



LEZIONI DI INGEGNERIA
DEL VENTO

a cura di

CLAUDIO BORRI
STEFANO PASTÒ

Firenze University Press



MANUALI
SCIENZE TECNOLOGICHE

- 1 -

CLAUDIO BORRI
STEFANO PASTÒ

Lezioni di Ingegneria del Vento

Firenze University Press
2006

Lezioni di ingegneria del vento / Claudio Borri,
Stefano Pastò. – Firenze :
Firenze university press, 2006.
(Manuali. Scienze Tecnologiche; 1)
<http://digital.casalini.it/9788884535337>

ISBN 13: 978-88-8453-533-7 (online)
ISBN 13: 978-88-8453-534-4 (print)

621.45 (ed. 20)
Ingegneria del vento

Gli Autori svolgono attività didattica e di ricerca presso il CRIACIV (Centro di Ricerca Interuniversitario di Aerodinamica delle Costruzioni e Ingegneria del Vento – Università di Firenze, Università di Roma “La Sapienza”, Università di Trieste, Università di Perugia, Università di Chieti “G. D’Annunzio”, Università Iuav di Venezia).



ENTE
CASSA DI RISPARMIO
DI FIRENZE

Pubblicazione realizzata con il supporto dell’Ente Cassa di Risparmio di Firenze

© 2006 Firenze University Press
Università degli Studi di Firenze
Firenze University Press
Borgo Albizi, 28
50122 Firenze, Italy
<http://epress.unifi.it/>

Printed in Italy

Indice

Elenco delle figure	ix
Elenco delle tabelle	xv
Prefazione	xvii
1 Introduzione	1
1.1 Vento globale	1
1.2 Vento locale	2
1.3 Risposta aerodinamica della struttura	2
1.4 Risposta meccanica della struttura	2
1.5 Criteri di progetto	2
2 Circolazione atmosferica	3
2.1 Termodinamica dell'atmosfera	3
2.1.1 Temperatura dell'atmosfera	3
2.1.2 Radiazione solare e terrestre	4
2.1.3 Radiazione nell'atmosfera	5
2.1.4 Compressione ed espansione dell'aria	5
2.1.5 Condensazione ed evaporazione del vapor d'acqua	6
2.2 Idrodinamica dell'atmosfera	7
2.2.1 Forza dovuta al gradiente di pressione orizzontale	7
2.2.2 Forza dovuta alla rotazione della terra	8
2.2.3 Vento geostrofico	9
2.2.4 Effetti dell'attrito	11
2.3 Moti atmosferici	12
2.3.1 Circolazione generale	13
2.3.2 Circolazione secondaria di natura termica	14
2.3.3 Cicloni extratropicali	16
2.3.4 Venti locali	17
2.4 Spettro della componente longitudinale della velocità del vento	18

3	Strato limite atmosferico	21
3.1	Equazioni del moto dell'atmosfera	21
3.2	Soluzione dell'equazioni di moto medio	23
3.3	Soluzione del moto turbolento	24
3.4	Profilo della velocità media	24
3.4.1	La spirale di Ekman	25
3.4.2	Lo strato limite turbolento di Ekman	26
3.4.3	Lunghezza di rugosità	28
3.5	Terreni non omogenei	29
3.5.1	Topografia	30
3.6	Profilo esponenziale della velocità del vento	33
3.6.1	Discontinuità del terreno	34
4	Turbolenza atmosferica	35
4.1	Intensità di turbolenza	36
4.2	Scale temporali	37
4.3	Scale integrali	38
4.4	Spettro della componente longitudinale della velocità del vento	39
4.4.1	Spettro nel sotto-intervallo inerziale	40
4.5	Correlazione spaziale della turbolenza	42
5	Aerodinamica dei corpi tozzi	45
5.1	Equazioni che governano il moto di una corrente fluida	45
5.1.1	Equazioni di moto	45
5.1.2	Equazioni di continuità	46
5.1.3	Equazioni di Navier-Stokes	47
5.1.4	Equazioni di Bernoulli	48
5.2	Flusso vorticoso	49
5.3	Strato limite e separazione	52
5.3.1	Distacco dei vortici e formazione della scia	52
5.3.2	Numero di Strouhal	57
5.3.3	Coefficienti di pressione e di forza	58
6	Variabili aleatorie e processi stocastici	63
6.1	Variabili aleatorie continue	63
6.1.1	Variabili aleatorie Gaussiane	65
6.1.2	Variabili aleatorie congiunte	65
6.1.3	Momenti di variabili aleatorie congiunte	66
6.1.4	Variabili aleatorie Gaussiane congiunte	67
6.2	Processi stocastici	67
6.2.1	Processi stocastici stazionari	69
6.2.2	Processi stocastici stazionari e Gaussiani	69

6.2.3	Processi stocastici ergodici	70
6.3	Processi stocastici multivariati	71
6.3.1	Processi multivariati stazionari	72
6.4	Densità spettrale	72
6.5	Esempi di processi stocastici	75
6.5.1	Processo a banda stretta	75
6.5.2	Processo a banda larga	76
6.5.3	Rumore bianco	76
6.6	Valore estremo	77
7	Generazione di storie di vento	79
7.1	Simulazione di singoli processi stocastici	79
7.1.1	Constant Amplitude Wave Superposition (C.A.W.S.)	79
7.1.2	Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)	81
7.1.3	Filtri Autoregressivi	82
7.2	Simulazione di processi multivariati	83
7.2.1	Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)	83
7.2.2	Filtri Autoregressivi	84
8	Dinamica delle strutture	87
8.1	Sistemi ad un grado di libertà	87
8.1.1	Oscillazioni libere	87
8.1.2	Oscillazioni forzate	89
8.1.3	Oscillazioni libere smorzate	90
8.1.4	Oscillazioni forzate con smorzamento	93
8.1.5	Risposta ad una forzante qualsiasi	94
8.2	Sistemi a più gradi di libertà	95
8.2.1	Oscillazioni libere non smorzate	96
8.3	Oscillazioni libere smorzate	99
8.3.1	Oscillazioni forzate con smorzamento	100
8.3.2	Risposta a forzanti qualsiasi	101
9	Dinamica aleatoria delle strutture	103
9.1	Risposta aleatoria dell'oscillatore smorzato	103
9.2	Forzanti aleatorie debolmente stazionarie	105
9.2.1	Valutazione della risposta media	107
9.2.2	Valutazione dei momenti del secondo ordine	107
9.3	Risposta dei sistemi a più gradi di libertà	108
9.4	Forzanti aleatorie debolmente stazionarie	109
9.4.1	Valutazione della risposta media	112
9.4.2	Valutazione dei momenti del secondo ordine	112
9.5	Formulazione generale della dinamica dei continui	113

9.5.1	Risposta ad una forzante Gaussiana stazionaria	115
10	Risposta strutturale along-wind	119
10.1	Strutture riconducibili a sistemi ad un grado di libertà	120
10.1.1	Definizione della forzante eolica	121
10.1.2	Ammetenza aerodinamica	122
10.1.3	Calcolo della risposta strutturale	123
10.1.4	Risposta quasi-statica	125
10.1.5	Risposta in risonanza	127
10.1.6	Strutture puntiformi	129
10.2	Strutture allungate nella direzione del vento	130
10.3	Trattazione generale della risposta strutturale along-wind	131
10.3.1	Equazione di moto per le strutture che vibrano nella direzione del vento	132
10.3.2	Funzioni d'influenza	132
10.3.3	Valore estremo della risposta	133
10.3.4	Strutture Line-Like	133
10.3.5	Strutture plate-like	143
11	Risposta strutturale along-wind secondo l'Eurocodice 1	147
11.1	Scopo	147
11.2	Modellazione dell'azioni del vento	147
11.3	Pressione dinamica di riferimento	148
11.4	Profilo della velocità del vento	148
11.4.1	Coefficiente di rugosità	149
11.5	Coefficiente di raffica	149
11.6	Forzante eolica	150
11.7	Azioni eoliche agenti sulle strutture	151
11.7.1	Pressioni	151
11.8	Procedura per il calcolo della risposta along-wind	153
11.8.1	Procedura semplificata	153
11.8.2	Procedura dettagliata	154
11.9	Esempi	161
11.9.1	Edificio in acciaio	161
11.9.2	Edificio basso in acciaio	161
11.9.3	Torre in calcestruzzo poco snella ($\lambda < 12$)	161
11.9.4	Torre in calcestruzzo molto snella ($\lambda > 12$)	161
12	Risposta strutturale across-wind	163
12.1	Fenomeno del distacco dei vortici	163
12.2	Sincronizzazione del distacco dei vortici	165
12.3	Risposta across-wind delle strutture	168

12.3.1	Forzante dovuta al distacco dei vortici	170
12.3.2	Forzante dovuta alla turbolenza laterale	172
12.3.3	Forzanti aeroelastiche	172
12.3.4	Valutazione della risposta strutturale sincronizzata	176
13	Risposta strutturale across-wind secondo L'Eurocodice 1	179
13.1	Modello di Ruscheweyh	179
14	Risposta aeroelastica delle strutture	185
14.1	Galloping traslazionale	185
14.2	Divergenza e Galloping torsionale	189
14.2.1	Divergenza	190
14.2.2	Galloping torsionale	191
14.3	Galloping di sistemi a due gradi di libertà	191
14.4	Flutter	193
14.4.1	Equazioni di moto su un impalcato da ponte	194
14.4.2	Forzanti aeroelastiche L_h e M_α per i profili alari sottili	195
14.4.3	Forzanti L_h e M_α per impalcati da ponte	196
14.4.4	Soluzione per il calcolo della velocità critica di Flutter classico	202
14.4.5	Flutter ad un grado di libertà	202
14.5	Fenomeni aeroelastici in presenza della turbolenza atmosferica	204
15	Risposta aeroelastica delle strutture secondo l'Eurocodice 1	207
15.1	Galloping	207
15.2	Divergenza e Flutter	210
15.2.1	Divergenza	211
15.2.2	Flutter	211
16	Sperimentazione in galleria del vento	213
16.1	Criteri di similitudine	213
16.1.1	Analisi dimensionale	214
16.1.2	Considerazioni di base per la scalatura	214
16.1.3	Simulazione della circolazione atmosferica	216
16.2	Simulazione aerodinamica ed aeroelastica dei corpi tozzi	218
16.2.1	Effetti della turbolenza del flusso	218
16.2.2	Effetti del numero di Reynolds: rugosità tecnica	218
16.2.3	Effetti del bloccaggio	220
	Bibliografia	221

Elenco delle figure

2.1	Circolazione dovuta alla differenza di temperatura tra due colonne di fluido	4
2.2	Modello semplificato della circolazione atmosferica	5
2.3	Pressione verticale su un elemento di massa d'aria	8
2.4	Moto apparente di una massa d'aria dovuto al moto della Terra	9
2.5	Componenti del vettore di rotazione ω	10
2.6	Equilibrio del vento geostrofico nell'emisfero Nord	10
2.7	Andamento a spirale della velocità del vento all'interno dello strato limite atmosferico	12
2.8	Suddivisione dei moti atmosferici secondo dimensione e durata	13
2.9	Modello di circolazione tricellulare	14
2.10	Suddivisione dei moti atmosferici secondo dimensione e durata	15
2.11	Direzione degli uragani	16
2.12	Genesi del vento foehn	17
2.13	Sezione trasversale di un uragano (a sinistra) e vista di un tornado (a destra)	18
2.14	Spettro della componente longitudinale della velocità del vento	18
2.15	Suddivisione della componente longitudinale della velocità del vento come somma del valor medio, μ_u , e della componente turbolenta, u	19
3.1	Variazione del profilo della velocità eolica in base alla rugosità del terreno	22
3.2	Assi coordinati	23
3.3	Spirale di Ekman	25
3.4	Suddivisione dello strato limite in due regioni: strato superficiale e strato esterno	26
3.5	Lunghezza di rugosità z_0	28
3.6	Profili di velocità media del vento secondo le quattro categorie previste dall'Eurocodice 1	29
3.7	Profilo di velocità media in corrispondenza di una foresta	30
3.8	Profilo di velocità media in corrispondenza di terreni con diversa rugosità	31
3.9	h_2 dopo una transizione di rugosità	31

3.10	Discontinuità del terreno	32
3.11	Profili di vento per differenti rugosità	33
4.1	Funzione di autocorrelazione $\rho_u(\tau)$	38
4.2	Valori di C e m in funzione di z_o	39
4.3	Confronto tra vari spettri della componente longitudinale della velocità del vento	42
5.1	Forze agenti su un volume elementare di fluido	46
5.2	Velocità che varia linearmente allontanandosi da una superficie	47
5.3	Corrente fluida lungo una linea curva	49
5.4	Distribuzione di pressione e velocità in un moto vorticoso	50
5.5	Separazione del flusso in corrispondenza di uno spigolo	50
5.6	Separazione e formazione della scia di un profilo alare	51
5.7	Separazione del flusso di una superficie circolare	51
5.8	Caratteristiche della scia di un cilindro circolare al variare di R_e	53
5.9	Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 0.3$	54
5.10	Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 10$	54
5.11	Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 250$	54
5.12	Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e \geq 1000$	55
5.13	Confronto tra sezioni quadrate e rettangolari	55
5.14	Legge del numero di Strouhal	56
5.15	Numeri di Strouhal per diverse sezioni (Eurocodice 1)	57
5.16	Numeri di Strouhal per sezioni rettangolari (Eurocodice 1)	58
5.17	Distribuzione dei coefficienti di pressione su un cilindro circolare, al variare di R_e	59
5.18	Valori di C_D e C_L per varie sezioni	60
5.19	Andamento di C_D per un cilindro circolare, al variare di R_e	61
5.20	a, b) Andamento di C_D , al variare di R_e e della curvatura degli spigoli di una sezione quadrata; c) Variazione di C_D , per un cilindro circolare, al variare di R_e e della rugosità superficiale ottenuta con della sabbia avente grani di dimensione k	61
6.1	Esempio di processo stocastico definito nel tempo	68
6.2	Esempio di densità spettrale di potenza	73
6.3	Esempio di densità spettrale bilatera, $S_{XX}(\omega)$, e unilatera, $G_{XX}(\omega)$	73
6.4	Processo a banda stretta	75
6.5	Processo a banda larga	76
6.6	Rumore bianco	76
7.1	Constant Amplitude Wave Superposition (C.A.W.S.)	81
7.2	Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)	82

8.1	Oscillatore semplice	87
8.2	Oscillazioni libere	89
8.3	Oscillatore smorzato	90
8.4	Oscillazioni smorzate	92
8.5	Oscillatore forzato con smorzamento	93
8.6	Fattore di amplificazione	94
8.7	Andamento della fase ψ	95
10.1	Struttura intesa come sistema ad un solo grado di libertà	120
10.2	Ammettenza aerodinamica χ^2	124
10.3	Struttura estesa nella direzione del vento	130
10.4	J_b^2 in funzione di ϕ_z nel caso di $g_b(z) = 1$ ($\Gamma = 1/2$); $g_b(z) = z/h$ ($\Gamma = 3/8$); $g_b(z) = \sin(\pi z/h)$ ($\Gamma = 4/\pi^2$)	138
10.5	J_b^2 in funzione di ϕ_z nel caso di $g_b(z) = 2z/h - 1$. Una buona approssimazione è data da $J_b^2(\phi_z) = \frac{2\phi_z}{3\phi_z^2 + 10\phi_z + 30}$	139
10.6	$J_z^2(\omega)$ in funzione di ϕ_z nel caso di $\psi(z) = 1$, variando il co-spettro normalizzato. (-) $J_z^2(\omega)$ ottenuta utilizzando ψ_{uu}	141
10.7	$J_z^2(\omega)$ in funzione di ϕ_z nel caso di $\psi(z)$ con segno non costante, variando il co-spettro normalizzato. (-) $J_z^2(\omega)$ ottenuta utilizzando ψ_{uu}	143
10.8	Funzione di riduzione K_s al variare di $g(z, y, \omega)$, ϕ_y e ϕ_z	146
11.1	Profili di vento per differenti rugosità secondo l'EC1	149
11.2	Convenzione dei segni per le pressioni esterne ed interne	151
11.3	Forzante applicata con un'eccentricità $e = \frac{b}{10}$	152
11.4	c_d per strutture in calcestruzzo e muratura	153
11.5	c_d per strutture in acciaio	154
11.6	c_d per strutture miste acciaio-calcestruzzo	155
11.7	Definizione dell'altezza equivalente	156
11.8	c_e al variare della quota, nelle quattro categoria di terreno. $c_t = 1$	156
11.9	Andamento del fattore di picco rispetto a νT	157
11.10	Andamento della componente quasi-statica della risposta	157
11.11	Scala integrale di turbolenza $L_i(z)$, per diverse categorie di terreno	158
11.12	Densità spettrale adimensionale della risposta, R_N	158
11.13	Ammettenza aerodinamica, R_l (l=h,b)	160
11.14a)	Edificio in acciaio: $h = 10 \div 200m$, $b = 20m$, $d = 10m$; b) Torre in calcestruzzo con snellezza $\lambda = h/d$	160
11.15	Confronto tra la procedura semplificata e quella dettagliata	162
12.1	Caratteristiche della scia di un cilindro circolare al variare di R_e	164
12.2	Legge del numero di Strouhal	165

12.3	Ampiezza adimensionale di oscillazione, \hat{y}/D , al variare dello smorzamento ν_s e del numero di Scruton S_c : o $\nu_s = 0.243\%$, $S_c = 3.1632$; + $\nu = 0.388\%$, $S_c = 5.05$; * $\nu = 0.459\%$, $S_c = 5.98$; X $\nu = 0.502\%$, $S_c = 6.54$; $S_t = 0.2074$. Pastò [12]	167
12.4	Intervallo di sincronizzazione al variare dello smorzamento ν_s e del numero di Scruton S_c : o $\nu_s = 0.243\%$, $S_c = 3.1632$; + $\nu = 0.388\%$, $S_c = 5.05$; * $\nu = 0.459\%$, $S_c = 5.98$; X $\nu = 0.502\%$, $S_c = 6.54$; $S_t = 0.2074$. Pastò [12]	167
12.5	Smooth flow: $\left(\frac{y}{d}\right)_{max}$ in funzione di S_c : – Griffin and Ramberg [8] (Eq. 12.6); · – · Sarpkaya [14] (Eq. 12.7); ○ Goswami et al. [7]; X Feng [6]; +, Δ Pastò [12]	168
12.6	Correlazione della forzante di Lift lungo il cilindro in condizione di sincronizzazione	169
12.7	Ciclo Limite della risposta in condizioni di sincronizzazione del distacco dei vortici	169
12.8	Isteresi dell'ampiezza adimensionale di oscillazione, \hat{y}/D . Δ velocità crescente; + velocità decrescente. Pastò [12]	170
12.9	Modello di un cilindro circolare elasticamente sospeso	171
12.10	Spettro di C_L al variare della turbolenza	172
12.11	Massimo valore di K_{ao} al variare di R_e	173
12.12	$K_{ao}/K_{ao,max}$ al variare di $\mu_U/\mu_{U_{cr}}$	174
12.13	H_a al variare di $\mu_U/\mu_{U_{cr}}$	175
12.14	σ_y/D al variare di K_s	177
13.1	Valori di $c_{lat,o}$ per cilindri circolari	182
13.2	Esempi di lunghezza effettiva di correlazione	183
13.3	Valori di K_w	184
14.1	Modello ad un grado di libertà per le oscillazioni galoppanti	186
14.2	Esempio di curve stabili ed instabili per C_L	187
14.3	$C_{L,\alpha}$ sezioni. Per $C_{L,\alpha} < 0$ ovvero $C_{L,\alpha} + C_D > 0$ l'equilibrio risulta stabile	188
14.4	Modello di Galloping torsionale	189
14.5	$C_{M,\alpha}(0)$ per alcune sezioni	191
14.6	Sezione generica a due gradi di libertà	192
14.7	Convenzione dei segni per una generica sezione	194
14.8	Funzione di Theodorsen [17], $C(k) = F(k) + iG(k)$, in funzione della velocità ridotta $U_{rid} = \frac{2\pi}{k}$	196
14.9	Esempi di derivate aeroelastiche per varie sezioni	199
14.10	Esempi di derivate aeroelastiche per varie sezioni	200
14.11	Derivate aeroelastiche per il Great Belt Bridge (curve 1,2 e +). – – Ponte a sezione reticolare. – Lastra piana	201

14.12 – Sistema aerodinamicamente accoppiato; — Sistema aerodinamicamente disaccoppiato	205
15.1 Fattore d'instabilità di Galloping a_g	209
15.2 $C_{M,\theta}$ per sezioni rettangolari	210
16.1 Modello di una <i>spire</i>	216
16.2 Curve per la determinazione della larghezza b delle spires; H è l'altezza della camera di prova della galleria del vento, Irwin [10] . . .	217
16.3 Esempio di variazione del coefficiente di trascinamento (drag) con R_e	219
16.4 Variazione del coefficiente di trascinamento (drag) con R_e per un cilindro circolare	219

Elenco delle tabelle

3.1	Categorie del terreno e relativi parametri	28
3.2	Tipici valori di δ e α per i profili esponenziali	33
11.1	Categorie del terreno e relativi parametri	150
13.1	Valori del coefficiente aerodinamico c_{lat}	182

Prefazione

Già da alcuni anni sono stati introdotti, in Italia, presso quegli Atenei con gruppi di ricerca attivi nel settore, i corsi di Ingegneria del vento, la cui denominazione è mutuata in modo diretto da quella della relativa disciplina e cioè lo studio delle azioni e degli effetti del vento atmosferico sulle costruzioni e sull'ambiente. Questa nuova materia, seppur antichissima nelle origini, si è andata delineando, come avanguardia internazionale, negli anni '60 (soprattutto in Inghilterra, Danimarca, Canada e USA) ed è poi entrata in Italia all'inizio degli anni '80, con la fondazione dell'ANIV (Associazione Nazionale di Ingegneria del Vento).

In realtà tale nuova area di studio nasce decisamente multidisciplinare e spinta dal fabbisogno delle società moderne di edificare e pianificare infrastrutture sempre più imponenti ed ardite: i materiali sempre più leggeri e le dimensioni sempre più imponenti hanno reso molte delle opere dell'uomo decisamente sensibili all'azione del vento. Inoltre, a seguito di numerosi e clamorosi insuccessi (crolli o gravi danni, spesso poco tempo dopo la costruzione e messa in servizio di un'opera), l'approfondimento delle tematiche di fluido-dinamica applicata e dell'aerodinamica dei corpi tozzi (prima) e dell'aeroelastica (poi) è divenuto necessario anche nel settore classico dell'ingegneria civile e non più solo dell'ingegneria industriale. Infine, i nuovi corsi di ingegneria dell'ambiente e gestione del territorio hanno introdotto quegli aspetti di fluido-dinamica ambientale tipici dell'interazione del vento atmosferico con l'orografia terrestre, ivi compresi i fenomeni di dispersione degli inquinanti e visualizzazioni di flusso ai fini di un miglior comfort delle nuove aree edificate.

