponibili in letteratura, in cui si utilizzano valori equivalenti di rigidezza e dissipazione della fondazione, la tecnica proposta consente di studiare l’interazione oscillatore-trave adottando modelli reologici più accurati per il suolo viscoelastico. In particolare, nella memoria si è fatto riferimento al cosiddetto modello di Zener, che può essere efficacemente impiegato per il materiale elastomerico da inserire tra rotaia e sottopiatra per ridurre le vibrazioni indotte dal transito dei veicoli ferroviari. Per questo modello sono state presentate le equazioni di stato, che sono state poi accoppiate con le equazioni del moto dell’oscillatore viaggiante e della trave elastica.

Nelle applicazioni numeriche è stata evidenziata l’entità dell’errore che si commette utilizzando valori equivalenti per la rigidezza e la dissipazione dell’elastomero (modello di Kelvin-Voigt equivalente). È stata inoltre verificata la possibilità di impiegare la tecnica proposta per valutare le statistiche della risposta in presenza di un’irregolarità aleatoria nel contatto oscillatore-trave. Per il sistema considerato nelle applicazioni, in particolare, le statistiche del picco massimo dell’accelerazione assoluta dell’oscillatore viaggiante possono essere accuratamente valutate anche con il modello di Kelvin-Voigt equivalente, mentre per le statistiche della risposta della trave è necessario utilizzare modelli più accurati.

*References:*

Bruni, S. & Collina, A. 2000. *Modelling the viscoelastic behaviour of elastomeric components: an application to the simulation of train-track interaction*, Vehicle System Dynamics, 34: 283-301.

Fryba, L. 1996. Dynamics of railway bridge, Telford, Londra.

Fryba, L. 1999. Vibration of solids and structures under moving loads, 3<sup>rd</sup> ed, Telford, Londra.

Johnson, C.D. & Kienholz D.A. 1982. *Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers*, AIAA Journal, 20: 1284-90.

Muscolino, G. 1996. Dynamically modified linear structures: deterministic and stochastic response. J. of Engineering Mechanics – ASCE, 122: 1044-51.

Palmeri, A., et al. 2004. *Effects of viscoelastic memory on the buffeting response of tall buildings*, Wind and Structures, 7: 89-106.

## Indici





## Indice autori

Bennati S. 1  
Brancaleoni F. 45  
Buffoni M. 23  
Cafferata C. 13  
Camarri S. 23  
Capizzano F. 67  
Catalano P. 67  
Colleluori M. 1  
Corigliano D. 1  
de Nicola C. 35  
Deubelbeiss S. 57  
Gabriele S. 45  
Hanifi A. 57  
Henningson D.S. 57  
Herbst A.H. 57  
Iollo A. 23  
Marongiu C. 67  
Mele B. 35  
Muscolino G. 79  
Palmieri A. 79  
Repetto R. 13  
Salveti M-V. 23  
Speer S. 57  
Stocchino A. 13  
Tognaccini R. 35  
Valente C. 45  
Valvo P.S. 1  
Vitagliano P.L. 67

## Indice keywords

analisi ad intervalli 45  
biofluidinamica 13  
confined square cylinder 23  
delaminazione 1  
flow instability 57  
frattura 1  
interazione veicolo-armamento 79  
interfaccia elastica 1  
low Reynolds 35  
materiali compositi 1  
modello di Zener 79  
numerical simulation 23, 57  
occhio 13  
oscillatori viaggianti 79  
PIV 13  
POD 57  
provino DCB 1  
RANS 67  
separated flows 35, 57  
sistemi meccanici a parametri incerti 45  
three-dimensional bluff-body wake 23  
transition prediction 35  
turbulence modelling 35, 67  
U-RANS 67  
viscoelasticità 79  
vitreo oculare 13