Le presenti *Lezioni di Ingegneria del Vento*, raccolte nell'ambito dell'omonimo corso creato ed attivato da pochi anni presso il Corso di laurea specialistica di Ingegneria civile dell'Università di Firenze, costituiscono uno dei primi tentativi (forse il primo in forma così organica e completa) di raccolta delle nozioni di cui sopra, a livello di corso universitario; esse pertanto hanno, come obiettivo primario, quello di fornire supporto di base agli studenti di corsi di livello avanzato, inclusi i corsi di Master e di Dottorato. In secondo luogo, esse possono altresì offrire un aiuto importante a quei professionisti la cui attività prevalente si svolga nella progettazione, gestione e sviluppo di opere di grandi dimensioni (sensibili all'azione del vento). Molto spesso tecnici (anche ad alto livello) non hanno avuto, nel corso della propria formazione, alcun elemento informativo sulla materia e si trovano pertanto ad operare con gravi difficoltà, essendo costretti a ricorrere in modo continuo ad esperti e consulenti.

I primi capitoli (1, 2 3 e 4) sono dedicati alla descrizione dettagliata del vento atmosferico e della sua struttura turbolenta, inquadrando così l'origine delle correnti eoliche e le loro caratteristiche principali. In generale, le strutture modificano il campo di moto delle correnti eoliche incidenti, cosicché le azioni su di esse indotte dipendono sensibilmente dalle loro prestazioni aerodinamiche. Nel capitolo 5 vengono introdotti i concetti basilari dell'aerodinamica dei corpi di forma qualsiasi (tra cui le strutture), più propriamente detta aerodinamica dei *corpi tozzi*. La natura turbolenta del vento impone delle analisi di tipo statistico, pertanto nel capitolo 6 vengono richiamate le teorie delle variabili aleatorie e dei processi stocastici. La simulazione numerica delle storie temporali della velocità eolica è discussa nel capitolo 7. I capitoli 8 e 9 richiamano i concetti fondamentali per la valutazione della risposta dinamica delle strutture rispettivamente in campo deterministico e aleatorio. Tali concetti sono propedeutici alla valutazione della risposta strutturale *along-wind* e *across-wind* trattate rispettivamente nei capitoli 10 e 12. Le prescrizioni dell'Eurocodice 1, per le suddette tipologie di risposte strutturali, sono discusse nei capitoli 11 e 13. La risposta aeroelastica delle strutture e le relative prescrizioni dell'Eurocodice 1 sono riportate nei capitoli 14 e 15. Infine, il capitolo 16 prende in esame le tecniche consigliate per una corretta simulazione in galleria del vento dei fenomeni che interessano le strutture reali soggette al vento atmosferico.

Gli Autori desiderano ringraziare i numerosi colleghi che hanno contribuito, nel modo più vario, allo sviluppo del materiale grezzo alla base di queste lezioni ed hanno fornito utilissime indicazioni sui singoli aspetti; poiché il loro numero è decisamente elevato, il ringraziamento viene esteso pertanto a tutta la comunità scientifica dell'ingegneria del vento in Italia, nella quale gli Autori si riconoscono ed alla quale sono orgogliosi di appartenere.

Claudio Borri e Stefano Pastò

1

Introduzione

L'azione del vento ha una notevole importanza nella progettazione delle strutture. Un'adeguata progettazione di strutture resistenti alle azioni eoliche si articola secondo gli anelli della cosiddetta *catena* di Davenport che ne introdusse il concetto. Il collasso di un'intera struttura o di parte di essa è legato al mancato adempimento delle varie fasi progettuali (*anelli*) della catena. Pertanto una struttura è tanto più resistente all'azione del vento quanto più affidabili sono i vari anelli, ciascuno dei quali coinvolge parametri aleatori da inquadrare secondo metodi statistici. Vediamo in dettaglio i vari anelli della catena:

- Vento globale
- Vento locale
- Risposta aerodinamica della struttura
- Risposta meccanica della struttura
- Criteri di progetto

1.1 Vento globale

Il vento varia in base alle aree geografiche, tuttavia le velocità eoliche di riferimento si ottengono mediando le registrazioni su un periodo non minore di dieci minuti e che non superi un'ora.

1.2 Vento locale

La rugosità del terreno esercita una grande influenza sul vento. La velocità eolica media diminuisce per effetto del terreno, ma allo stesso tempo il vento diviene turbolento e può essere descritto soltanto in termini statistici. In particolare, il vento atmosferico è un processo stocastico multicorrelato nello spazio e nel tempo. La velocità media del vento, per effetto della frizione esercitata dal terreno, aumenta con l'altezza secondo un profilo esponenziale o logaritmico. La tipologia del terreno influisce su tale profilo in maniera così complessa che risulta difficile quantificarne l'effetto con esattezza. Pertanto, si introducono le cosiddette *lunghezze di rugosità*.

1.3 Risposta aerodinamica della struttura

Il carico eolico dipende dalla forma della struttura. La valutazione del comportamento aerodinamico viene generalmente effettuata in galleria del vento, dove è possibile misurare come la velocità eolica si trasformi in un campo di pressioni, multidimensionale e multicorrelato, agente sulla struttura.

1.4 Risposta meccanica della struttura

Noto il campo di pressione intorno alla struttura è possibile valutarne la risposta meccanica con analisi dinamiche, quasi-statiche, o statiche equivalenti.

Le strutture possono comportarsi in diversi modi quando sono investite dal vento. In particolare, le strutture moderatamente rigide possono vibrare nella direzione del vento (risposta *along-wind*) per effetto della turbolenza.

Le strutture snelle sono principalmente vulnerabili alle vibrazioni nella direzione ortogonale al flusso (risposta *across-wind*) indotte dal fenomeno del distacco dei vortici. Inoltre, entro un certo intervallo di velocità (*intervallo di sincronizzazione*) le strutture possono andare in risonanza.

I ponti sospesi possono presentare oscillazioni che portano al collasso quando il modo di vibrare verticale e quello torsionale si accoppiano. Il fenomeno è noto come *flutter*.

1.5 Criteri di progetto

Nota la risposta meccanica della struttura è quindi possibile procedere al dimensionamento dei vari elementi strutturali.

2

Circolazione atmosferica

La circolazione dell'aria rispetto alla superficie della terra è indotta dall'irraggiamento della atmosfera terrestre. In particolare, il vento si genera per una differenza di pressione tra due punti aventi la stessa quota. Tale differenza si genera per effetto di complessi fenomeni termodinamici e meccanici che avvengono nell'atmosfera in maniera non uniforme nello spazio e nel tempo. Vediamo in dettaglio i vari aspetti che intervengono nella circolazione atmosferica.

2.1 Termodinamica dell'atmosfera

2.1.1 Temperatura dell'atmosfera

Un semplice esempio (dovuto ad Humphreys [9]) per comprendere l'influenza della temperatura sulla circolazione terrestre è dato dal modello semplificato in Fig. 2.1 in cui si hanno due colonne di fluido, A e B , riempite fino al livello a . Inizialmente le due colonne sono chiuse ed la temperatura all'interno di esse è uguale. Se si aumenta la temperatura nella colonna A , mantenendo costante quella in B , il fluido in A si espande fino a raggiungere il livello b . L'espansione non comporta alcuna variazione del peso del fluido, e quindi la pressione in c rimane invariata. Se si apre la valvola 2 non vi è deflusso tra le due colonne, l'apertura della valvola 1 comporta uno spostamento di fluido da A verso B , per effetto del dislivello $b-a$ dovuto al riscaldamento di A . In c la temperatura decresce mentre nella colonna B la temperatura sale. Pertanto, aprendo la valvola 2 si genera una circolazione di flusso da B verso A . La circolazione

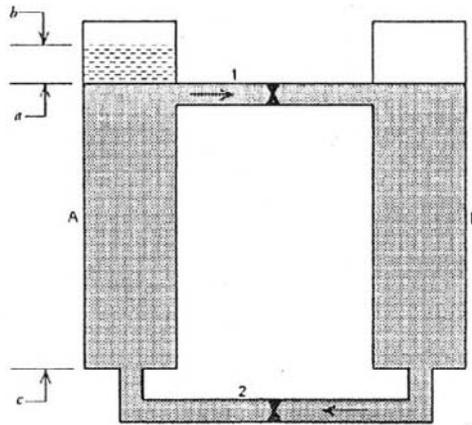


Figura 2.1: Circolazione dovuta alla differenza di temperatura tra due colonne di fluido

si mantiene fin tanto che vi è differenza di temperatura tra le due colonne.

La terra è inclinata di $66^{\circ}30'$ rispetto al piano della sua orbita, pertanto la regione equatoriale è maggiormente irraggiata, e dunque riscaldata, rispetto a quelle polari. Analogamente al modello di Hemphreys, pur trascurando la complessità del fenomeno e i vari fattori che vi rientrano, si comprende l'origine del vento come illustrato in Fig. 2.2.

La temperatura dell'atmosfera è determinata da i seguenti processi:

- Radiazione solare e terrestre
- Radiazione nell'atmosfera
- Compressione ed espansione dell'aria
- Condensazione ed evaporazione del vapor d'acqua

2.1.2 Radiazione solare e terrestre

L'energia necessaria per spostare le masse d'aria è fornita dal Sole, nella forma di calore irradiato. Tuttavia, il Sole non è l'unica fonte, semmai la fonte primaria. Infatti, un ruolo fondamentale è svolto dalla superficie terrestre. In particolare, essendo l'atmosfera quasi *trasparente* all'irraggiamento solare, la quasi totalità dell'energia raggiunge la Terra. Si può assumere che tale energia sia completamente assorbita dalla Terra, che riscaldandosi la rilascia sotto forma di radiazione terrestre. La lunghezza d'onda della radiazione terrestre è però molto lunga rispetto a quella solare (dell'ordine di 10μ), dunque soltanto una piccola parte riesce ad attraversare l'atmosfera, mentre la maggior parte viene assorbita e di nuovo riflessa verso la Terra.

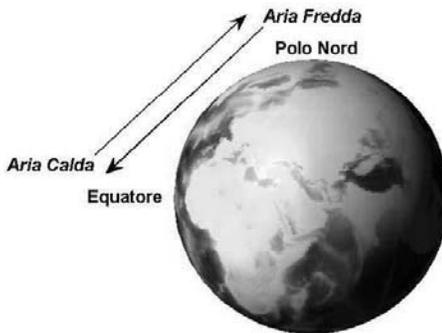


Figura 2.2: Modello semplificato della circolazione atmosferica

2.1.3 Radiazione nell'atmosfera

Il calore emesso dalla superficie terrestre è assorbito dagli strati d'aria nelle sue immediate vicinanze (lo stesso accade sulla superficie degli oceani) che a loro volta lo radiano verso il basso e verso l'alto. Gli strati sovrastanti assorbono il calore e lo emettono ancora verso il basso e verso l'alto. Il processo si ripete in tutta l'atmosfera.

2.1.4 Compressione ed espansione dell'aria

La pressione atmosferica è prodotta dal peso dell'aria sovrastante. Una piccola massa d'aria secca che si muove verticalmente nell'atmosfera, subisce una variazione di pressione corrispondente ad una variazione di temperatura. Per valutare questa variazione di temperatura è necessario ricorrere all'equazione di stato dei gas perfetti e alla prima legge della termodinamica, che sono dati rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$pv = RT \quad (2.1)$$

$$dq = c_v dT + p dv \quad (2.2)$$

dove p è la pressione, v il volume specifico, R è una costante che dipende dal tipo di gas (in questo caso aria secca), T è la temperatura assoluta, dq è la quantità di calore trasferita alla massa d'aria in moto, e c_v è il calore specifico a volume costante.

Differenziando la prima e sostituendo la quantità $p dv$ si ottiene:

$$dq = (c_v + R)dT - v dp \quad (2.3)$$

Confrontando la 2.3 con la prima legge della termodinamica $dq = c_p dT$ nel caso di processo a pressione costante si ottiene facilmente che $c_v + R = c_p$. Utilizzando ancora l'equazione di stato possiamo scrivere:

$$dq = c_p dT - RT \frac{dp}{p} \quad (2.4)$$

Per processi adiabatici $dq = 0$, pertanto dalla precedente relazione si perviene alla seguente:

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = 0 \quad (2.5)$$

che integrata fornisce l'equazione:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (2.6)$$

nota come equazione di Poisson o equazione adiabatica. L'aria secca presenta $R/c_p = 0.288$.

Se nell'atmosfera il moto verticale di una particella d'aria è sufficientemente rapido, lo scambio di calore della particella stessa e l'ambiente circostante può essere trascurato e l'ipotesi $dq = 0$ è accettabile. Pertanto, dall'equazione di Poisson si evince che una massa d'aria ascendente subisce una diminuzione di pressione cui corrisponde una diminuzione di temperatura. In particolare, nell'atmosfera terrestre la diminuzione di temperatura con l'altezza è di circa $1C^\circ/100m$ e prende il nome di *rapporto di diminuzione adiabatica*, indicato con γ_a .

Consideriamo una particella d'aria ascendente, inizialmente alla quota h_1 caratterizzata da una temperatura T_1 . Alla quota h_2 la temperatura dell'aria è T_2 , mentre la temperatura della particella è $T_2^* = T_1 - (h_2 - h_1)\gamma_a$. Poiché la pressione dell'aria alla quota h_2 e quella della particella devono essere uguali, si ha dall'equazione di stato che alla differenza di temperatura $T_2^* < T_2$ corrisponde una differenza di densità tra le due. Questo comporta la nascita di una forza che per $T_2 < T_2^*$ spinge la particella verso l'alto, per $T_2 > T_2^*$ spinge la particella verso il basso facendola tornare nella sua posizione iniziale. Nel primo caso si dice che la stratificazione dell'atmosfera è *instabile*, nel secondo è *stabile*. Infine, se $T_2 = T_2^*$ la stratificazione dell'atmosfera si dice *neutra*.

2.1.5 Condensazione ed evaporazione del vapor d'acqua

Secondo la legge di Dalton, la pressione dell'aria umida è data dalla differenza di pressione p e la pressione del vapor d'acqua, ossia $p - e$. Sperimentalmente si osserva che se e supera un certo valore E , noto come *pressione di saturazione del vapore*,

si ha la condensazione del vapor d'acqua in eccesso.

Una particella ascendente d'aria umida non satura subisce una diminuzione di temperatura cui corrisponde una diminuzione di pressione di saturazione. Nel caso in cui $e = E$, si ha la condensazione del vapor d'acqua. In questo processo si libera il *calore latente di vaporizzazione* che contribuisce all'ascesa della particella fornendo ulteriore energia oltre a quella interna, che garantisce il movimento verticale dell'aria secca.

Poiché viene liberato il calore latente di vaporizzazione, la diminuzione della temperatura della particella d'aria umida in ascesa è minore rispetto al caso d'aria secca, pertanto aiuta la convezione dell'aria verso livelli più alti dell'atmosfera.

2.2 Idrodinamica dell'atmosfera

Il moto di una massa elementare d'aria è determinato dalla seconda legge di Newton, $\sum F = ma$, dove m è la massa, a è l'accelerazione, ed $\sum F$ è la somma delle forze agenti sulla massa stessa. Le singole forze sono le seguenti:

- la forza dovuta al gradiente di pressione orizzontale
- la forza dovuta alla rotazione terrestre
- la forza dovuta all'attrito

Descriviamo nel dettaglio tali forze.

2.2.1 Forza dovuta al gradiente di pressione orizzontale

Consideriamo un elemento infinitesimo di volume d'aria $dx \cdot dy \cdot dz$, soggetto alle forze p e $p + (\partial p / \partial z) dz$ agenti rispettivamente sulla faccia inferiore e superiore (Fig 2.3). In assenza di altre forze, la forza per unità di volume agente sull'elemento sarà $-\partial p / \partial z$. Analogamente, lungo le direzioni x e y , si avrà $-\partial p / \partial x$ e $-\partial p / \partial y$ rispettivamente. La risultante di queste forze prende il nome di *gradiente di pressione orizzontale* e si denota con $-\partial p / \partial n$, con n normale ad una certa isobara.

Il gradiente di pressione orizzontale è la forza che genera il moto dell'aria. La forza per unità di massa esercitata dal gradiente di pressione orizzontale $-(1/\rho)\partial p / \partial n$ prende il nome di *gradiente di forza di pressione* e spinge l'aria verso regioni aventi pressione minore.

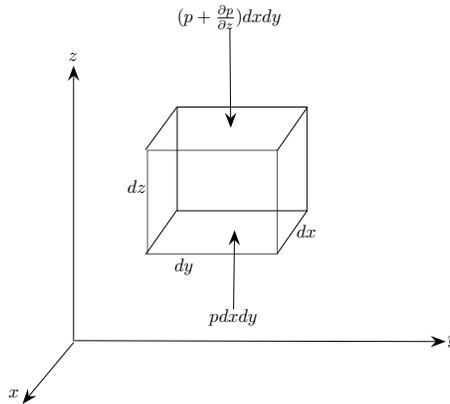


Figura 2.3: Pressione verticale su un elemento di massa d'aria

2.2.2 Forza dovuta alla rotazione della terra

La deviazione di una particella in moto da una traiettoria rettilinea è dovuta al moto della terra. In particolare, la traiettoria diviene curva per effetto di una forza apparente, nota come forza di Coriolis, data dalla seguente relazione:

$$F_c = 2m(v \wedge \omega) \quad (2.7)$$

dove m è la massa della particella, v è la velocità della particella relativa ad un sistema di coordinate solidale alla rotazione terrestre, ω è la velocità angolare della terra. La forza di Coriolis risulta normale a v e ω , pertanto il suo modulo sarà:

$$|F_c| = 2m|v||\omega| \sin(\phi) \quad (2.8)$$

dove ϕ è l'angolo tra v e ω .

Sia N il polo Nord, e consideriamo un elemento d'aria che si muove lungo un meridiano NP . Mentre la massa d'aria si sposta muovendosi da Nord, lo stesso meridiano risulta spostato verso Est per effetto della rotazione terrestre (NP'). Pertanto, nell'emisfero Nord, la massa d'aria che si muove verso Nord è avvertita come un vento proveniente da Ovest, mentre l'aria diretta verso Sud vira verso Ovest, dunque è percepita come un vento proveniente da Est. Nell'emisfero Sud, si osservano fenomeni opposti (Fig. 2.4).

Introducendo il parametro di Coriolis

$$f = 2\omega \sin(\phi) \quad (2.9)$$

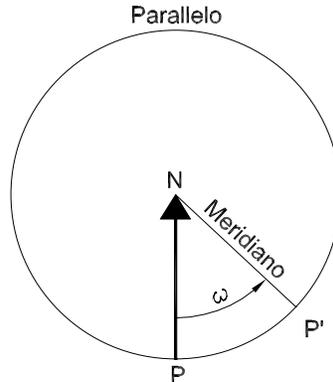


Figura 2.4: Moto apparente di una massa d'aria dovuto al moto della Terra

dove ϕ è la latitudine del punto considerato, segue che la forza di Coriolis per unità di massa agente su un elemento d'aria che si muove su un piano parallelo alla superficie della terra (Fig. 2.5) è data da:

$$F_c = mfv \quad (2.10)$$

dove v è la velocità della massa d'aria relativa alla Terra, mentre f è un parametro tabulato in funzione della latitudine.

2.2.3 Vento geostrofico

Ad una quota sufficientemente alta, il vento non risente degli effetti della frizione con il terreno ed il moto dell'aria si organizza per filetti fluidi paralleli. Mantenendo costante l'accelerazione, il moto è garantito dall'equilibrio tra la forza di gradiente di pressione, la forza di Coriolis, e la forza centrifuga.

L'effetto delle forze agenti su una massa elementare d'aria è mostrato in Fig. 2.6. Se la particella si muove nella direzione della forza di gradiente (Fig. 2.6a) di pressione, P , viene deviata dalla forza di Coriolis, F_{ca} . La sua traiettoria è dunque determinata dalla risultante delle suddette forze (direzione II in Fig. 2.6b). Detta F_{cb} la forza che devia la particella, diretta normalmente alla sua traiettoria, la massa d'aria elementare si sposta lungo la direzione III data dalla risultante di F_{cb} e P . Raggiunto l'equilibrio, la particella si sposterà lungo le isobare (Fig. 2.6c).

Nel caso più generale in cui le isobare sono curve, dovrà essere tenuta in conto anche la forza centrifuga.

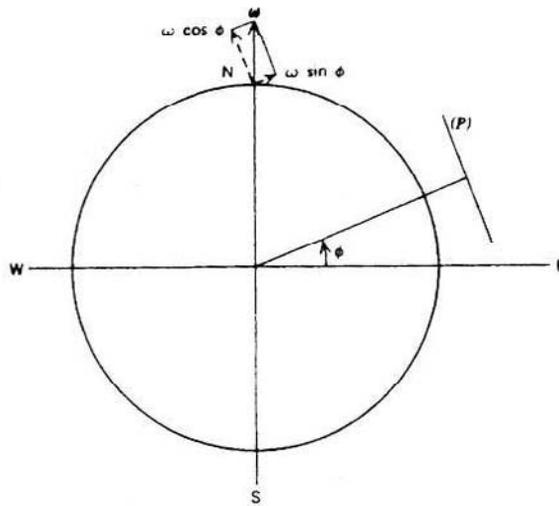


Figura 2.5: Componenti del vettore di rotazione ω

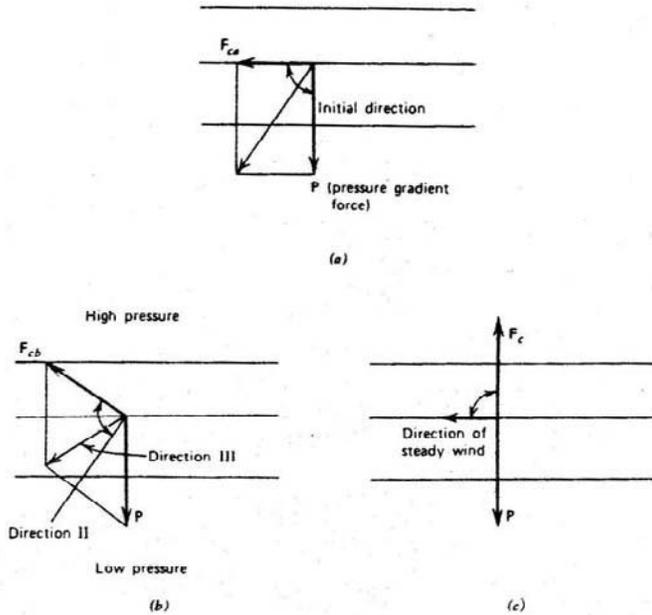


Figura 2.6: Equilibrio del vento geostrofico nell'emisfero Nord

La velocità in corrispondenza della quale si ha l'equilibrio tra la forza di gradiente orizzontale e la forza di Coriolis, prende il nome di *velocità geostrofica del vento* e può essere espressa come segue:

$$2\omega G \sin(\phi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.11)$$

da cui si ottiene:

$$G = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.12)$$

dove f è il parametro di Coriolis, e ρ è la densità dell'aria.

Se le isobare sono curve, la particella è soggetta ad un'ulteriore forza, quella centrifuga, G , e per l'equilibrio la sua traiettoria sarà comunque diretta come le isobare. Nella condizione di equilibrio, la velocità prende il nome di *velocità di gradiente del vento* che coincide con la velocità geostrofica se la curvatura $r \rightarrow \infty$:

$$V_{gr} f \pm \frac{V_{gr}^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.13)$$

dove, ipotizzando che la massa d'aria sia nell'emisfero Nord, il segno positivo si riferisce ad una circolazione ciclonica (ovvero intorno ad un centro a bassa pressione), ed il segno negativo ad una circolazione anticiclonica (ossia intorno ad un centro ad alta pressione). In generale, per raggi di curvatura finiti, si ha:

$$V_{gr} = -\frac{rf}{2} + \sqrt{\left[\frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + \left(\frac{rf}{2} \right)^2 \right]} \quad (2.14)$$

$$V_{gr} = +\frac{rf}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{rf}{2} \right)^2 - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right]} \quad (2.15)$$

rispettivamente per venti ciclonici e anticiclonici. Per gli stessi valori di f , r e $\partial p/\partial n$ i venti anticiclonici sono più deboli di quelli ciclonici.

2.2.4 Effetti dell'attrito

La superficie terrestre esercita sull'aria in movimento una forza di resistenza che ne ritarda il moto. Tale effetto diminuisce con l'altezza rispetto al terreno fino a raggiungere una quota δ , nota come *altezza dello strato limite dell'atmosfera*, oltre la quale la velocità del vento segue le isobare (*velocità di gradiente*). L'atmosfera al di sopra dello strato limite prende il nome di *atmosfera libera*.

All'interno dello strato limite la velocità del vento non è diretta secondo le isobare. Dato un vento geostrofico, consideriamo due particelle che A e B che si muovono

orizzontalmente nello strato limite, ma a quote differenti. Se la particella A è posta ad una quota più alta rispetto a B allora la sua velocità, nonché la forza di Coriolis che agisce su di essa, saranno maggiori rispetto a quelle della particella B . L'angolo di deviazione tra la direzione del vento e quella delle isobare diminuisce all'aumentare della quota, mentre è massimo in prossimità del terreno. Pertanto, l'andamento della velocità del vento con l'altezza diviene una spirale (Fig. 2.7).

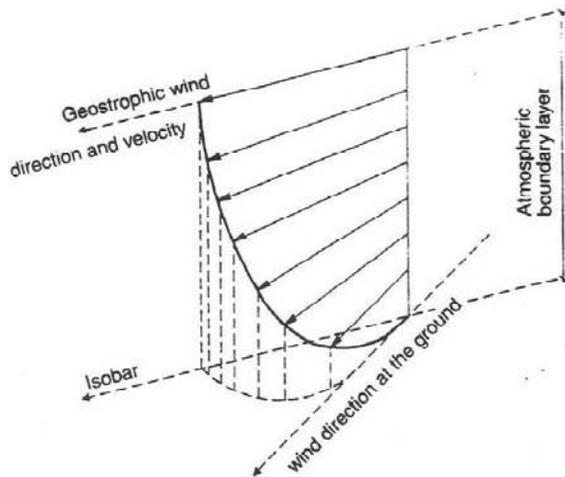


Figura 2.7: Andamento a spirale della velocità del vento all'interno dello strato limite atmosferico

2.3 Moti atmosferici

La maggior parte dei processi atmosferici coinvolgono:

- Velocità del vento orizzontale e verticale
- Pressione
- Temperatura
- Densità
- Umidità

Tali quantità sono governate dalle seguenti equazioni:

- L'equazione di stato
- La prima legge della termodinamica

- L'equazione di conservazione della massa
- L'equazione di conservazione dell'umidità
- L'equilibrio del moto verticale e orizzontale

Il moto dell'atmosfera può essere descritto come la sovrapposizione di flussi interdipendenti caratterizzati da diverse scale che variano da pochi millimetri a chilometri. Per analizzare questi moti è conveniente suddividerli in tre gruppi principali:

- Microscala
- Mesoscala (o Scala Convettiva)
- Macroscala (o Scala Sinottica)

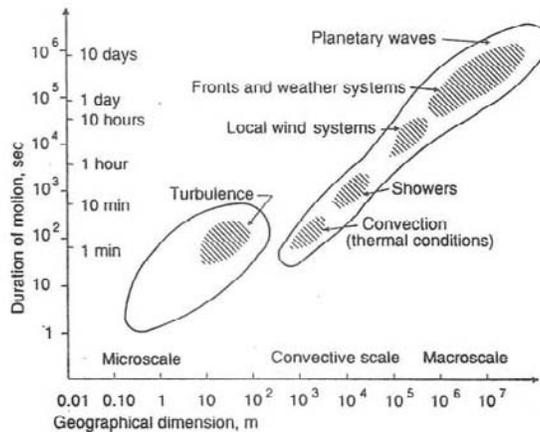


Figura 2.8: Suddivisione dei moti atmosferici secondo dimensione e durata

La scala sinottica include moti atmosferici con una dimensione caratteristica di almeno 500km ed una durata di almeno 2 giorni. La microscala comprende quei moti che hanno una dimensione che non supera i 20km ed una durata minore di un'ora. In quest'ultima categoria rientra anche la turbolenza atmosferica. Infine tutti i moti atmosferici con dimensioni e durata intermedie alle precedenti scale rientrano nella mesoscala (Fig. 2.8).

2.3.1 Circolazione generale

L'effetto combinato della rotazione terrestre e della frizione prodotta dalla superficie terrestre, rende la circolazione atmosferica più complessa rispetto al modello introdotto in Fig. 2.2. In particolare, si può pensare di schematizzare la circolazione

atmosfera in tre cellule (Fig. 2.9). Tale schema è coerente con l'esistenza di un fronte di bassa pressione intorno al polo (50° - 60° di latitudine Nord) e di un fronte di alta pressione nella zona subtropicale (circa 30° di latitudine), che si formano in corrispondenza della superficie di incontro di venti che provengono da direzioni diverse.

Questo modello risulta ulteriormente complicato dagli effetti stagionali, come la variazione della posizione e dell'intensità dei fronti di pressione e geografici, la differenza delle proprietà fisiche del terreno, e la distribuzione non uniforme dei mari sul globo. I grandi continenti presenti nell'emisfero boreale provocano deviazioni spesso importanti rispetto a tale modello. Complicazioni analoghe interessano l'emisfero australe, che ha però un comportamento meno variabile rispetto a quello boreale. Generalmente, la circolazione che interessa l'emisfero australe e quella che interessa l'emisfero boreale possono essere considerate separatamente.

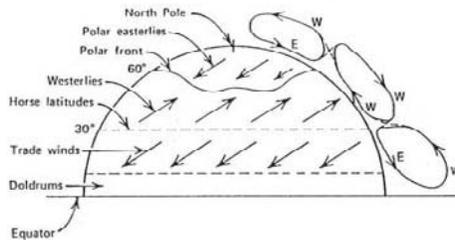


Figura 2.9: Modello di circolazione tricellulare

2.3.2 Circolazione secondaria di natura termica

Alla circolazione generale si aggiungono delle circolazioni secondarie, indotte dalla differenza di temperatura. In particolare, queste circolazioni si generano quando i centri di alta o bassa pressione vengono creati per effetto di un riscaldamento o raffreddamento dei livelli più bassi dell'atmosfera. Descriviamo in dettaglio i venti appartenenti a questa categoria.

Monsoni

Durante l'estate la superficie degli oceani si scalda meno di quella dei continenti. Pertanto, in corrispondenza dei continenti l'aria più calda tende a salire. Per la conservazione della massa, si attiva dunque una circolazione dagli oceani verso i continenti. Durante l'inverno il fenomeno procede al contrario.

Vista la notevole estensione del continente asiatico, i Monsoni sono venti caratteristici di queste zone.

Cicloni tropicali

I cicloni tropicali, hanno origine sugli oceani tropicali dove la temperatura dell'acqua supera i 26°C . L'energia di questi venti deriva dal rilascio di calore latente. In particolare, per certe condizioni climatologiche, l'aria calda e umida forma una nuvola in cui il vapore condensa e rilascia calore latente. L'energia liberata è molto elevata, e i venti che ne conseguono possono essere disastrosi. Generalmente, si formano ad una latitudine tra i 5° - 20° , ed il loro diametro raggiunge le centinaia di chilometri.

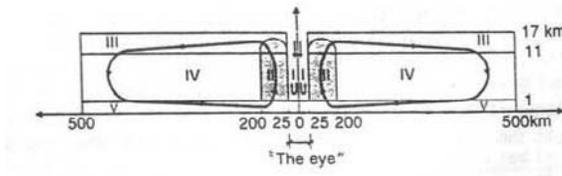


Figura 2.10: Suddivisione dei moti atmosferici secondo dimensione e durata

In Fig. 2.10 è schematizzata la struttura di un ciclone tropicale. Nella regione I risiede l'*occhio del ciclone* ossia una regione caratterizzata da aria quasi secca relativamente calma. Lungo il contorno dell'occhio l'aria sale lentamente, e successivamente cade in corrispondenza del centro. Nella regione II l'aria calda e umida sale, il vapore condensa rilasciando una grande quantità di calore latente (e dunque di energia) e causando piogge molto intense. Nelle regioni III e IV l'aria viene risucchiata dall'occhio lungo la superficie del terreno, ed incanalata nella regione II dove è sospinta ad un'altezza di circa 10km rispetto all'occhio del ciclone stesso. Inoltre, in corrispondenza della superficie oceanica l'aria calda e umida, in moto nella regione V defluisce nella regione II fornendo ulteriore energia all'uragano. In corrispondenza della terra ferma, la frizione con il terreno produce una perdita di energia, pertanto il ciclone tende gradualmente ad estinguersi.

Nel Pacifico occidentale vengono chiamati *tifoni*, nell'Oceano Indiano, nel Mar Arabico e nel Golfo di Bengala *cicloni*. A seconda dell'intensità del vento, i cicloni vengono classificati come *depressione tropicale* se il vento non raggiunge i 63km/h , *tempesta tropicale* se non si superano i 118km/h , *uragano* qualora il vento soffi oltre i 118km/h . I danni provocati dai cicloni sia in termini di vite umane sia di danni materiali sono molto ingenti. Oltre al vento che con la sua forza distrugge tutto ciò che incontra sul suo cammino, i cicloni provocano spesso, nelle zone costiere, inondazioni generate dall'innalzamento del livello del mare, mentre nelle zone interne possono provocare piogge così violente da causare lo straripamento dei corsi d'acqua. Purtroppo non è possibile prevedere la genesi di un ciclone ma, una volta avvistato, se ne può seguire l'andamento e il percorso.

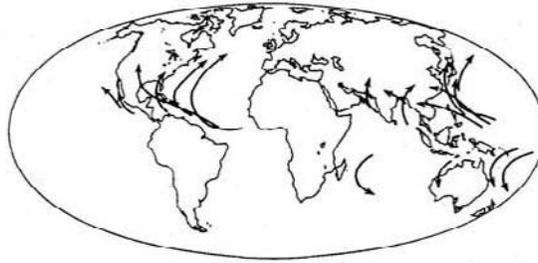


Figura 2.11: Direzione degli uragani

2.3.3 Cicloni extratropicali

Questi venti sono generati o per l'azione meccanica prodotta da ostacoli (montagne e barriere) su correnti atmosferiche di larga scala, o per l'interazione di masse d'aria in corrispondenza di diversi *fronti*.

Le zone di transizione tra diverse masse d'aria, prendono il nome di zone frontali. La variazione delle proprietà fisiche dell'atmosfera in corrispondenza delle zone frontali è rapida ed avviene lungo le cosiddette *superfici frontali* che sono superfici di discontinuità. L'intersezione di una superficie frontale con una superficie avente la stessa quota prende il nome di *fronte*.

Un fronte può essere freddo o caldo in base alla direzione del suo moto, verso arie più calde o più fredde. Generalmente, un fronte caldo si sposta lentamente e non è associato ad avverse condizioni meteorologiche, mentre un fronte freddo si muove più rapidamente e può causare maltempo.

Le masse d'aria messe in moto dai cicloni extratropicali, hanno proprietà pressoché costanti lungo distanze orizzontali comparabili alle dimensioni degli oceani e dei continenti. Inoltre, possono essere distinte in tre diverse tipologie in base alla loro origine:

- masse d'aria artiche
- masse d'aria polari
- masse d'aria tropicali

Ciascuna di queste tre tipologie di masse d'aria può essere suddivisa ulteriormente in circolazioni *continentali* e *marittime*. Le prime sono generalmente fredde e secche, mentre le secondo sono calde e umide.

2.3.4 Venti locali

Fohen e Bora

L'influenza di correnti di piccola scala sulla circolazione generale è trascurabile, tuttavia la loro intensità può essere talvolta considerevole cosicché non se ne può prescindere durante la progettazione di struttura resistente all'azione del vento.

Venti forti e localizzati possono generarsi per effetto della variazione di altezza del terreno. Se una massa d'aria si sposta da una zona pianeggiante verso una regione montuosa o collinare, l'aria si raffredda durante l'ascesa. Inizialmente la temperatura si abbassa di 1°C per ogni 100m di altitudine. Inoltre, quando la temperatura scende sotto un certo livello, il vapore d'acqua condensa portando piogge o neve, e la variazione di temperatura con l'altezza si assesta sul valore di 1°C per ogni 100m di altezza. Oltrepassato il picco della montagna, tale valore ritorna ad essere quello iniziale di $1^{\circ}\text{C}/100\text{m}$, e l'aria spostata dalla corrente atmosferica è secca. Se la massa d'aria si riscalda durante la discesa si ha il vento chiamato *fohen*, nel caso in cui la massa d'aria non riesce a riscaldarsi a sufficienza si ha la *bora*.

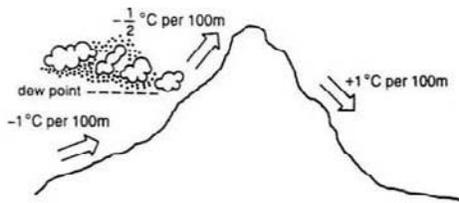


Figura 2.12: Genesi del vento fohen

Uragani

Un uragano si può formare in corrispondenza di un veloce moto ascensionale di aria calda e umida. La condensazione dell'aria che sale determina un rilascio di energia, sotto forma di calore latente, mentre la pioggia prodotta determina un moto del sistema centrale verso il basso. La scala dell'uragano è di circa 10 km, mentre la durata è dell'ordine 1 ora.

Tornado

Un tornado è un vortice che ruota intorno ad un asse inclinato, con un diametro di circa 300m, e si muove ad una velocità di 10-30m/s. La sua massima velocità tangenziale raggiunge i 100m/s. Al di sotto del tornado si crea una forte depressione che

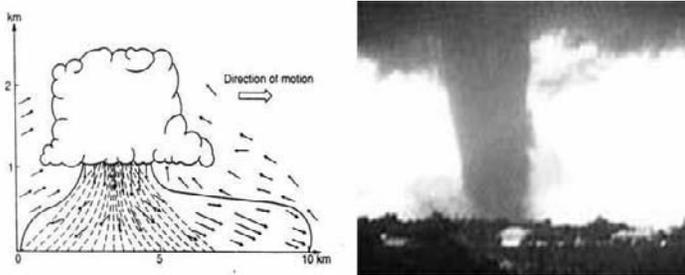


Figura 2.13: Sezione trasversale di un uragano (a sinistra) e vista di un tornado (a destra)

può agire anche in modo molto violento sugli edifici circostanti.

2.4 Spettro della componente longitudinale della velocità del vento

Un grafico che riassume i vari fenomeni coinvolti nella circolazione atmosferica è dato dallo spettro di Van der Hoven (Fig. 2.14). Lo spettro risale al 1957 e fu inizialmente ottenuto dalla componente longitudinale della velocità del vento ad una quota di 100m. Il suo utilizzo è stato successivamente esteso alla descrizione della circolazione atmosferica di qualsiasi sito, e supposto valido per tutto lo sviluppo in altezza dello strato limite.

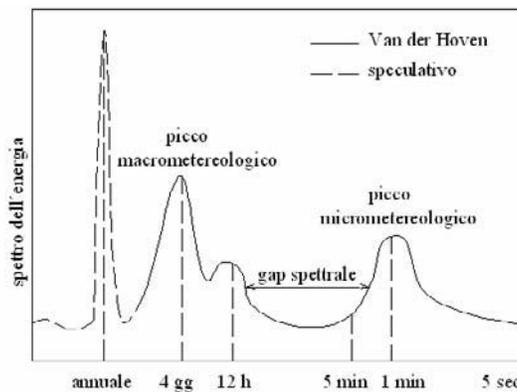


Figura 2.14: Spettro della componente longitudinale della velocità del vento

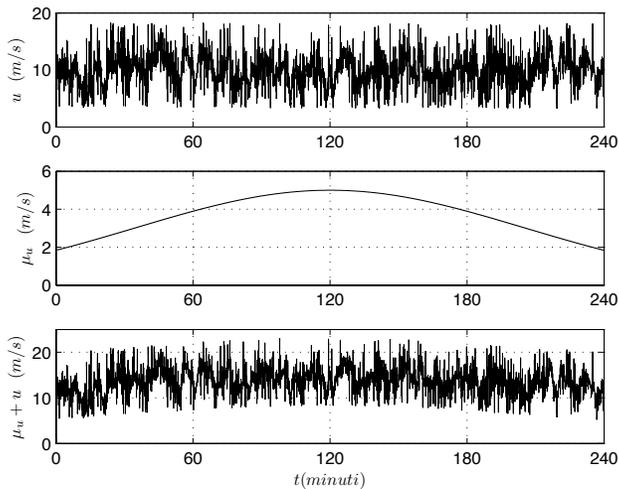


Figura 2.15: Suddivisione della componente longitudinale della velocità del vento come somma del valor medio, μ_u , e della componente turbolenta, u

Nella zona caratterizzata dalle basse frequenze, si hanno i fenomeni *macrometeorologici*. Tale regione dello spettro presenta due picchi, uno corrispondente alla periodicità del vento giornaliera (*brezze* caratterizzate da un periodo pari a 12 ore), l'altro relativo al normale periodo di sviluppo di una burrasca o tempesta, ossia circa 4 giorni (100 ore). Lo spettro è stato esteso anche a sinistra oltre il campo di definizione dello spettro originale, e presenta un ulteriore massimo in corrispondenza della periodicità annuale. Alle alte frequenze è possibile osservare un ulteriore picco, intorno a fenomeni della durata di 1-2 minuti, da attribuire alla turbolenza atmosferica. Quest'ultima non influenza la circolazione atmosferica, ma invece è importante nelle pratiche progettuali.

Lo spettro è una misura della varianza statistica del vento turbolento. Nella zona centrale del grafico in Fig. 2.14, la varianza risulta minima e pressoché costante in un periodo di tempo compreso tra 10 minuti ed un'ora. Tale periodo di tempo prende il nome di *gap spettrale* e fornisce un'utile informazione per la valutazione della velocità di riferimento di un determinato sito. Essendo minima e costante la varianza, è minima l'escursione della componente fluttuante della velocità eolica rispetto alla sua media che pertanto può essere calcolata con buona approssimazione mediando le registrazioni su un periodo compreso tra 10 minuti ed un'ora.

Poiché la velocità media è stazionaria all'interno del gap spettrale, è possibile considerare la componente fluttuante longitudinale del vento come somma del valor medio ottenuto su un periodo di 10-60 minuti e della componente fluttuante di origine turbolenta (Fig. 2.15).

3

Strato limite atmosferico

La superficie terrestre esercita sull'aria in movimento prossima ad essa una forza d'attrito che ne ritarda il flusso. Inoltre, un' ulteriore frizione si genera tra strati d'aria adiacenti che si muovono a velocità differenti. L'effetto combinato di queste frizioni rende il flusso turbolento, cosicché la direzione della velocità del vento si discosta dalle isobare (*turbolenza atmosferica*). La regione dell'atmosfera in cui il vento risente di questi fenomeni prende il nome di *strato limite atmosferico*. Lo spessore di tale regione si estende per un'altezza che varia da poche centinaia di metri a qualche chilometro, in base all'intensità del vento, alla rugosità del terreno, e all'angolo di latitudine. All'interno dello strato limite atmosferico la velocità varia con l'altezza, passando da valori più bassi in prossimità della superficie terrestre, dove si risente maggiormente dell'attrito da essa esercitata, a velocità gradualmente maggiori fino ad arrivare alla *velocità di gradiente*, che segna il confine tra lo strato limite atmosferico e la cosiddetta atmosfera libera, dove la direzione delle masse d'aria in movimento segue le isobare.

3.1 Equazioni del moto dell'atmosfera

Il moto dell'atmosfera è governato dall'equazioni fondamentali della meccanica dei continui, che includono l'equazione di continuità, come conseguenza del principio di conservazione della massa, e la seconda legge di Newton.

Mediando l'equazioni di continuità e di equilibrio, il moto medio dell'atmosfera

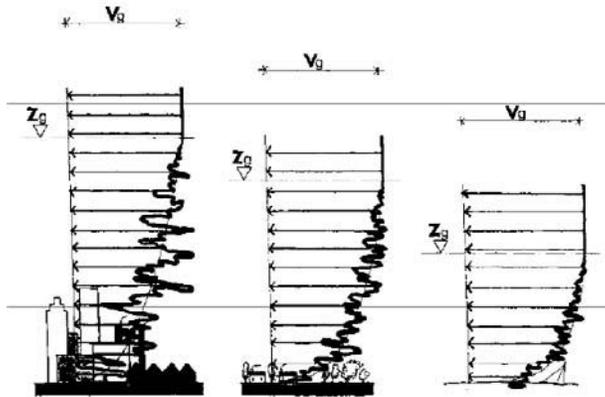


Figura 3.1: Variazione del profilo della velocità eolica in base alla rugosità del terreno

può essere descritto dalle seguenti relazioni:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - fV - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_u}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fU - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

dove U , V e W sono rispettivamente le velocità eoliche nelle direzioni x , y e z di un sistema Cartesiano con z asse verticale. I parametri, p , ρ , f e g sono rispettivamente la pressione media, la densità dell'aria, il parametro di Corioli, e l'accelerazione di Coriolis. Infine τ_u e τ_v sono gli sforzi di taglio nelle direzioni x e y . L'asse x è scelto per convenienza coincidente con la direzione dello sforzo di taglio sul piano, τ_o (Fig. 3.2).

Differenziando la 3.3 rispetto ad x e y si può dimostrare che la variazione verticale del gradiente di pressione orizzontale è funzione del gradiente di densità orizzontale. Trascurando tale variazione (flussi *barotropici*) si ha che all'interno dello strato limite atmosferico il gradiente di pressione orizzontale rimane invariato:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left[fV_{gr} \pm \frac{V_{gr}^2}{r} \right] \quad (3.5)$$

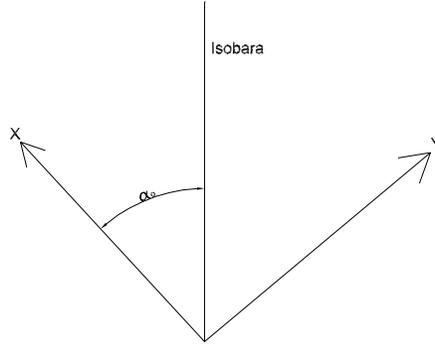


Figura 3.2: Assi coordinati

dove V_{gr} è la velocità di gradiente, r è il raggio di curvatura delle isobare, e n è la direzione del vento di gradiente. Se si assume un vento geostrofico si ottiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = fV_g \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -fU_g \quad (3.7)$$

dove U_g e V_g sono le componenti della velocità geostrofica lungo gli assi coordinati x e y .

Le condizioni al contorno posso essere scelte ponendo che sulla superficie la velocità eolica è nulla, mentre ad un'altezza pari allo spessore dello strato limite atmosferico, gli sforzi di taglio svaniscono dal momento che la direzione del vento si allinea alle isobare (velocità di gradiente).

3.2 Soluzione dell'equazioni di moto medio

Per risolvere il problema del moto medio è necessario introdurre alcune relazioni che definiscono gli sforzi di taglio τ_u e τ_v .

$$\tau_u = \rho K(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.8)$$

$$\tau_v = \rho K(x, y, z) \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$K(x, y, z) = L^2(x, y, z) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (3.10)$$

dove K e L sono rispettivamente la *viscosità turbolenta* e la *lunghezza di mescolamento*.

3.3 Soluzione del moto turbolento

Dall'equazioni di equilibrio del moto medio è possibile ottenere la seguente espressione:

$$\left[U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right) + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right) \right] - \left[\frac{\tau_u}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\tau_v}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[w \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) \right] + \epsilon = 0 \quad (3.11)$$

dove il sovrasegno indica la media rispetto al tempo, e $q = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}$ è la risultante della velocità fluttuante le cui componenti lungo x , y e z sono rispettivamente u , v e w . L'equazione 3.11 è nota come *equazione dell'energia cinetica della turbolenza* ed esprime l'equilibrio dell'avvezione (primo termine), produzione (secondo termine), diffusione (terzo termine) e dissipazione (ultimo termine) dell'energia cinetica.

L'equazione 3.11 risulta essere vantaggiosa nello studio dei flussi nello strato limite atmosferico inteso come tridimensionale. In particolare, si hanno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{\tau_u^2 + \tau_v^2} = \rho a_1 \overline{q^2} \quad (3.12)$$

$$w \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) = \frac{1}{Q_c} \left(\overline{q^2} \right)_{max} \left(\overline{q^2} \right) a_2 \left(\frac{y}{\delta} \right) \quad (3.13)$$

$$\epsilon = \frac{\left(\overline{q^2} \right)^{3/2}}{L_d(y/\delta)} \quad (3.14)$$

$$\frac{\tau_u}{\partial U / \partial z} = \frac{\tau_v}{\partial V / \partial z} \quad (3.15)$$

dove $a_1 = 0.16$, δ è lo spessore dello strato limite atmosferico, e Q_c è la velocità di gradiente nel caso di vento atmosferico.

3.4 Profilo della velocità media

Le tempeste di vento di larga-scala attraversano vaste superfici con differente rugosità. Limitando il dominio di integrazione delle equazioni che governano il moto ad una regione relativamente piccola rispetto alle dimensioni della tempesta, e con rugosità approssimativamente uniforme, è possibile assumere che la velocità media nel piano x e y sia costante lungo tutto lo sviluppo della regione: $\partial U / \partial x = 0$ e $\partial V / \partial y = 0$. In questo caso il flusso si dice *orizzontalmente omogeneo*. Se poi si tiene conto del fatto che il gradiente di pressione orizzontale ostacola la crescita dello strato limite

atmosferico, allora la componente verticale della velocità eolica può essere trascurata e l'ipotesi di flusso orizzontale omogeneo risulta ancora valida. Tenendo conto delle precedenti assunzioni, nell'ulteriore ipotesi di vento, geostrofico sono valide le 3.6 e 3.7, e quindi l'equazioni 3.1 e 3.2 diventano:

$$V_g - V = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial \tau_u}{\partial z} \quad (3.16)$$

$$U_g - U = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} \quad (3.17)$$

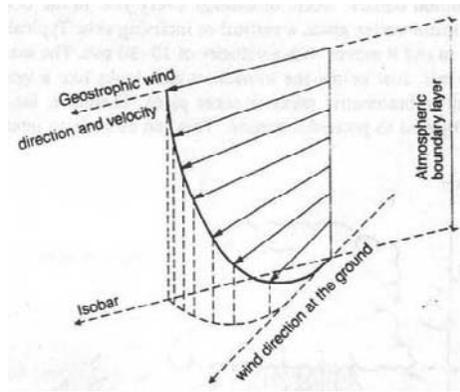


Figura 3.3: Spirale di Ekman

3.4.1 La spirale di Ekman

Se, in aggiunta a quanto appena detto, consideriamo le condizioni al contorno per gli sforzi di taglio (Eq.ni 3.8 e 3.9) e assumiamo che la viscosità turbolenta (Eq. 3.10) sia costante, il modello che ne deriva prende il nome di *spirale di Ekman* in cui le relazioni 3.16 e 3.17 sono equazioni differenziali a coefficienti costanti. Imponendo le condizioni al contorno $U = V = 0$ per $z = 0$ e $U = U_g, V = V_g$ per $z \rightarrow \infty$, la soluzione del sistema è la seguente:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} G [1 - e^{-az} (\cos(az) - \sin(az))] \quad (3.18)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} G [1 - e^{-az} (\cos(az) + \sin(az))] \quad (3.19)$$

con $a = \sqrt{f/2K}$.

Tali equazioni descrivono la spirale di Ekman (Fig. 3.3) ma non forniscono sempre buoni risultati a causa dell'ipotesi di viscosità turbolenta costante con l'altezza.

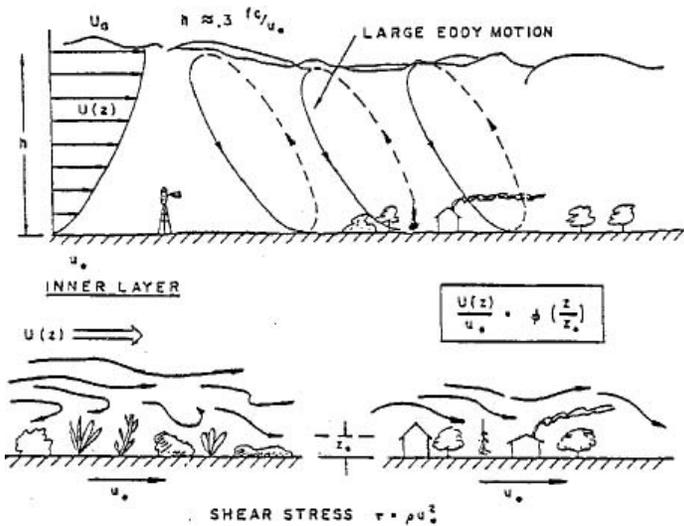


Figura 3.4: Suddivisione dello strato limite in due regioni: strato superficiale e strato esterno

3.4.2 Lo strato limite turbolento di Ekman

Assumendo dei modelli in cui la viscosità turbolenta varia con l'altezza, si hanno risultati più plausibili. Appartengono a questa categoria di modelli quelli che ipotizzano lo strato limite atmosferico diviso in due regioni: lo *strato superficiale* e lo *strato esterno*. È plausibile che lo sforzo di taglio τ_o dipenda dalla velocità del vento in prossimità del suolo, dalla rugosità del terreno, z_o , e dalla densità dell'aria ρ . Pertanto τ_o dovrà essere espresso in funzione delle precedenti quantità: $\tau_o = \mathbf{F}(U\mathbf{i} + V\mathbf{j}, z, z_o, \rho)$ dove \mathbf{i} e \mathbf{j} sono i versori diretti rispettivamente secondo gli assi coordinati x, y . La precedente relazione può essere convenientemente espressa in forma adimensionale :

$$\frac{U\mathbf{i} + V\mathbf{j}}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{z_o}\right) \quad (3.20)$$

nota come *legge del muro* che descrive il flusso nel strato superficiale. La quantità

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (3.21)$$

prende il nome di *velocità di taglio*, mentre f_1 è una funzione di z/z_o .

Analogamente, nello strato esterno si può assumere che la variazione di velocità $[(U_g\mathbf{i} + V_g\mathbf{j}) - (U\mathbf{i} + V\mathbf{j})]$, alla generica quota z , sia espressa in funzione di τ_o ,

dell'altezza dello strato limite δ , e della densità dell'aria ρ :

$$\frac{U\mathbf{i} + V\mathbf{j}}{u_*} = \frac{U_g\mathbf{i} + V_g\mathbf{j}}{u_*} + f_2\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.22)$$

Esprimendo la 3.20 nella forma equivalente:

$$\frac{U\mathbf{i} + V\mathbf{j}}{u_*} = f_1\left[\left(\frac{z}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{z_o}\right)\right] \quad (3.23)$$

uguagliando i primi membri della 3.22 e della 3.23 e scegliendo opportunamente le funzioni f_1 e f_2 :

$$f_1(\xi) = \left(\ln \xi^{1/k}\right) \mathbf{i} \quad (3.24)$$

$$f_2(\xi) = \left(\ln \xi^{1/k}\right) \mathbf{i} + \frac{B}{k} \mathbf{j} \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

con k e B costanti, si perviene alle seguenti relazioni:

$$\frac{U_g}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\delta}{z_o} \quad (3.27)$$

$$\frac{V_g}{u_*} = -\frac{B}{k} \quad (3.28)$$

da cui si ottiene la velocità geostrofica:

$$G = \sqrt{\left(B^2 + \ln^2 \frac{\delta}{z_o}\right) \frac{u_*}{k}} \quad (3.29)$$

Inoltre si può dimostrare che lo spessore dello strato limite atmosferico, δ sia dato dalla seguente relazione:

$$\delta = c \frac{u_*}{f} \quad (3.30)$$

dove c è una costante.

Infine, è dunque possibile definire il profilo della velocità media del vento generalizzando la 3.27 per una velocità ad una quota generica z :

$$U(z) = \frac{1}{k} u_* \ln \left(\frac{z}{z_o}\right) \quad (3.31)$$

dove $k \approx 0.4$ è la costante di von Karman, z_o è la rugosità del suolo, e $u_* = \sqrt{\tau_o/\rho}$ è la velocità d'attrito.

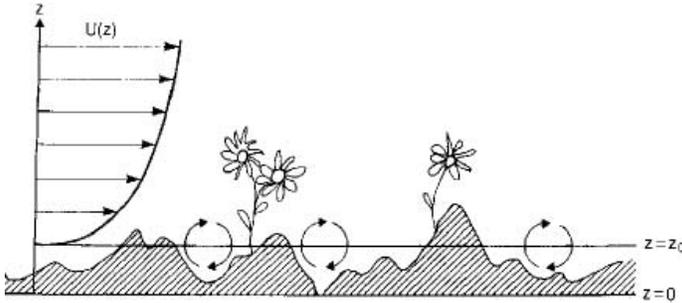
Figura 3.5: Lunghezza di rugosità z_0

Tabella 3.1: Categorie del terreno e relativi parametri

Categoria del terreno		k_T	z_0 (m)	z_{min} (m)
I	Mare aperto, laghi con minimo 5 km di estensione sopravento e campagna senza ostacoli	0.17	0.01	2
II	Terreno agricolo con recinzioni, piccole fattorie isolate, case o alberi	0.19	0.05	4
III	Aree suburbane o industriali o foreste permanenti	0.22	0.3	8
IV	Area urbana in cui almeno il 15% della superficie sia coperta da edifici la cui altezza media superi i 15m	0.24	1	16

3.4.3 Lunghezza di rugosità

La lunghezza di rugosità, z_0 può essere interpretata come la dimensione caratteristica dei vortici che si generano per effetto della frizione dell'aria in moto e il suolo (Fig. 3.5).

Nell'Eurocodice 1 sono state introdotte quattro categorie di terreno (Tabella 3.1), per le quali è definito un fattore di terreno k_T proporzionale alla velocità d'attrito, e che aumenta con la rugosità del terreno. Inoltre, l'Eurocodice 1 introduce anche un'altezza minima entro la quale la velocità rimane costante.

In particolare, l'Eurocodice 1 fornisce un profilo di velocità logaritmico:

$$U(z) = U_{ref} k_T \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad z \geq z_{min} \quad (3.32)$$

dove U_{ref} è la velocità di riferimento del sito in esame.

Gli elementi del suolo che contribuiscono ad aumentarne la scabrezza sono detti *elementi di rugosità*. Tali elementi aumentano la resistenza al vento e pertanto con-

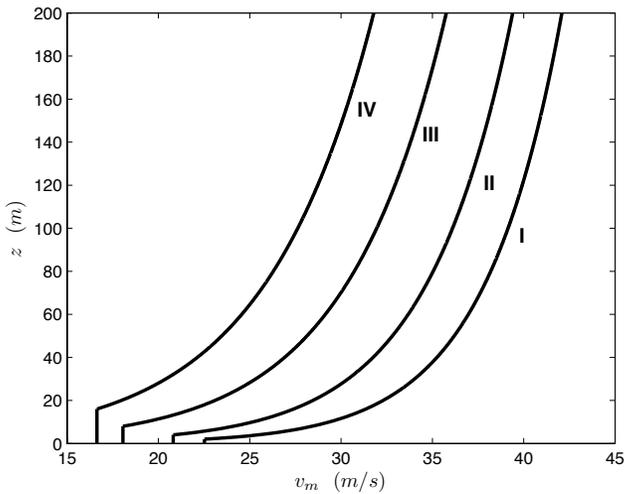


Figura 3.6: Profili di velocità media del vento secondo le quattro categorie previste dall'Eurocodice 1

tribuiscono a produrre ulteriore turbolenza.

Se gli elementi di rugosità sono uniformemente distribuiti sul suolo, è possibile stimare la lunghezza di rugosità z_o con la seguente formula empirica:

$$z_o = 0.5h \frac{A_r}{A_t} \quad (3.33)$$

dove h è l'altezza degli elementi di rugosità, A_r è l'area degli elementi ortogonali alla direzione del vento, e A_t è l'area d'influenza di ciascun elemento. Se A_r e A_t sono dello stesso ordine di grandezza (elementi di rugosità molto fitti), il flusso viene traslato verso l'alto di una quantità pari all'altezza media degli elementi di rugosità. Tale fenomeno lo si registra ad esempio nelle foreste (Fig. 3.7).

La traslazione della superficie di contatto viene tenuta in conto introducendo l'altezza media della rugosità fitta, d , nell'espressione del profilo logaritmico della velocità media del vento:

$$U(z) = U_* \frac{1}{k} \ln \frac{z - d}{z_o} \quad (3.34)$$

3.5 Terreni non omogenei

Nel caso in cui il vento spiri in prossimità di un suolo, caratterizzato da una rugosità che nel complesso può essere intesa come uniforme, il profilo di velocità lo si può

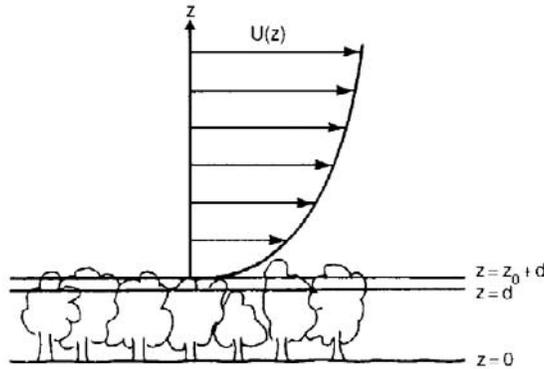


Figura 3.7: Profilo di velocità media in corrispondenza di una foresta

approssimare con una legge logaritmica.

Consideriamo il caso in Fig. 3.8 in cui il vento lambisce dapprima un suolo con rugosità z_{o1} e successivamente un suolo con z_{o2} . In corrispondenza del primo terreno, e ad un'altezza h_2 dopo la transizione, la velocità del vento è determinata soltanto dalla rugosità z_{o1} . La rugosità z_{o2} influisce sulla velocità del vento solo entro l'altezza h_1 , mentre nella regione intermedia tra h_1 e h_2 si ha una graduale transizione in cui entrambe le rugosità influenzano la velocità del vento. La regione che si estende dal suolo fino ad h_2 prende il nome di *strato limite interno*, mentre al disotto di h_1 si ha lo *strato di equilibrio*. La lunghezza dello strato limite esterno è stato valutato da Elliot che formulò la seguente relazione:

$$h_2(x) = z_{o2} \left[0.75 + 0.03 \ln \left(\frac{z_{o1}}{z_{o2}} \right) \right] \left(\frac{x}{z_{o2}} \right)^{0.8} \quad (3.35)$$

dove la distanza x è misurata, in direzione del vento, dal punto in cui cambia la rugosità. Si evince dalla 3.35 che h_2 aumenta più rapidamente dopo una transizione verso terreni più rugosi, piuttosto che dopo una transizione verso terreni meno rugosi (Fig. 3.9).

3.5.1 Topografia

La presenza di una discontinuità nel piano di campagna (Fig. 3.10) determina un'accelerazione del flusso, e conseguentemente un aumento della pressione eolica sulle strutture. Per questo motivo l'Eurocodice 1 introduce un coefficiente di topografia, c_T , che dipende dalla velocità del vento alla base della discontinuità, dalla sua pendenza, dalla sua lunghezza misurata nella direzione del vento, dalla sua altezza rispetto al suolo, e dalla distanza della struttura dal suo picco.

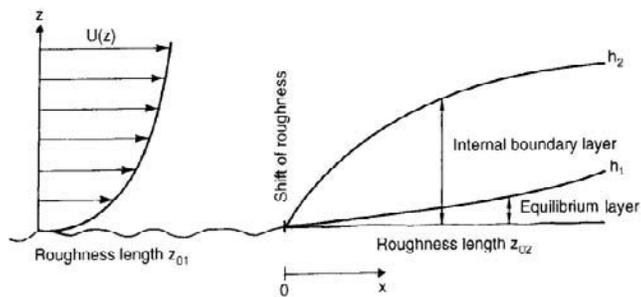


Figura 3.8: Profilo di velocità media in corrispondenza di terreni con diversa rugosità

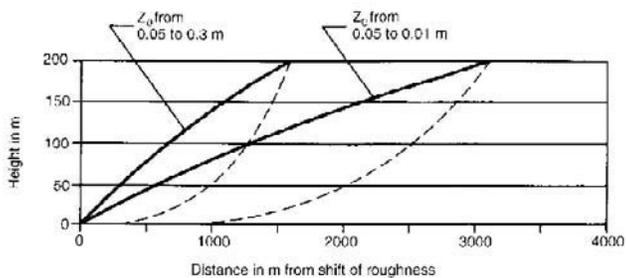


Figura 3.9: h_2 dopo una transizione di rugosità

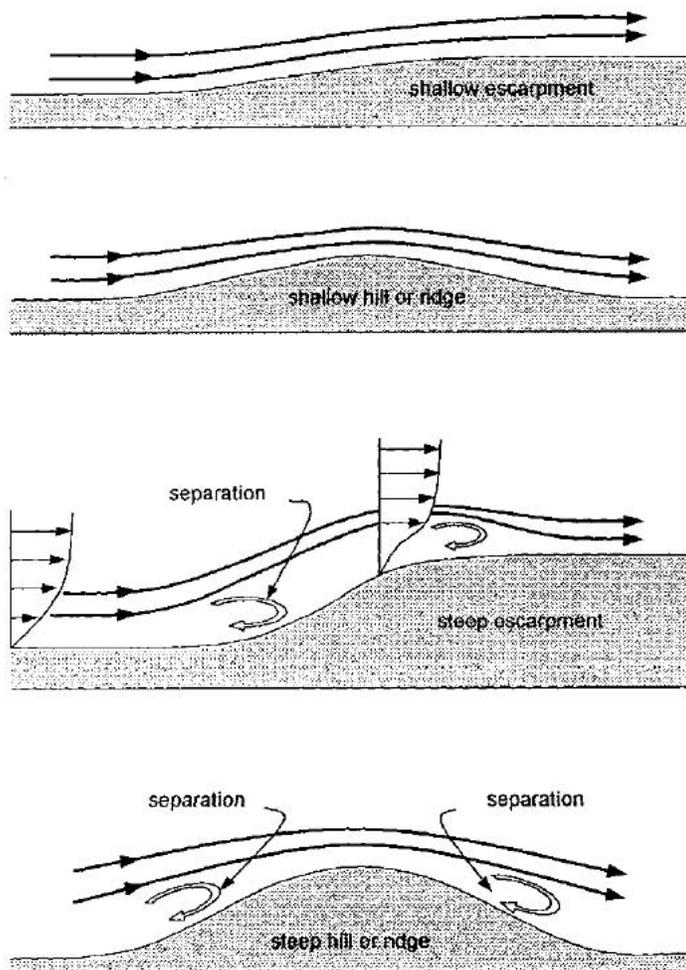


Figura 3.10: Discontinuità del terreno

Tabella 3.2: Tipici valori di δ e α per i profili esponenziali

Area costiera		Terreno aperto		Terreno suburbano		Centro città	
α	δ_{gr} (m)	α	δ_{gr} (m)	α	δ_{gr} (m)	α	δ_{gr} (m)
-	-	.16	275	0.28	400	0.40	520
1/10	215	1/7	275	1/4.5	400	1/3	460

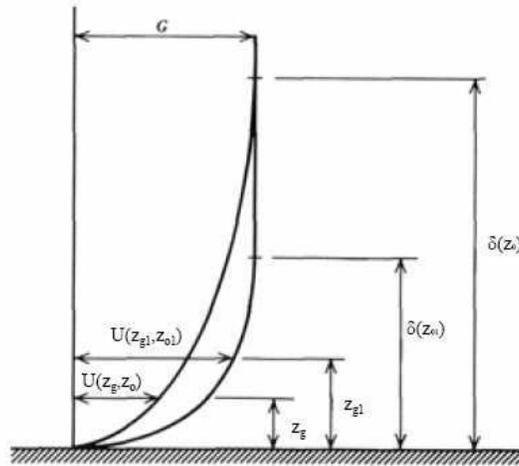


Figura 3.11: Profili di vento per differenti rugosità

3.6 Profilo esponenziale della velocità del vento

Il primo modello di profilo di velocità del vento ad essere introdotto fu quello esponenziale:

$$U(z_{g1}) = U(z_{g2}) \left(\frac{z_{g1}}{z_{g2}} \right)^\alpha \quad (3.36)$$

dove α è un coefficiente che dipende dal tipo di terreno, mentre z_{g1} e z_{g2} sono due quote rispetto al terreno. Ponendo $z_{g2} = z_{ref}$ e $z_{g1} = z$ si ottiene quello che originariamente era il profilo di velocità media previsto dalle norme canadesi:

$$U(z) = U(z_{ref}) \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha \quad (3.37)$$

È bene ricordare che il profilo esponenziale non ha un fondamento fisico ma fornisce valori accettabili.

Se si assume che la quota di riferimento sia l'altezza dello strato limite, $z_{ref} = \delta = \delta_{gr}$, allora la legge esponenziale è funzione solo di α :

$$u(z) = G \left(\frac{z}{\delta_{gr}} \right)^\alpha \quad (3.38)$$

3.6.1 Discontinuità del terreno

Consideriamo, come nel caso precedente, due terreni aventi differenti lunghezza di rugosità, siano queste z_o e z_{o1} con $z_{o1} < z_o$. La differenza di rugosità induce due differenti profili di velocità (Fig. 3.11).

Utilizzando il profilo esponenziale, per trovare la velocità $U(z_g, z_o)$ nota la velocità $U(z_{g1}, z_{o1})$, si ottiene:

$$U(z_g, z_o) = U(z_{g1}, z_{o1}) \left[\frac{z_g}{\delta(z_o)} \right]^{\alpha(z_o)} \left[\frac{\delta(z_{o1})}{z_{g1}} \right]^{\alpha(z_{o1})} \quad (3.39)$$

4

Turbolenza atmosferica

Il vento nello strato limite atmosferico è sempre turbolento. La turbolenza, è dovuta ad un treno di vortici che si genera per effetto dell'attrito dell'aria con il suolo e con tutti gli ostacoli presenti su di esso (*elementi di rugosità*). Quanto più grande è il valore della rugosità equivalente del sito in esame, tanto più turbolento è il vento in prossimità della superficie di rugosità. L'effetto si ripercuote su tutto lo strato limite atmosferico fino a raggiungere l'atmosfera libera dove la velocità del vento segue la direzione delle isobare. Vi è dunque un graduale attenuamento della turbolenza all'aumentare della quota rispetto al suolo, dovuto alla minore influenza della rugosità superficiale sulla circolazione atmosferica.

Il vento, in quanto turbolento, può essere inteso come un processo stocastico in cui ciascun vortice contribuisce a caratterizzarne l'energia (*densità spettrale*), in base alle proprie dimensioni e al proprio periodo (o alla propria frequenza). Generalmente, nei vortici più grandi prevalgono le *forze fluide inerziali*, mentre quelli più piccoli sono caratterizzati dalle *forze fluide viscosse*. Quest'ultimi tendono a dissipare maggiore energia, che viene di volta in volta rifornita dai vortici più grandi. In definitiva, nel vento turbolento vi è un continuo trasferimento di energia dai vortici più grandi a quelli più piccoli.

La valutazione della risposta strutturale diviene così molto complessa. Tuttavia alcune evidenze sperimentali permettono di semplificare in parte il problema. Nel capitolo precedente, abbiamo visto che lo spettro della componente longitudinale della velocità del vento è caratterizzata dal *gap spettrale* che garantisce la stazionarietà del valor medio della velocità eolica su un periodo di tempo compreso tra dieci minuti ed un'ora. È dunque possibile trattare separatamente la componente fluttuante

turbolenta del vento e quella media che di per sé induce una risposta strutturale di tipo statico. La risposta al vento turbolento viene valutata in campo dinamico ed è intesa come un processo aleatorio da studiare con opportuni modelli statistici. Un'ulteriore constatazione facilita la soluzione del problema dinamico: la turbolenza atmosferica può essere intesa come un processo il cui momento statistico del secondo ordine è stazionario. Inoltre, il vento turbolento è, con buona approssimazione, di tipo Gaussiano, ossia i primi due momenti statistici permettono di caratterizzarlo completamente. Pertanto, essendo stazionari media e varianza del processo Gaussiano ad essa associato, la turbolenza può essere intesa anche come *ergodica*. L'assunzione di ergodicità del processo sfolta le pratiche sperimentali in sito o in galleria del vento: una singola registrazione del vento turbolento risulta essere rappresentativa di tutto il processo stocastico ad esso associato. Se venisse meno questa proprietà, una corretta campagna sperimentale dovrebbe essere condotta su una serie numerosa di registrazioni.

Riassumendo, il vento atmosferico può essere inteso come un processo Gaussiano stazionario ergodico. Tralasciando la componente media, una completa descrizione fisica della turbolenza è data dalla caratterizzazione dell'*intensità di turbolenza*, delle sue *scale integrali*, della sua *densità spettrale di potenza* e della sua *coerenza* che ne identifica la correlazione spaziale.

4.1 Intensità di turbolenza

Siano U , V e W le velocità eoliche medie nelle direzioni x , y e z di un sistema Cartesiano con z asse verticale (Fig. 3.2), e u , v e w le rispettive componenti turbolente. Nell'ipotesi di terreno omogeneo e flusso orizzontale, le deviazioni standard delle componenti fluttuanti, σ_u , σ_v e σ_w , possono essere considerate costanti sui piani individuati da differenti quote rispetto al suolo. Inoltre, è stato osservato che tali quantità decrescono molto lentamente entro le altezze tipiche delle strutture convenzionali, o addirittura fino ad un'altezza pari alla metà dello strato limite atmosferico, come postulò Armit. Fino ad un'altezza di 100-200 metri è possibile assumere che:

$$\sigma_u = Au_* \quad (4.1)$$

$$\sigma_v \approx 0.75\sigma_u \quad (4.2)$$

$$\sigma_w \approx 0.5\sigma_u \quad (4.3)$$

con $A \approx 2.5$ per $z_o = 0.05m$ e $A \approx 1.8$ per $z_o = 0.3m$.

A partire dalle deviazioni standard, si definiscono le *intensità di turbolenza* in

funzione della quota z :

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u(z)}{U(z)} \quad (4.4)$$

$$I_v(z) = \frac{\sigma_v(z)}{V(z)} \quad (4.5)$$

$$I_w(z) = \frac{\sigma_w(z)}{W(z)} \quad (4.6)$$

Fino ad altezze pari a 100-200 metri, si può assumere che le componenti fluttuanti della velocità del vento siano distribuite *normalmente* (distribuzione Gaussiana), e abbiano media nulla¹. Tuttavia, qualora la deviazione standard di tali processi stocastici cade al di fuori di un certo intervallo, sia esso ± 3 , l'ipotesi di Gaussianità può essere a sfavore di sicurezza.

4.2 Scale temporali

Nell'assunzione di processo stazionario, la funzione di autocorrelazione permette di stimare le informazioni che una registrazione della velocità del vento, ad un certo istante t_1 , fornisce sulla valore della stessa registrazione al temp t_2 . Indicando con $\tau = t_1 - t_2$ il periodo di tempo che intercorre tra due valori della stessa registrazione, è possibile definire la funzione di autocorrelazione nel seguente modo:

$$R_u(z, \tau) = E [u(x, y, z, t_1)u(x, y, z, t_1 + \tau)] \quad (4.7)$$

che è funzione della sola altezza z nell'ipotesi di flusso orizzontalmente omogeneo che investe un sito uniformemente rugoso. La funzione di autocorrelazione può essere anche adimensionalizzata:

$$\rho_u(z, \tau) = \frac{E [u(x, y, z, t_1)u(x, y, z, t_1 + \tau)]}{E [u^2(x, y, z, t)]} = \frac{E [u(x, y, z, t_1)u(x, y, z, t_1 + \tau)]}{\sigma_u^2(z)} \quad (4.8)$$

dove $\sigma_u(z)$ è la varianza. La funzione di autocorrelazione, $\rho_u(z, \tau)$, assume così valori compresi tra 0 ed 1.

La scala temporale $T(z)$ è definita come:

$$T(z) = \int_0^{+\infty} \rho_u(z, \tau) d\tau \quad (4.9)$$

ed è un *tempo di memoria*: una misura di u al tempo t_1 fornisce diverse informazioni circa $u(t_1 + \tau)$ se $\tau \ll T(z)$, al contrario se $\tau \gg T(z)$. Un esempio di

¹La media viene considerata a parte.

funzione di autocorrelazione è data dalla Fig. 4.1, che fa riferimento ad una buona approssimazione è data dalla seguente relazione:

$$\rho_u(\tau) = e^{-\tau/T(z)} \quad (4.10)$$

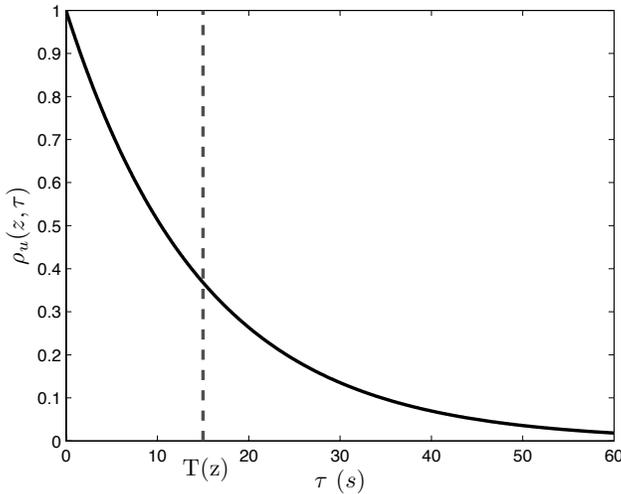


Figura 4.1: Funzione di autocorrelazione $\rho_u(\tau)$

4.3 Scale integrali

Le scale integrali sono una misura della dimensione caratteristica dei vortici che costituiscono la corrente eolica, o in maniera equivalente, della dimensione media della raffica di vento. Considerando la componente u , le rispettive scale integrali si scrivono:

$$L_u^x = \int_0^{+\infty} \rho_u(z, r_x) dr_x \quad (4.11)$$

$$L_u^y = \int_0^{+\infty} \rho_u(z, r_y) dr_y \quad (4.12)$$

$$L_u^z = \int_0^{+\infty} \rho_u(z, r_z) dr_z \quad (4.13)$$

dove $\rho_u(z, r_j)$ $j = x, y, z$ è la funzione di cross-correlazione tra due punti della raffica in direzione j distanziati di r_j . In generale è possibile definire 3 scale integrali

per ciascuna componente di velocità.

Secondo l'ipotesi di Taylor, la turbolenza atmosferica può essere schematizzata come un treno di vortici *congelati* che si muovono alla velocità media del vento. In questa ipotesi, considerando $j = x$, si ha $r_x = U(z)\tau$ e quindi:

$$L_u^x(z) = U(z)T(z) \quad (4.14)$$

valida per tutte le 9 scale integrali di turbolenza.

Le scale integrali dipendono dall'altezza, dalla rugosità del suolo, e anche dalla velocità del vento. Per altezze comprese tra i 10-240 metri vale la seguente relazione:

$$L_u^x(z) = Cz^m \quad (4.15)$$

dove C e m dipendono dalla rugosità del sito, z_o (Fig. 4.2).

Le rimanenti scale integrali sono spesso espresse in funzione della scala integrale

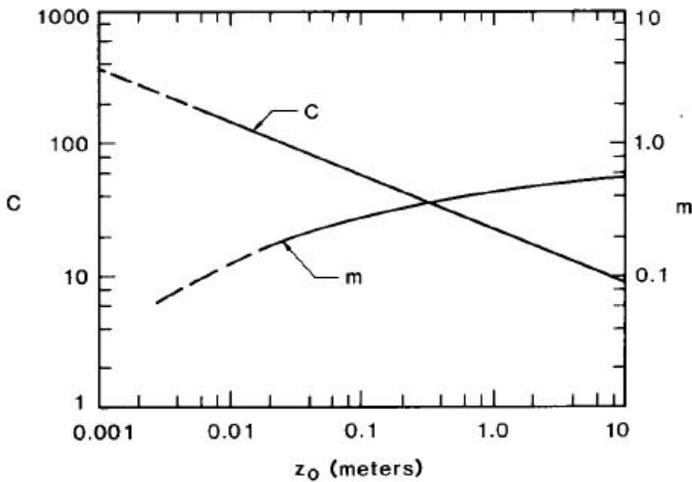


Figura 4.2: Valori di C e m in funzione di z_o

longitudinale, $L_u^x(z)$:

$$L_u^y \approx 0.3L_u^x \quad (4.16)$$

$$L_u^z \approx 0.2L_u^x \quad (4.17)$$

4.4 Spettro della componente longitudinale della velocità del vento

La turbolenza può essere intesa come la sovrapposizione di vortici caratterizzati da un periodo e dunque da una frequenza angolare $\omega = 2\pi n$. L'energia totale del processo

è quindi la somma dei vari contributi energetici associati ad ogni singolo vortice. Dall'equazione di moto del flusso turbolento si evince che i termini inerziali sono associati ad un trasferimento di energia dai vortici più grandi a quelli più piccoli, mentre i termini viscosi si riferiscono ad una dissipazione di energia che interessa principalmente i vortici più piccoli. A causa di questa dissipazione, la turbolenza tenderebbe ad estinguersi, tuttavia la corrente viene rifornita di energia dai vortici con dimensioni maggiori. Il flusso turbolento è dunque garantito da un equilibrio energetico tra l'energia introdotta nella corrente dai vortici più grandi, e l'energia dissipata da quelli più piccoli.

Prima ipotesi di Kolmogorov

Il moto dei vortici minori è governato dalla quantità di energia fornita, che per l'equilibrio è pari a quella dissipata, e dalla viscosità. Da tale ipotesi, deriva che i piccoli vortici sono indipendenti dalle condizioni al contorno, a tal punto che questi non hanno una direzione preferenziale, ossia costituiscono un *flusso isotropo*.

Seconda ipotesi di Kolmogorov

I vortici maggiormente responsabili della dissipazione energetica sono i vortici molto piccoli aventi cioè delle lunghezze d'onda molto piccole. Conseguenza di quest'ipotesi è che i vortici più grandi, aventi lunghezze d'onda maggiori, si muovono indipendentemente dalla viscosità, e pertanto il loro moto è determinato soltanto dalla quantità di energia fornita, che per l'equilibrio sarà uguale a quella dissipata. La seconda ipotesi di Kolmogorov è valida nel cosiddetto *sotto-intervallo inerziale* e fornisce l'espressione generale della componente longitudinale della velocità del vento:

$$S_{uu}(K) = a\epsilon^{2/3}K^{-5/3} \quad (4.18)$$

dove $a \approx 0.5$, ϵ è la quantità d'energia trasferita (o dissipata), e $K = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda con λ lunghezza d'onda.

4.4.1 Spettro nel sotto-intervallo inerziale

Si può assumere che l'energia trasferita, ϵ , sia data dalla seguente relazione:

$$\epsilon = \frac{\tau_o}{\rho} \frac{\partial U(z)}{\partial z} \quad (4.19)$$

con $U(z)$ dato dal profilo di velocità media:

$$U(z) = \frac{1}{k} u_* \frac{z}{z_o} \quad (4.20)$$

Si dimostra, utilizzando le precedenti relazioni, che lo spettro della componente longitudinale della velocità del vento può essere scritta nella forma:

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = 0.26 \left[\frac{nz}{U(z)} \right]^{-2/3} \quad (4.21)$$

dove la quantità $f = nz/U(z)$ è nota come coordinata di Monin.

Si riportano di seguito alcuni spettri presenti in letteratura:

Spettro di Von Karman

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = 4 \frac{nL_u^x}{U(z)} \frac{1}{\left[1 + 70.8 \left(\frac{nL_u^x}{U(z)} \right)^2 \right]^{5/6}} \quad (4.22)$$

Spettro di Davenport

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = 4 \left(\frac{1200n}{U_{10}} \right)^2 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1200n}{U_{10}} \right)^2 \right]^{4/3}} \quad (4.23)$$

Spettro di Kaimal

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = \frac{200f}{(1 + 50f)^{5/3}} \quad (4.24)$$

Spettro utilizzato dall'Eurocodice 1

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = 6.8 \frac{nL_u^x}{U(z)} \frac{1}{\left[1 + 10.2 \frac{nL_u^x}{U(z)} \right]^{5/3}} \quad (4.25)$$

Per completezza si forniscono anche gli spettri di letteratura relativi alla componenti trasversali della velocità del vento.

Spettro di Kaimal

$$\frac{nS_{vv}(z, n)}{u_*^2} = 15 \frac{nz}{U(z)} \frac{1}{\left[1 + 9.5 \frac{nz}{U(z)} \right]^{5/3}} \quad (4.26)$$

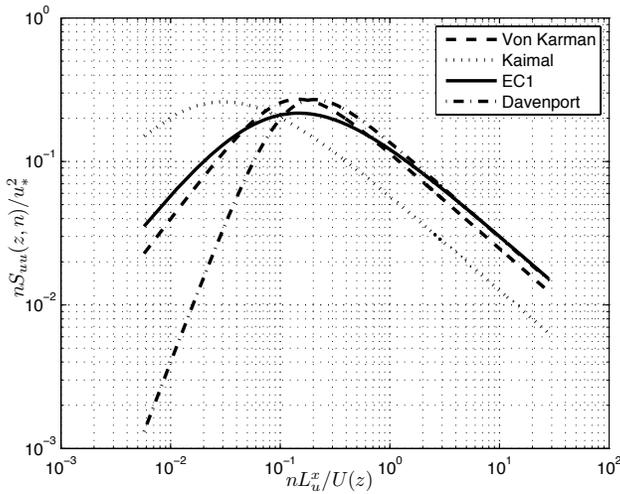


Figura 4.3: Confronto tra vari spettri della componente longitudinale della velocità del vento

Spettro di Lumley e Panofsky

$$\frac{nS_{uu}(z, n)}{u_*^2} = 3.36 \frac{nz}{U(z)} \frac{1}{1 + 10 \left(\frac{nz}{U(z)} \right)^{5/3}} \quad (4.27)$$

4.5 Correlazione spaziale della turbolenza

Il cross-spettro normalizzato, $S_N(P_1, P_2, n)$ della turbolenza longitudinale, fornisce la dipendenza statistica in funzione della frequenza n , tra due punti nello spazio P_1 e P_2 . Lo si esprime come segue:

$$S_N(P_1, P_2, n) = \frac{S_{uu}(P_1, P_2, n)}{\sqrt{S_{uu}(P_1, n)S_{uu}(P_2, n)}} \quad (4.28)$$

dove $S_{uu}(P_1, P_2, n)$ è il cross-spettro della componente turbolenta nei due punti considerati. $S_{uu}(P_j, n)$ $j = 1, 2$ è lo spettro della j -esima componente turbolenta.

La parte reale dello cross-spettro prende il nome di *co-spettro*, ψ_{uu} , ed è una funzione che decade all'aumentare della distanza. Questo decadimento dipende dalla dimensione dei vortici che generalmente può essere stimata come il rapporto tra la velocità e la frequenza, U/n . La parte immaginaria prende il nome di *quad-spettro*. Inoltre $|S_N(P_1, P_2, n)| = \sqrt{C_{uu}(P_1, P_2, n)}$ dove $C_{uu}(P_1, P_2, n)$ è la funzione di

coerenza. Il co-spettro e la radice quadra della coerenza coincidono quando la parte immaginaria del cross-spettro normalizzato è nulla o trascurabile. In generale nella valutazione della risposta di strutture soggette al vento turbolento, si assume che la parte immaginaria di $S_N(P_1, P_2, n)$ sia nulla, pertanto si ottiene:

$$S_{uu}(P_1, P_2, n) = \sqrt{S_{uu}(P_1, n)S_{uu}(P_2, n)}Coh_{uu}(P_1, P_2, n) \quad (4.29)$$

dove $Coh_{uu}(P_1, P_2, n) = \sqrt{C_{uu}(P_1, P_2, n)} = \psi_{uu}(P_1, P_2, n)$.

Date le distanze $r_y = |y_1 - y_2|$ e $r_z = |z_1 - z_2|$ lungo y e z tra due punti nello strato limite atmosferico, una buona approssimazione della funzione di coerenza è data da:

$$\sqrt{C_{uu}(r_y, r_z, n)} = Coh_{uu}(P_1, P_2, n) = \psi_{uu}(r_y, r_z, n) = e^{-\frac{n}{U} \sqrt{(C_y r_y)^2 + (C_z r_z)^2}} \quad (4.30)$$

dove $U = \frac{1}{2} [U(z_1) + U(z_2)]$, mentre C_y e C_z sono due costanti che generalmente possono assumersi pari a 10. Tali costanti garantiscono il decadimento della correlazione spaziale con la distanza.

5

Aerodinamica dei corpi tozzi

Lo studio dei fenomeni aerodinamici nasce dalle pratiche aeronautiche, e successivamente fu esteso alle strutture immerse nello strato limite atmosferico. Di particolare interesse, nelle pratiche strutturali, è la conoscenza della turbolenza del vento incidente, oppure la turbolenza prodotta dalle stesse strutture (*signature*). Poiché, in generale, le strutture presentano forme qualsiasi, si fa riferimento all'*aerodinamica dei corpi tozzi*.

In questo capitolo vengono riportati i concetti basilari dell'aerodinamica dei corpi di forma qualsiasi, e quindi delle strutture.

5.1 Equazioni che governano il moto di una corrente fluida

Una corrente fluida, come ad esempio il vento atmosferico, si muove rispettando le seguenti equazioni di equilibrio.

5.1.1 Equazioni di moto

Dato un volume elementare di fluido, dV , il vettore di velocità del fluido può essere scritto come segue:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{i}_i \quad (5.1)$$

dove u_i ($i = 1, 2, 3$) sono le componenti della velocità lungo x_i ($i = 1, 2, 3$) che costituiscono un sistema cartesiano di riferimento i cui versori sono rispettivamente

dati da \mathbf{i}_i ($i = 1, 2, 3$).

Le equazioni di moto del volume dV di fluido si scrivono come somma delle forze d'inerzia, delle forze di massa, e delle forze di superficie:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

dove:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} dV \quad \rho g_i dV \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (5.3)$$

sono rispettivamente (procedendo da sinistra verso destra) le forze d'inerzia, le forze di massa, e le forze di superficie. Nella 5.3, ρ è la densità del fluido, t è il tempo, g_i è l' i -esima componente dell'accelerazione, e σ_{ij} una tensione agente su una particella di fluido (Fig. 5.1). Inoltre,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (5.4)$$

è la *derivata sostanziale* o *derivata totale*.

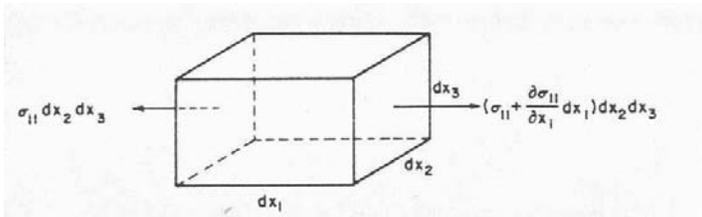


Figura 5.1: Forze agenti su un volume elementare di fluido

5.1.2 Equazioni di continuità

Per il *principio di conservazione della massa*, l'aumento di massa fluida contenuta all'interno di una certa superficie chiusa deve essere uguale alla differenza tra la massa che esce ed entra dal volume racchiuso dalla superficie. L'equazione di continuità si scrive come segue:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.5)$$

Se il fluido è incompressibile, $\partial\rho/\partial t = 0$, pertanto l'equazione di continuità diviene:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.6)$$

5.1.3 Equazioni di Navier-Stokes

Al contrario di un solido, un fluido in condizioni statiche può resistere solo a pressioni normali. In condizioni dinamiche invece, il flusso può resistere anche a sforzi di taglio. Se tali sforzi sono dovuti alla viscosità, μ , allora si parla di fluidi Newtoniani. Ad esempio, lo sforzo di taglio in Fig. 5.2 è espresso come:

$$\sigma_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.7)$$

dove il fattore di proporzionalità è la viscosità fluida, μ , la cui unità di misura è $Kg/(m \cdot sec)$.

Conviene dividere il tensore delle tensioni, σ , in una parte idrostatica, \mathbf{p} , ed una

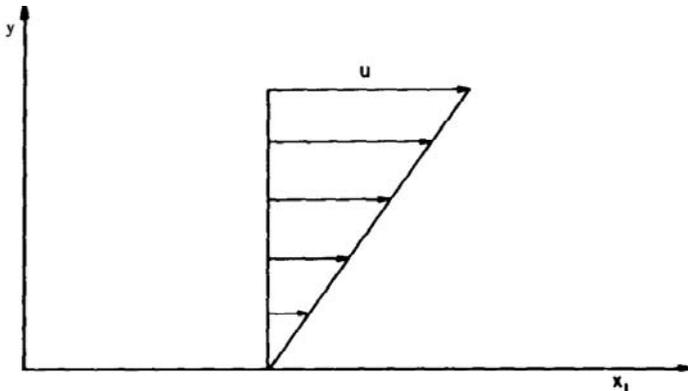


Figura 5.2: Velocità che varia linearmente allontanandosi da una superficie

deviatorica, \mathbf{d} :

$$p_{ij} = \begin{cases} p & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.8)$$

$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.9)$$

dove:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.10)$$

Con la precedente scomposizione si arriva alla seguente relazione:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right) \quad (5.11)$$

che sostituita all'equazione di moto (Eq. 5.2) porta alla definizione dell'equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right) \right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

Se la viscosità, μ , può essere considerata costante, la 5.12 diviene:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad (5.13)$$

che in forma vettoriale diviene:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{i}_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_j^2} \quad (5.14)$$

5.1.4 Equazioni di Bernoulli

Nel caso in cui il fluido è incompressibile (Eq. 5.6) e inviscido ($\mu = 0$), l'equazione 5.14 diviene:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \quad (5.15)$$

se x_1 è la coordinata lungo la quale avviene il moto del fluido, si ha per integrazione della 5.15 che:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{cost.} \quad (5.16)$$

in ogni punto di una linea di corrente fluida.

La 5.16 è nota come *teorema di Bernoulli* che nel caso più generale si scrive:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{cost.} \quad (5.17)$$

dove u è la velocità della corrente fluida lungo una linea di corrente. La quantità $\frac{1}{2} \rho u^2$ è nota come *pressione dinamica*.

5.2 Flusso vorticoso

Consideriamo una corrente fluida che si muove lungo un percorso curvilineo (Fig. 5.3). Sia dr la distanza tra due linee di flusso, l'equazione di moto per il flusso sarà data da:

$$dp dA = \rho dr dA \frac{u^2}{r} \quad (5.18)$$

dove p è la pressione lungo su un elemento elementare di fluido, dA è l'area di tale elemento, u^2/r è l'accelerazione del flusso dovuta alla curvatura di raggio, r .

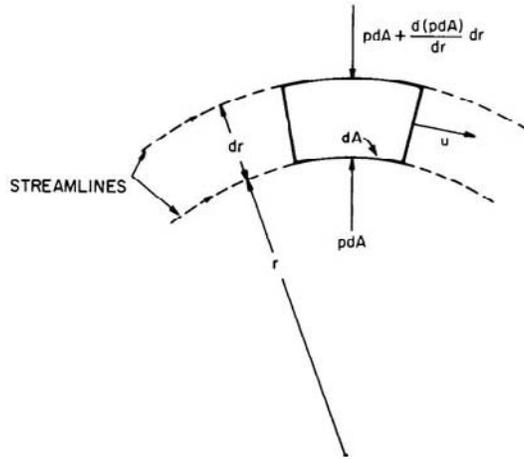


Figura 5.3: Corrente fluida lungo una linea curva

La 5.18 indica che la variazione di pressione normale alle linee di corrente curvilinee è data dalla relazione:

$$dp = \rho u^2 \frac{dr}{r} \quad (5.19)$$

Nel caso in cui il percorso è circolare si ha il *flusso vorticoso*. Per il teorema di Bernoulli si ottiene:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r} \quad (5.20)$$

che integrata fornisce la seguente relazione del *vortice libero*:

$$ur = \text{cost} \quad (5.21)$$

secondo la quale la velocità diminuisce all'aumentare del raggio secondo una legge iperbolica. Tuttavia tale relazione è vera soltanto nelle zone più esterne del vortice, dal momento che in quelle più interne prevalgono gli sforzi di attrito (Fig. 5.4).

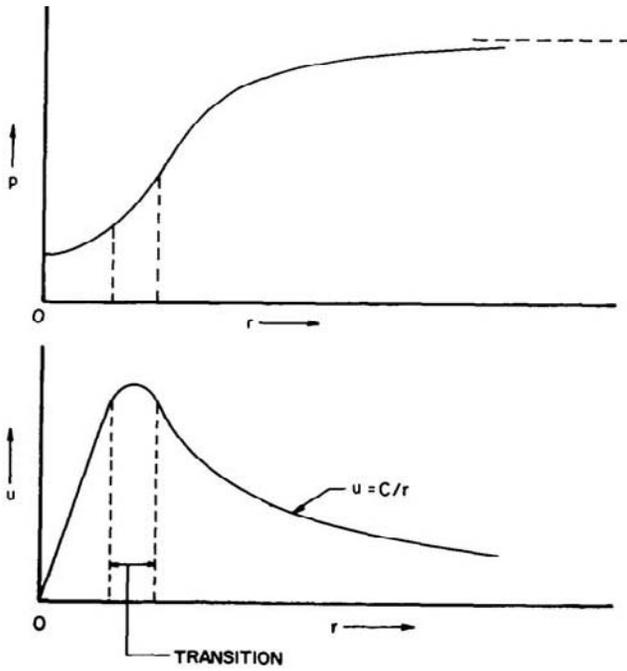


Figura 5.4: Distribuzione di pressione e velocità in un moto vorticoso

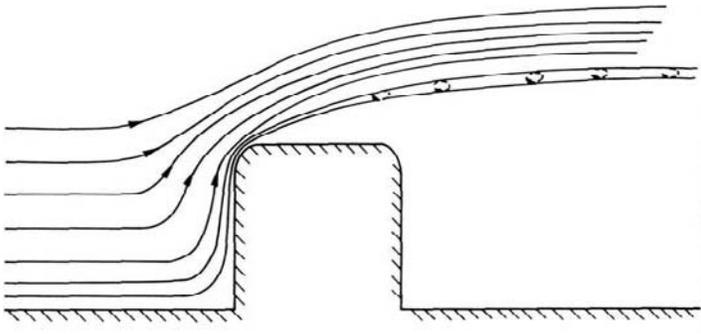


Figura 5.5: Separazione del flusso in corrispondenza di uno spigolo

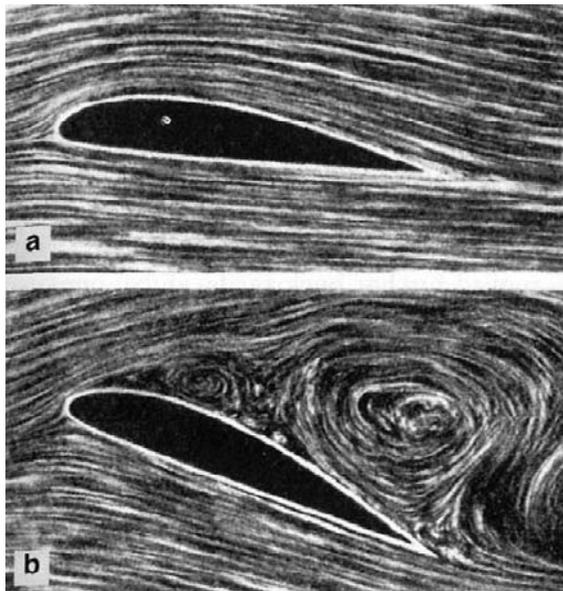


Figura 5.6: Separazione e formazione della scia di un profilo alare

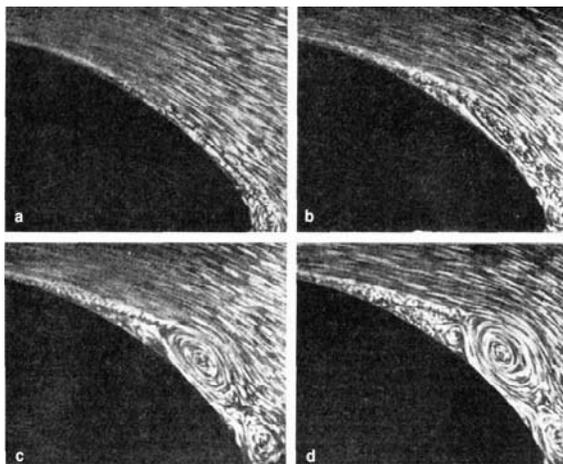


Figura 5.7: Separazione del flusso di una superficie circolare

5.3 Strato limite e separazione

Le forze fluide si differenziano in forze fluide *inerziali* e forze fluide *viscose*. Il rapporto tra le due è un indice del tipo di flusso in esame. Tale rapporto è noto come numero di Reynolds, R_e :

$$R_e = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (5.22)$$

dove ν è nota come *viscosità cinematica* e L è una dimensione caratteristica del corpo. Quando R_e è grande predominano gli effetti inerziali, altrimenti prevalgono gli effetti viscosi. Generalmente, una corrente fluida che investe un ostacolo origina una varietà di numeri di Reynolds, a seconda della regione del corpo che si considera.

La separazione del flusso lungo un ostacolo è dovuta alla presenza di un gradiente avverso di pressione, come ad esempio può accadere in corrispondenza dello spigolo di un corpo (Figg. 5.5, 5.6 e 5.7). Il processo di separazione dello strato limite superficiale genera dei vortici che producono forti suzioni nel punto di separazione, e che defluiscono a valle del corpo formando la *scia*. La scia è una regione costituita da vari strati tra i quali vi è uno scambio di energia continuo. La scia può essere di tipo turbolento o laminare a seconda se lo scambio di energia avviene al livello macroscopico (scia turbolenta) o a livello molecolare (scia laminare).

In base al numero di Reynolds, si possono distinguere tra flussi laminari o turbolenti. Molti flussi turbolenti, possono essere intesi come una scia di vortici prodotta da una serie di ostacoli. Infatti, la turbolenza atmosferica, come menzionato nei capitoli precedenti, è il prodotto dell'attrito di un flusso laminare con gli ostacoli presenti sul suolo ed intesi come rugosità superficiale equivalente.

5.3.1 Distacco dei vortici e formazione della scia

La separazione dello strato limite superficiale e la formazione della scia dipendono dalla geometria del corpo e dal numero di Reynolds.

I *profili aerodinamici* (profili alari) sono studiati in modo tale da non presentare separazione lungo la sezione, ma solo in corrispondenza della coda dove i vortici che si generano sono così piccoli che la scia risulta essere molto sottile. Tuttavia, se il profilo alare ha un angolo d'attacco pronunciato rispetto alla direzione del flusso, la separazione e la formazione della scia vorticosa variano sensibilmente a tal punto da compromettere le prestazioni del profilo stesso (Fig. 5.6).

I corpi aventi superfici curve (Fig. 5.7) presentano punti di separazione e scie vorticosi che dipendono sensibilmente dal numero di Reynolds.

In particolare, nel caso di un cilindro circolare (Fig. 5.8), per valori bassi di R_e , circa $R_e < 5$, le linee di flusso seguono il contorno della sezione (flusso non separato). Nell'intervallo $5 \leq R_e \leq 40$, il flusso si separa nella regione a valle del cilindro formando una coppia di vortici simmetrici. Se il numero di Reynolds viene incrementato ulteriormente, $40 < R_e \leq 150$, la scia diviene instabile e i vortici

si staccano alternativamente dalla regioni laterali del cilindro formando una scia di vortici di tipo laminare (*regime laminare*). Nell'intervallo $150 < Re \leq 300$ la scia comincia a diventare turbolenta anche se lo strato limite superficiale sul cilindro è ancora laminare. I numeri di Reynolds compresi tra $300 < Re \leq 3 \cdot 10^5$ caratterizzano una scia completamente turbolenta (*regime subcritico*). Il *regime critico* si manifesta nell'intervallo $3 \cdot 10^5 < Re \leq 3.5 \cdot 10^6$ ed è caratterizzato da una scia turbolenta e disorganizzata a tal punto che non è più distinguibile il distacco dei vortici. Infine, per $Re > 3.5 \cdot 10^6$ si ha il *regime supercritico* dove riappare nuovamente il distacco dei vortici all'interno di una scia turbolenta.

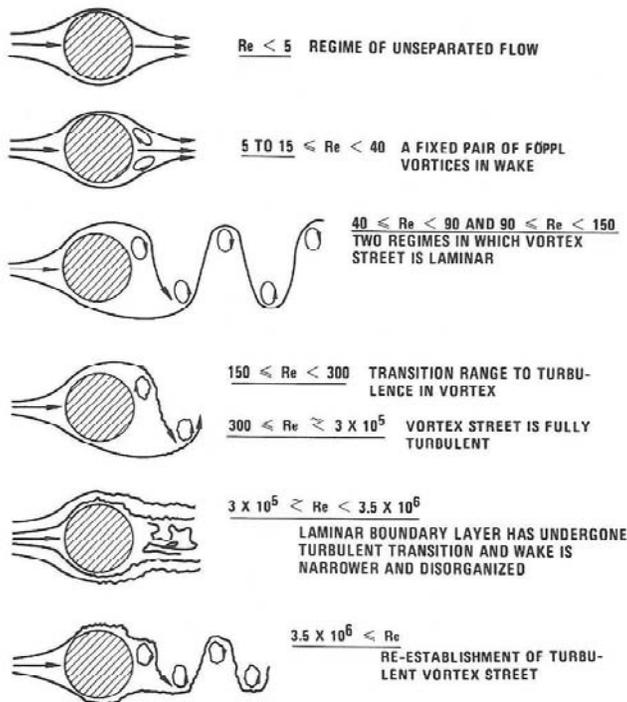


Figura 5.8: Caratteristiche della scia di un cilindro circolare al variare di Re

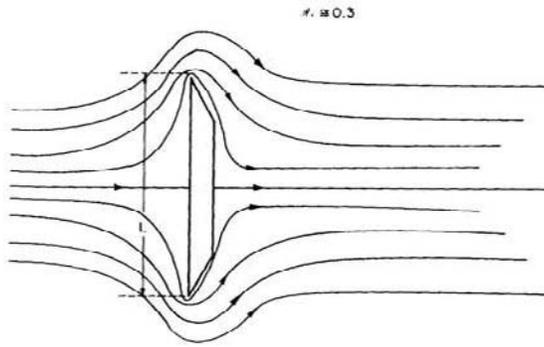


Figura 5.9: Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 0.3$

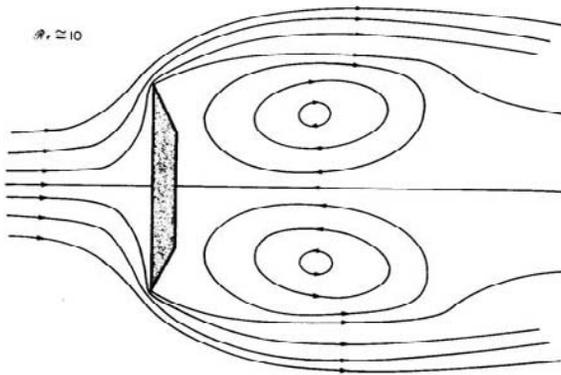


Figura 5.10: Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 10$

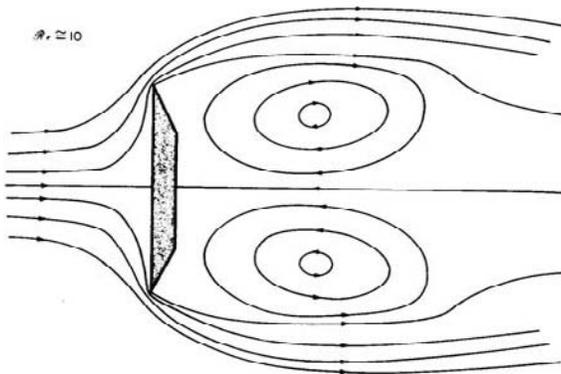


Figura 5.11: Flusso intorno ad un corpo tozzo: $R_e = 250$

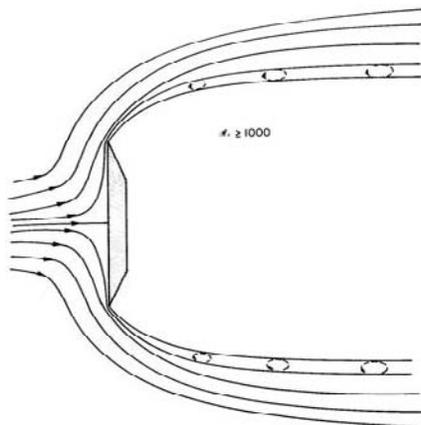


Figura 5.12: Flusso intorno ad un corpo tozzo: $Re \geq 1000$

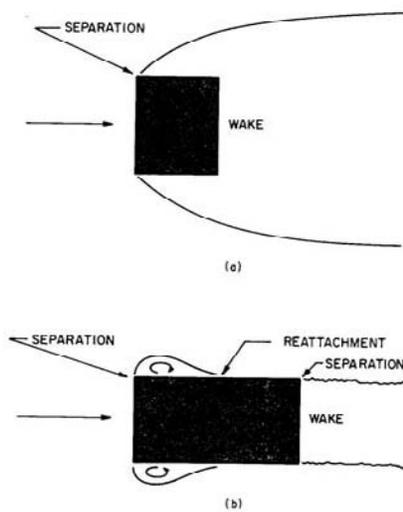


Figura 5.13: Confronto tra sezioni quadrate e rettangolari

I corpi con spigoli vivi (*corpi tozzi*) presentano dei punti di separazione che dipendono dalla forma del corpo, mentre il processo di formazione della scia dipende dal numero di Reynolds. Consideriamo ad esempio il corpo tozzo in Fig. 5.9: per valori molto bassi del numero di Reynolds, $Re = 0.3$, il flusso non si separa ma segue il contorno della sezione; per $Re = 10$ (Fig. 5.10) il flusso si separa in corrispondenza degli spigoli vivi e forma una scia caratterizzata da due vortici simmetrici. Aumentando ulteriormente il numero di Reynolds, per $Re = 250$ (Fig. 5.11) la scia è composta da due vortici che si staccano alternativamente dagli spigoli della sezione. Infine, per $Re \geq 1000$ (Fig. 5.12), le forze fluide inerziali prevalgono pertanto non è possibile assistere alla formazione di grandi vortici, anzi la scia è composta da vortici di piccole dimensioni.

Inoltre, analizzando il flusso intorno a cilindri quadrati e rettangolari (Fig. 5.13), si può notare un diverso comportamento aerodinamico, ad alti numeri di Reynolds. La sezione quadrata induce una separazione seguita da una scia ampia a valle del corpo. La sezione rettangolare, più allungata, presenta una separazione in corrispondenza degli spigoli a monte del corpo, seguita da un riattacco del flusso lungo la sezione, e successivamente una nuova separazione a valle della sezione. La scia che ne consegue è più stretta. Tutto ciò si traduce, come vedremo più avanti, in coefficienti di forza differenti tra le due sezioni.

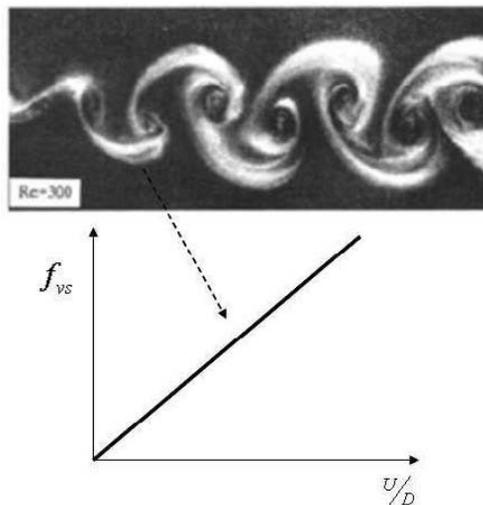


Figura 5.14: Legge del numero di Strouhal

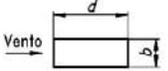
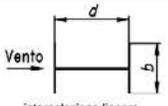
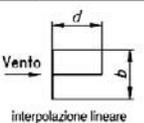
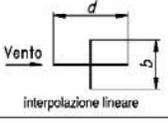
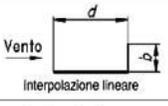
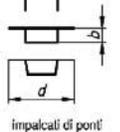
Sezioni trasversali		St
	per tutti i numeri di Re	0,2
	$0,5 \leq db \leq 10$	Figura 5.16
	$db = 1$ $db = 1,5$ $db = 2$ interpolazione lineare	0,11 0,10 0,14
	$db = 1$ $db = 2$ interpolazione lineare	0,13 0,08
	$db = 1$ $db = 2$ interpolazione lineare	0,16 0,12
	$db = 1,3$ $db = 2,0$ interpolazione lineare	0,11 0,07
	$db < 5$ $5 < db < 10$ $db \geq 10$ impalcati di ponti	0,154 $\left(\frac{1}{1,1 \cdot d/b + 1} \right)$ 0,083

Figura 5.15: Numeri di Strouhal per diverse sezioni (Eurocodice 1)

5.3.2 Numero di Strouhal

I vortici si staccano dalle regioni laterali di un corpo con una frequenza, f_{vs} , che segue la nota legge del numero di Strouhal:

$$f_{vs} = S_t \frac{U}{D} \tag{5.23}$$

dove D è una dimensione caratteristica della sezione, e S_t è il numero di Strouhal che dipende da diversi parametri, quali ad esempio la forma della sezione (Fig. 5.15) ed il numero di Reynolds. Si può facilmente notare che la legge del numero di Strouhal è una legge lineare (Fig. 5.14).

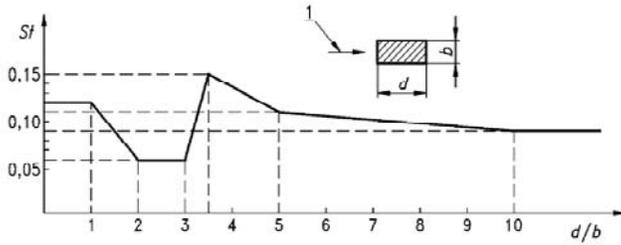


Figura 5.16: Numeri di Strouhal per sezioni rettangolari (Eurocodice 1)

5.3.3 Coefficienti di pressione e di forza

Un corpo soggetto ad una corrente fluida, è soggetto a delle pressioni locali, p , che seguono il teorema di Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + p = \text{cost} \quad (5.24)$$

ossia la somma della pressione dinamica calcolata nelle immediate vicinanze del corpo, $\frac{1}{2}\rho U^2$, e di quella statica, p , costante lungo una linea di flusso.

Generalmente, si preferisce far riferimento al coefficiente di pressione:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.25)$$

dove $p - p_0$ rappresenta la differenza tra la pressione locale e quella del flusso indisturbato, p_0 .

Analogamente, è possibile definire il *coefficiente di drag*, C_d , definito nella direzione del flusso, il *coefficiente di lift*, C_L , definito nella direzione normale a quella del flusso, e il *coefficiente di momento*, C_M :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (5.26)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (5.27)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \quad (5.28)$$

dove B è una dimensione caratteristica della sezione, F_D e F_L sono rispettivamente le forzanti di Drag e di Lift per unità di lunghezza, e M è il Momento. Alcuni esempi sono riportati in Fig. 5.18.

I coefficienti di pressione e di forza dipendono, in generale, dal numero di Reynolds. Consideriamo ad esempio la distribuzione dei coefficienti di pressione di un

cilindro circolare (Fig. 5.17). Nella scia del cilindro circolare, il coefficiente di pressione risulta essere costante al variare di Re . Ciò è dovuto al fatto che la separazione dello strato limite superficiale è avvenuta a monte del corpo stesso. Tuttavia, all'aumentare di Re il punto di separazione arretra, pertanto la scia si forma più a monte e risulta essere più sottile. Ne consegue una minore suzione nelle regioni laterali. Integrando le pressioni locali nella direzione del flusso si ottiene la forzante di Drag, e quindi il coefficiente di Drag. Un tipico andamento del C_D per un cilindro circolare è riportato in Fig. 5.19, dove si può notare che nel regime *critico* C_D diminuisce drasticamente per effetto dell'arretramento del punto di separazione e dell'assottigliamento della scia. Nel regime *supercritico* e in quello *transcritico*, il coefficiente di Drag tende ad aumentare sebbene il suo valore sia comunque minore rispetto al regime *subcritico*. Inoltre, l'andamento di C_D al variare di Re dipende anche dalla rugosità superficiale (Fig. 5.20). In particolare, la rugosità superficiale anticipa la transizione tra un regime ed un altro.

Sebbene, per una sezione circolare, il coefficiente di Drag varia al variare di Re , lo stesso non si può dire per un cilindro a sezione quadrata, per il quale C_D rimane quasi costante al variare del numero di Reynolds (Fig. 5.20). Ciò è dovuto al fatto che la separazione è dettata dallo spigolo a monte della sezione, e non vi è possibilità di un riattacco del flusso lungo il corpo. Smussando gli spigoli del cilindro quadrato (Fig. 5.20), si ottiene, per contro, una notevole dipendenza del coefficiente di Drag dal numero di Reynolds, a tal punto che si può addirittura notare una regione *critica* come accade nei cilindri circolari.

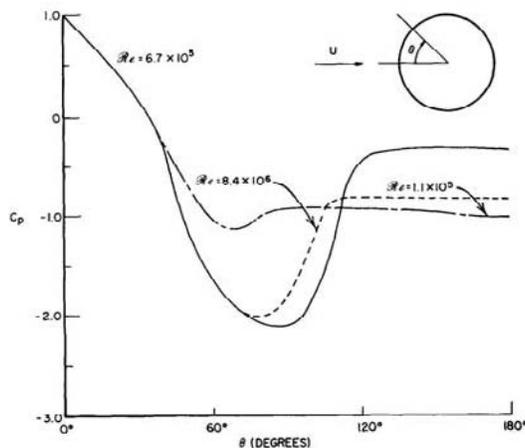


Figura 5.17: Distribuzione dei coefficienti di pressione su un cilindro circolare, al variare di Re

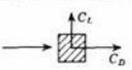
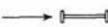
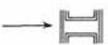
Profile and wind direction	C_D	C_L
	2.03	0
	1.96 - 2.01	0
	2.04	0
	1.81	0
	2.0	0.3
	1.83	2.07
	1.99	-0.09
	1.62	-0.48
	2.01	0
	1.99	-1.19
	2.19	0

Figura 5.18: Valori di C_D e C_L per varie sezioni

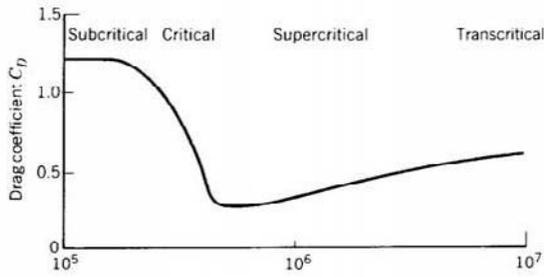


Figura 5.19: Andamento di C_D per un cilindro circolare, al variare di Re

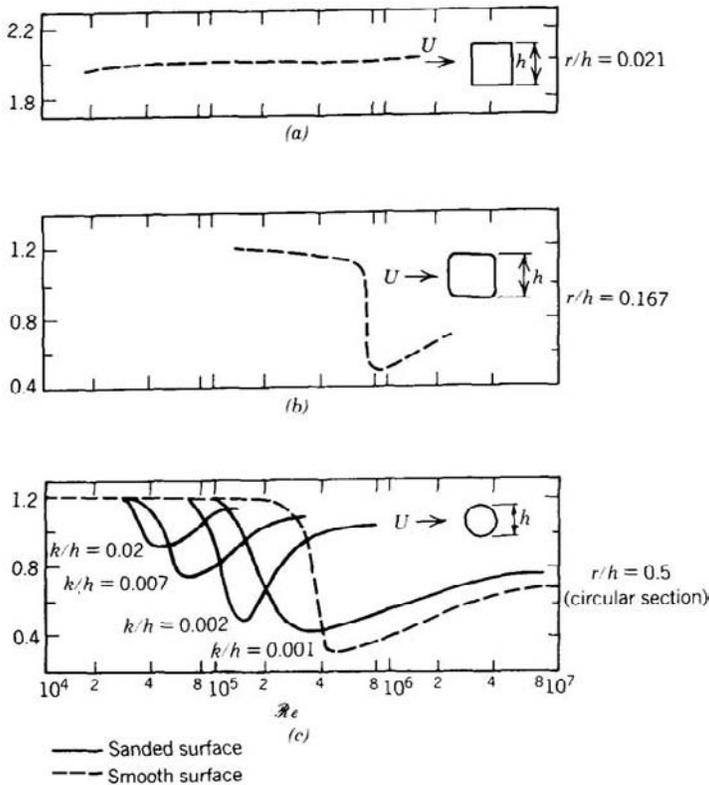


Figura 5.20: a, b) Andamento di C_D , al variare di Re e della curvatura degli spigoli di una sezione quadrata; c) Variazione di C_D , per un cilindro circolare, al variare di Re e della rugosità superficiale ottenuta con della sabbia avente grani di dimensione k

6

Variabili aleatorie e processi stocastici

Per molti problemi fisici, le incertezze sono costituite da valori numerici, ossia dai valori che una stessa variabile può assumere. La soluzione del problema, pertanto, non è deterministica, ma deve essere necessariamente discussa in termini statistici (Davenport [3], Newland [11]).

In questo capitolo sono discusse le *variabili aleatorie continue* e i *processi stocastici* che possono essere intesi come un'insieme di variabili aleatorie continue.

6.1 Variabili aleatorie continue

Data una variabile aleatoria continua, X , la probabilità che essa sia maggiore o uguale ad un certo valore, x , è data dalla *funzione di distribuzione di probabilità*, $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) \quad (6.1)$$

Generalmente, è preferibile far riferimento alla derivata di $F_X(x)$, che prende il nome di *funzione di densità di probabilità*:

$$p_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \quad (6.2)$$

da cui chiaramente si ottiene che

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi \quad (6.3)$$

con la condizione che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(\xi) d\xi = 1 \quad (6.4)$$

Una variabile aleatoria continua è completamente definita quando è definita la sua funzione di densità di probabilità, $p_X(x)$, o alternativamente quando se ne conoscono i *momenti* di ordine n :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx = \mu_X \\ E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p_X(x)dx \\ &\vdots \\ E[X^n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^np_X(x)dx \end{aligned} \quad (6.5)$$

dove il momento del primo ordine $E[X] = \mu_X$ è noto come *media* della variabile aleatoria continua X .

Analogamente, è si definiscono i *momenti centrali* di una variabile aleatoria:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx = \mu_X \\ E[(X - \mu_X)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - \mu_X)p_X(x)dx = Var[X] = \sigma_X^2 \\ &\vdots \\ E[(X - \mu_X)^n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^n - \mu_X)p_X(x)dx \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove σ_X^2 è la *varianza* di X .

L'*indice di variazione* di una variabile aleatoria è definito come:

$$I_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (6.7)$$

dove σ_X è nota come *deviazione standard* di X .

Nella pratica, i valori di una variabile aleatoria sono noti dai risultati di N espe-

rimenti. In tal caso le precedenti definizioni dei momenti divengono:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \mu_X \\
 E[X^2] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 \\
 &\vdots \\
 E[X^n] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^n
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

mentre i momenti centrali saranno dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \mu_X \\
 E[(X - \mu_X)^2] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2 = \sigma_X^2 \\
 &\vdots \\
 E[(X - \mu_X)^n] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^n
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

6.1.1 Variabili aleatorie Gaussiane

Una variabile aleatoria Gaussiana, X , è definita dalla seguente funzione di densità di probabilità:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \tag{6.10}$$

La caratteristica principale delle variabili aleatorie Gaussiane, è che sono completamente definite quando sono definiti i primi due momenti o i primi due momenti centrali, poiché:

$$E[(X - \mu_X)^n] = 0 \quad \forall p > 2 \tag{6.11}$$

6.1.2 Variabili aleatorie congiunte

Nel caso di più variabili aleatorie si definisce la funzione di distribuzione di probabilità congiunta. Ad esempio, date due variabili aleatorie, X e Y si ha:

$$F_{XY}(x, y) = \mathcal{P}(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{6.12}$$

con la condizione che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (6.13)$$

È possibile risalire alla funzione di densità di probabilità di una sola variabile aleatoria, ad esempio X , nel seguente modo:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dy \quad (6.14)$$

Se la variabile aleatoria Y assume un valore noto, y , allora si può definire la funzione di densità di probabilità condizionale:

$$p_{XY}(x | y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dx} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)} \quad (6.15)$$

La dipendenza di due variabili aleatorie è espressa dal coefficiente di correlazione:

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (6.16)$$

Se $\rho_{XY} = 0$ le due variabili aleatorie sono *statisticamente indipendenti* pertanto

$$p_{XY}(x | y) = p_X(x) \quad (6.17)$$

da cui si ottiene:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad (6.18)$$

Se $\rho_{XY} = 1$ le due variabili aleatorie sono *statisticamente dipendenti*, e dunque la densità di probabilità sarà espressa da $p_{XY}(x, y)$.

6.1.3 Momenti di variabili aleatorie congiunte

Date due variabili aleatorie congiunte, X ed Y , i loro momenti centrali del primo ordine (*medie*) saranno definiti dalle seguenti relazioni:

$$\kappa_1[X] = E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{XY}(x, y) dx dy \quad (6.19)$$

$$\kappa_1[Y] = E[Y] = \mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{XY}(x, y) dx dy \quad (6.20)$$

mentre i momenti centrali del secondo ordine definiscono la matrice di covarianza, $\Gamma(X, Y)$:

$$\Gamma_{XY} = \begin{bmatrix} E[(X - \mu_X)^2] & E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ E[(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)] & E[(Y - \mu_Y)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

(6.21)

dove $\sigma_{XY} = \sigma_{YX}$ è la covarianza tra X e Y . La definizione dei momenti centrali di ordine superiore è analoga a quelli appena visti. Inoltre, tali definizioni, in generale, possono essere estese al caso di n variabili aleatorie congiunte.

6.1.4 Variabili aleatorie Gaussiane congiunte

Date due variabili aleatorie continue Gaussiane, la densità di probabilità congiunta si esprime nel seguente modo:

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{XY}^2}} e^{\left\{ \frac{1}{2(1 - \rho_{XY}^2)} \left[\frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y - \mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho_{XY} \frac{(x - \mu_X)(y - \mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right] \right\}} \quad (6.22)$$

dove ρ_{XY} è il coefficiente di correlazione tra X e Y .

6.2 Processi stocastici

Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie che dipendono da un parametro. Nella pratiche strutturali, tale parametro è il tempo, dal momento che i processi stocastici a cui si fa riferimento, sono delle forzanti che variano nel tempo (Fig 6.1).

La struttura di probabilità di un processo stocastico, $X(t)$, è completamente definita quando sono definite tutte le funzioni di densità di probabilità ad esso associate:

$$\begin{aligned} & p_{X(t_1)}(x_1) \\ & p_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) \\ & \vdots \\ & p_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (6.23)$$

In alternativa, un processo stocastico è completamente definito se sono definiti i suoi *momenti*:

$$\begin{aligned} & E[X(t)] = \mu_X(t) \\ & E[X(t_1)X(t_2)] = R_{XX}(t_1, t_2) \\ & \vdots \\ & E[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

oppure i suo *momenti centrali*

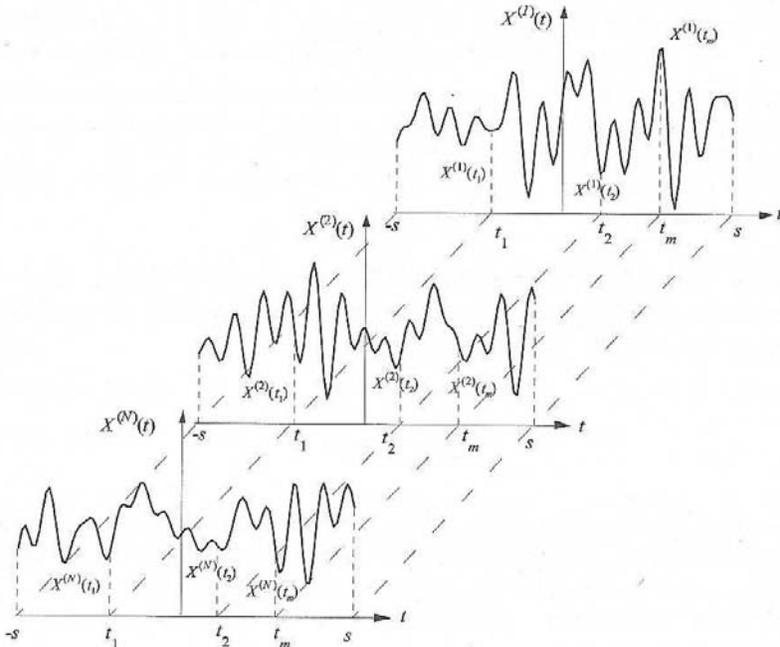


Figura 6.1: Esempio di processo stocastico definito nel tempo

$$\begin{aligned}
 E[X(t)] &= \mu_X(t) \\
 E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

⋮

$$E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)] \dots [X(t_n) - \mu_X(t_n)]\}$$

dove $\mu_X(t)$ è la *funzione di media*, $R_{XX}(t_1, t_2)$ è la *funzione di autocorrelazione*, mentre

$$\begin{aligned}
 \kappa_2[X(t_1)X(t_2)] &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} = \\
 &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

è la *funzione di covarianza o cumulante del secondo ordine*. Inoltre si può dimostrare che il cumulante del primo ordine è uguale alla funzione di media:

$$\kappa_1[X(t_i)] = E[X(t_i)] = \mu_X(t_i) \quad i = 1 \dots n \quad (6.27)$$

Se ciascuna variabile aleatoria, che compone il processo stocastico, è nota come risultato di N esperimenti, allora i momenti assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) = \mu_X(t) \\ E[X(t_1)X(t_2)] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i(t_1)X_j(t_2) \end{aligned} \quad (6.28)$$

⋮

$$E[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dots \sum_{k=1}^N X_i(t_1)X_j(t_2)\dots X_k(t_n)$$

mentre i momenti centrali saranno espressi dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) = \mu_X(t) \\ E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} &= \\ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [X_i(t_1) - \mu_X(t_1)][X_j(t_2) - \mu_X(t_2)] &= \\ \vdots & \end{aligned} \quad (6.29)$$

6.2.1 Processi stocastici stazionari

Un processo stocastico si dice *completamente* stazionario se i suoi momenti sono tempo-invarianti:

$$E[X(t_1)^p] = E[X(t_2)^p] = \dots = E[X(t_n)^p] \quad (6.30)$$

oppure *stazionari di ordine m* se

$$E[X(t_1)^p] = E[X(t_2)^p] = \dots = E[X(t_n)^p] \quad \forall p \leq m \quad (6.31)$$

6.2.2 Processi stocastici stazionari e Gaussiani

Un processo stocastico Gaussiano, è un processo stocastico le cui componenti sono caratterizzate da un funzione di densità di probabilità di tipo gaussiano (Eq. 6.10).

Inoltre, dal momento che la densità di probabilità di una variabile aleatoria Gaussiana è completamente definita quando sono note la sua media, μ_X , e la sua varianza

σ_X^2 , (Eq. 6.10), allora un processo Gaussiano è completamente stazionario se i primi due momenti (o momenti centrali) sono stazionari:

$$E[X(t)] = \mu_X \quad \forall t \quad (6.32)$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_2[X(t_1)X(t_2)] &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} = \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

In questo caso la funzione di autocorrelazione, $R_{XX}(\tau)$ dipende da $\tau = t_1 - t_2$ e non da t_1 e t_2 separatamente.

Osservazione

Se il processo è stazionario allora la media può essere sottratta dal processo stocastico e considerata a parte. In questo caso, il processo stocastico originario viene scomposto in una componente media ed una fluttuante (stocastica). Ad esempio, la turbolenza atmosferica è un processo stocastico Gaussiano, che risulata essere stazionario su un intervallo di tempo compreso tra 10 minuti ed un'ora. Pertanto, mediando su tale intervallo il processo associato alla turbolenza atmosferica, avremo una componente media che induce una risposta strutturale statica, ed una componente stocastica che induce una risposta dinamica.

6.2.3 Processi stocastici ergodici

Un processo stocastico si dice *ergodico* se i suoi momenti coincidono con quelli associati alla singola registrazione, $\mathfrak{X}(t)$, intesa come unica variabile aleatoria rappresentativa di $X(t)$:

$$\begin{aligned} \kappa_1[\mathfrak{X}(t)] &= \mu_X = \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{X}(t) dt = \frac{1}{N} \sum_i \mathfrak{X}(t_i) \\ \kappa_2[\mathfrak{X}^2(t)] &= \sigma_X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathfrak{X}(t) - \mu_X]^2 dt = \frac{1}{N} \sum_i [\mathfrak{X}(t_i) - \mu_X]^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.34)$$

Inoltre, la funzione di autocovarianza di un processo stocastico ergodico si scrive:

$$\begin{aligned} k_2[\mathfrak{X}(t)\mathfrak{X}(t+\tau)] &= \frac{1}{T} \int_0^T [\mathfrak{X}(t) - \mu_X][\mathfrak{X}(t+\tau) - \mu_X] dt = \\ &= \frac{1}{N} \sum_i [\mathfrak{X}(t_i) - \mu_X][\mathfrak{X}(t_i + \tau) - \mu_X] = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

si può subito notare che per $\tau = 0$ si ha $\kappa_2[\mathfrak{X}^2(t)] = \sigma_{\mathfrak{X}}^2 = R_{XX}(0) - \mu_{\mathfrak{X}}^2$.

L'ipotesi di ergodicità è quasi sempre accettata nella sperimentazione. In particolare, acquisito un certo processo stocastico, $\mathfrak{X}(t)$, durante un intervallo di tempo T , con una frequenza di campionamento f_c , il numero di campioni monitorati risulterà $N = Tf_c$. Noti $\mathfrak{X}(t)$, T , ed N si possono trovare le grandezze di interesse riportate nella 6.34 e nella 6.35.

Se il processo ergodico fosse anche Gaussiano, sarebbe completamente descritto dai primi due cumulanti κ_1 e κ_2 .

Osservazione

La funzione di covarianza ha le seguenti proprietà:

$$\kappa_2[X(t)X(t + \tau)] = \kappa_2(\tau) \leq \kappa_2(0) \quad (6.36)$$

$$\kappa_2(\tau) = \kappa_2(-\tau) \quad (6.37)$$

$$\kappa_2(\tau) \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (6.38)$$

6.3 Processi stocastici multivariati

Un processo stocastico multivariato, $\mathbf{X}(t)$, è un vettore le cui componenti, $X_i(t)$, sono dei processi stocastici.

Un processo stocastico multivariato è completamente definito quando sono definiti i suoi momenti centrali o i momenti statistici: in particolare, avremo il vettore delle medie

$$\kappa_1[\mathbf{X}(t)] = \mu_{\mathbf{X}}(t) = \begin{Bmatrix} E[X_1(t)] \\ E[X_2(t)] \\ \vdots \\ E[X_N(t)] \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

la matrice di covarianza:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_1, t_2) &= \begin{Bmatrix} \kappa_{X_1 X_1}(t_1, t_2) \dots & \kappa_{X_1 X_N}(t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \kappa_{X_N X_1}(t_1, t_2) \dots & \kappa_{X_N X_N}(t_1, t_2) \end{Bmatrix} = \\ &= R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_1, t_2) - \mu_{\mathbf{X}}(t_1)\mu_{\mathbf{X}}(t_2)^T \quad (6.40) \end{aligned}$$

e tutti gli altri momenti centrali associati al processo stocastico multivariato $\mathbf{X}(t)$.

La matrice $R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_1, t_2)$ è la matrice di correlazione di $\mathbf{X}(t)$, ossia il momento del secondo ordine di $\mathbf{X}(t)$:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \begin{Bmatrix} E[X_1(t_1)X_1(t_2)] & \dots & E[X_1(t_1)X_N(t_2)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E[X_N(t_1)X_1(t_2)] & \dots & E[X_N(t_1)X_N(t_2)] \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

6.3.1 Processi multivariati stazionari

Nel caso stazionario i momenti centrali (ed i momenti statistici) del primo ordine non dipendono dalla variabile t , mentre tutti gli altri momenti centrali (e i momenti statistici) dipendono solo da $\tau = t_2 - t_1$: in particolare il vettore delle medie sarà dato da

$$\kappa_1[\mathbf{X}(t)] = \mu_{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} E[X_1(t)] \\ E[X_2(t)] \\ \vdots \\ E[X_N(t)] \end{Bmatrix} \quad \forall t \quad (6.42)$$

mentre la matrice di covarianza si scriverà

$$\Gamma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) = \begin{Bmatrix} \kappa_{X_1X_1}(\tau) \dots & \kappa_{X_1X_N}(\tau) \\ \vdots & \vdots \\ \kappa_{X_NX_1}(\tau) \dots & \kappa_{X_NX_N}(\tau) \end{Bmatrix} = R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) - \mu_{\mathbf{X}}\mu_{\mathbf{X}}^T \quad (6.43)$$

dove la matrice di correlazione $R_{XX}(\tau)$ si scrive:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) = \begin{Bmatrix} E[X_1(t)X_1(t+\tau)] & \dots & E[X_1(t)X_N(t+\tau)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E[X_N(t)X_1(t+\tau)] & \dots & E[X_N(t)X_N(t+\tau)] \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

La stazionarietà si ripercuote chiaramente su tutti i momenti centrali (e tutti i momenti stastici) di ordine superiore al secondo.

Per un processo stocastico multivariato, Gaussiano, stazionario, sarà sufficiente conoscere i primi due momenti centrali per descriverlo completamente. Un esempio è dato dalla turbolenza atmosferica che generalmente è riconducibile ad un processo con le suddette caratteristiche.

6.4 Densità spettrale

La densità spettrale di potenza di un processo stocastico stazionario, $X(t)$, è data dalla *trasformata di Fourier* della funzione di correlazione di $X(t)$:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6.45)$$

Pertanto, la funzione di correlazione risulta essere la *trasformata inversa di Fourier* della densità spettrale, $S_{XX}(\omega)$:

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.46)$$

Inoltre, noto lo spettro di $X(t)$ si dimostra che

$$\sigma_X^2 = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (6.47)$$

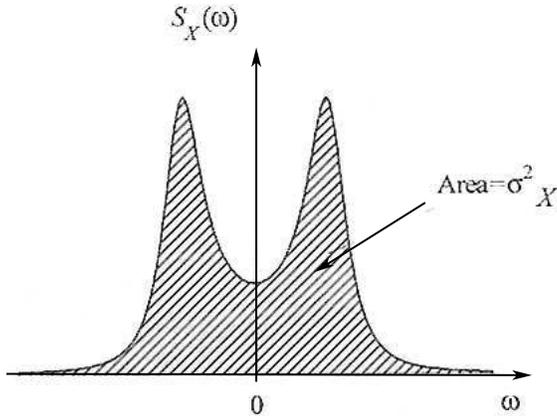


Figura 6.2: Esempio di densità spettrale di potenza

Poiché la densità spettrale è una funzione pari, vale la seguente relazione:

$$\sigma_X^2 = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} G_{XX}(\omega) d\omega \quad (6.48)$$

dove $G_{XX}(\omega) = 2S_{XX}(\omega)$ è detto spettro *unilatero* di $X(t)$.

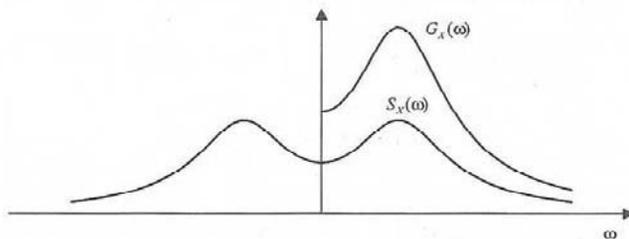


Figura 6.3: Esempio di densità spettrale bilatera, $S_{XX}(\omega)$, e unilatera, $G_{XX}(\omega)$

Nel caso di un processo multivariato stazionario, $\mathbf{X}(t)$, si definisce la matrice

delle densità spettrali:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{X_1X_1}(\omega) & S_{X_1X_2}(\omega) & \dots & S_{X_1X_N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{X_NX_1}(\omega) & S_{X_NX_2}(\omega) & \dots & S_{X_NX_N}(\omega) \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

ossia:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6.50)$$

dove

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) = \left\{ \begin{array}{cccc} E[X_1(t)X_1(t+\tau)] & \dots & E[X_1(t)X_N(t+\tau)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_N(t)X_1(t+\tau)] & \dots & E[X_N(t)X_N(t+\tau)] \end{array} \right\} \quad (6.51)$$

è la matrice di correlazione di $X(t)$.

La matrice di densità spettrali è una matrice Hermitiana, ossia le componenti extra-diagonali sono l'una il complesso coniugato dell'altra:

$$S_{X_jX_i}(\omega) = S_{X_iX_j}^*(\omega) \quad i \neq j \quad (6.52)$$

La parte reale dei cross-spettri, $Re[S_{X_jX_i}(\omega)]$, è una funzione pari, mentre la parte complessa, $Im[S_{X_jX_i}(\omega)]$, è una funzione dispari. Gli auto-spettri, $S_{X_jX_j}(\omega)$, sono funzioni reali e pari.

Inoltre, è possibile definire la coerenza $Coh_{X_iX_j}(\omega)$, che è in generale una funzione costituita da una parte reale (*co-spettro*), $\mathcal{R}_{X_iX_j}(\omega)$, ed una complessa (*quad-spettro*) $\mathcal{I}_{X_iX_j}(\omega)$:

$$Coh_{X_iX_j}(\omega) = \mathcal{R}_{X_iX_j}(\omega) + i \mathcal{I}_{X_iX_j}(\omega) \quad (6.53)$$

In generale si ha:

$$\sqrt{|Coh_{X_iX_j}(\omega)|} = \frac{S_{X_iX_j}(\omega)}{\sqrt{S_{X_iX_i}(\omega)S_{X_jX_j}(\omega)}} \quad (6.54)$$

Nota la matrice delle densità spettrali di $\mathbf{X}(t)$ è possibile risalire alla matrice di correlazione ad esso associata:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(0) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{X_1}^2 & \dots & \sigma_{X_1X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_NX_1} & \dots & \sigma_{X_N}^2 \end{array} \right\} \quad (6.55)$$

dove

$$\sigma_{X_i}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X_i X_i}(\omega) d\omega \tag{6.56}$$

$$\sigma_{X_i X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X_i X_j}(\omega) d\omega \tag{6.57}$$

sono rispettivamente la varianza di $X_i(t)$, e la covarianza tra $X_i(t)$ e $X_j(t)$. Inoltre, poiché la parte immaginaria del cross-spettro è una funzione dispari, il suo integrale è nullo. Pertanto, la covarianza è un numero reale ed inoltre

$$\sigma_{X_i X_j} = \sigma_{X_j X_i} \tag{6.58}$$

6.5 Esempi di processi stocastici

Si riportano le funzioni di correlazione e le densità spettrali di alcune tipologie di processi stocastici ricorrenti nelle pratiche ingegneristiche:

6.5.1 Processo a banda stretta

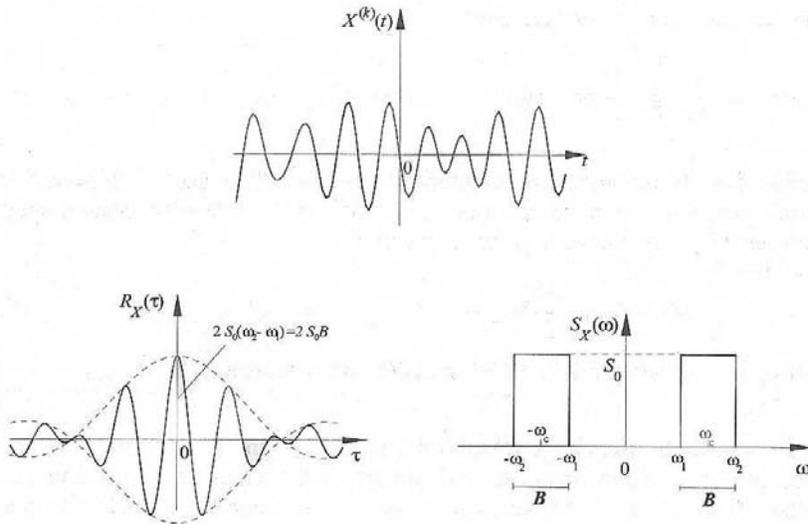


Figura 6.4: Processo a banda stretta

6.5.2 Processo a banda larga

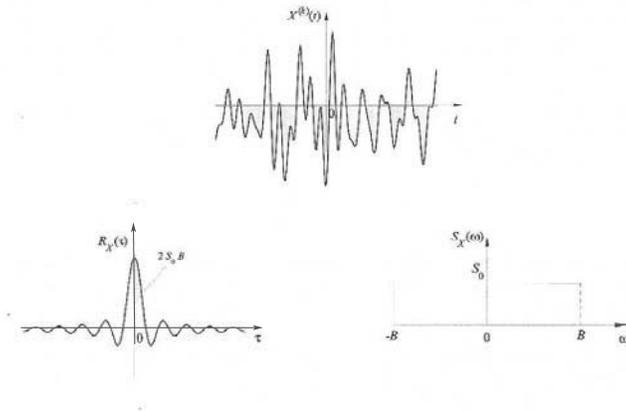


Figura 6.5: Processo a banda larga

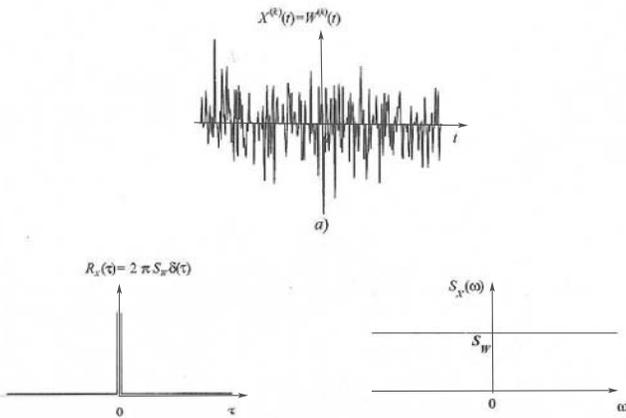


Figura 6.6: Rumore bianco

6.5.3 Rumore bianco

Si definisce *rumore bianco* un processo stocastico le cui variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti tra loro.

6.6 Valore estremo

Si definisce *valore estremo* di un processo stocastico Gaussiano stazionario, $X(t)$, la seguente quantità:

$$X_e = \mu_X + g\sigma_X \quad (6.59)$$

dove g , noto come *fattore di picco*, è dato dalla seguente relazione:

$$g = \sqrt{2 \ln(\nu T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(\nu T)}} \quad (6.60)$$

dove T è la lunghezza di $X(t)$, e ν è la frequenza di attraversamento di soglia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\sigma_X^2}} \quad (6.61)$$

7

Generazione di storie di vento

In questo capitolo verranno proposte alcune delle più comuni tecniche per la generazione di storie di vento a partire dalla matrice di densità spettrale associata alla turbolenza atmosferica o, più in generale, alle forzanti acquisite in galleria del vento oppure mediante sperimentazione al vero.

In questa sede, faremo riferimento alla componente fluttuante longitudinale della velocità del vento, $u = u(t)$, intesa come un processo stocastico stazionario, gaussiano, a media nulla. Chiaramente le tecniche di simulazione che verranno proposte, sono estendibili a qualsiasi processo stocastico con le stesse proprietà statistiche.

7.1 Simulazione di singoli processi stocastici

La trattazione comincia con la simulazione di singoli processi stocastici autocorrelati.

7.1.1 Constant Amplitude Wave Superposition (C.A.W.S.)

Un processo stocastico stazionario Gaussiano a media nulla può essere inteso come la sovrapposizione di funzione armoniche. Pertanto, la velocità eolica $u(t)$ potrà essere scritta nel seguente modo:

$$u(t) = H \sum_{k=1}^N \cos(2\pi n_k t + \phi_k) \quad (7.1)$$

dove H è un'ampiezza costante delle armoniche, N è il numero di bande di frequenza in cui si divide l'intero intervallo di frequenza¹, n_k sono le frequenze centrali delle varie bande di frequenza $\Delta n_1 \dots \Delta n_N$, ϕ_k sono delle fasi casuali uniformemente distribuite tra 0 e π .

Il metodo si basa sul calcolo di H , in modo che lo spettro associato alla 7.1 sia quello desiderato. Dalla teoria dei processi stocastici sappiamo che la varianza, σ^2 , di un processo stocastico stazionario, gaussiano, a media nulla, ed ergodico, è data dalla seguente relazione:

$$\sigma_u^2 = \int_0^{+\infty} S_u(n) dn = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \quad (7.2)$$

dove T è la lunghezza della storia di vento, e $S_u(n)$ è la densità spettrale (in questo caso unilatera) di $u(t)$. Ricordando la 7.1, possiamo scrivere:

$$\sigma_u^2 = \frac{H^2}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^N \cos(2\pi n_k t + \phi_k) \right]^2 dt = H^2 \frac{N}{2} \quad (7.3)$$

Pertanto, l'ampiezza H sarà data dalla seguente relazione:

$$H^2 = \sigma_u^2 \frac{2}{N} \quad (7.4)$$

Per assicurare la convergenza del metodo, indicata con $u_k(t)$ la k -esima componente di $u(t)$, dovrà essere verificata la seguente relazione:

$$\frac{H^2}{2} = S_u(n_k) \Delta n_k = \frac{1}{T} \int_0^T u_k^2(t) dt \quad \forall k \quad (7.5)$$

Tale condizione porta, infine, alla seguente relazione:

$$\frac{H^2}{2} = \frac{\sigma_u^2}{N} = S_u(n_k) \Delta n_k = \text{cost.} \quad (7.6)$$

ossia, dato lo spettro dal quale si vuol generare una storia di vento, è necessario suddividerlo in N bande di frequenza tale che l'area sottesa dallo spettro in corrispondenza di queste bande sia costantemente pari a $\frac{\sigma_u^2}{N}$ (Fig. 7.1).

Il rapporto di convergenza di questo metodo è proporzionale a \sqrt{N} . La generazione di N bande di frequenza, aventi frequenze centrali $n_1 \dots n_k$ può comportare un sostanziale onere computazionale. In ogni caso, alle alte frequenze si hanno intervalli troppi estesi (Fig. 7.1).

¹Generalmente la turbolenza atmosferica longitudinale ha una banda di frequenza compresa tra 0Hz e 4Hz.

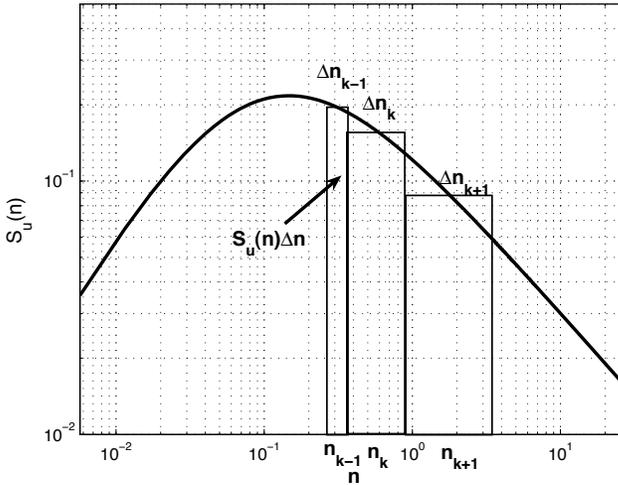


Figura 7.1: Constant Amplitude Wave Superposition (C.A.W.S.)

7.1.2 Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)

In questo metodo, le ampiezze delle armoniche che compongono il processo stocastico $u(t)$, non sono costanti:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N H_k \cos(2\pi n_k t + \phi_k) \quad (7.7)$$

Per calcolare le ampiezze H_k si sfrutta la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_k^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [H_k^2 \cos^2(2\pi n_k t + \phi_k)]^2 dt = \frac{H_k^2}{T} = S_u(n_k) \Delta n_k \quad (7.8)$$

da cui, infine, si ottiene che la k -esima ampiezza H_k è data da:

$$H_k = \sqrt{2S_u(n_k) \Delta n_k} \quad (7.9)$$

Il rapporto di convergenza di questo metodo è proporzionale a N^2 . I vantaggi, rispetto al precedente metodo, risiedono nel fatto che il metodo può essere usato congiuntamente con l'algoritmo FFT (*Fast-Fourier-Transform*), e le bande di frequenza hanno ampiezza costante (Fig. 7.2).

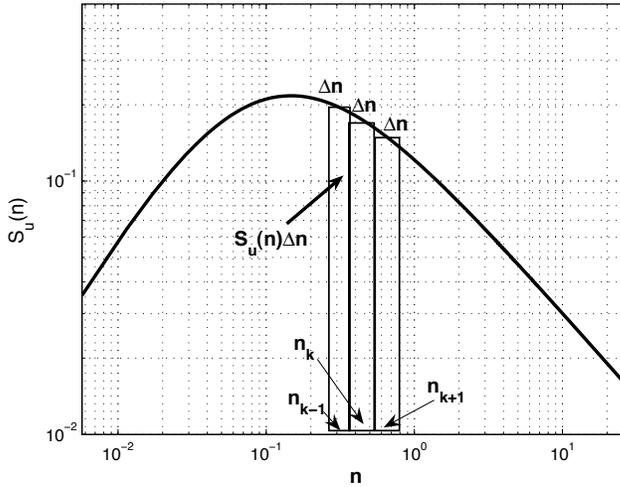


Figura 7.2: Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)

7.1.3 Filtri Autoregressivi

Il processo stocastico, $u(t)$, è scritto nel seguente modo:

$$u(t) = \sum_{k=1}^p \psi_k u(t - k\Delta t) + \epsilon(t) \quad (7.10)$$

dove p è l'ordine del filtro, ψ_k sono dei coefficienti da stimare, e $\epsilon(t)$ è un rumore bianco a media nulla e varianza σ_ϵ^2 . In particolare, bisogna stimare i coefficienti ψ_k . La funzione di auto-correlazione di un processo stocastico, ad esempio $u(t)$, è data da:

$$R_u(\tau) = E[u(t)u(t + \tau)] \quad (7.11)$$

che nel caso di un processo ergodico diviene:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t + \tau) d\tau \quad (7.12)$$

I coefficienti ψ_k si ottengono risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_u(0) = \sum_{k=1}^p \psi_k R_u(k\Delta t) + \sigma_\epsilon^2 \\ R_u(-s\Delta t) = \sum_{k=1}^p \psi_k R_u[(k-s)\Delta t] \end{array} \right. \quad (7.13)$$

con $s = 1 \dots p$.

Il rapporto di convergenza del metodo è proporzionale al numero dei parametri da stimare. Tuttavia, non si conosce a priori l'ordine del filtro, p , che pertanto dovrà essere stimato iterativamente, ossia fino a quando non vi sia una buona corrispondenza tra lo spettro effettivo e quello simulato.

7.2 Simulazione di processi multivariati

Generalmente il campo di vento è un processo stocastico multidimensionale e multi-correlato nello spazio e nel tempo. Si procede, pertanto, all'estensione dei precedenti metodi al caso più generale e d'interesse per le strutture.

7.2.1 Weighted Amplitude Wave Superposition (W.A.W.S.)

Un vettore di velocità eoliche fluttuanti, definite nello spazio:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

può essere simulato mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{H}(n_k) \cos(2\pi\tilde{\mathbf{n}}_k t + \Phi_k) \quad (7.15)$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{n}}_k = \mathbf{n}_k + \delta\mathbf{n}_k \quad (7.16)$$

sono i vettori delle frequenze centrali degli N intervalli di frequenza, con $|\delta\mathbf{n}_k| \ll \Delta\mathbf{n}/2$;

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_{(1),k} \\ \vdots \\ \Phi_{(M),k} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

è il vettore delle fasi random coprese tra 0 e π .

Considerando, ad esempio, $M = 2$, si ha in forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} H_{11}(n_k) & 0 & 0 \\ H_{21}(n_k) & H_{22}(n_k) & 0 \\ H_{31}(n_k) & H_{32}(n_k) & H_{32}(n_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\pi\tilde{n}_{(1),k}t + \Phi_{(1),k}) \\ \cos(2\pi\tilde{n}_{(2),k}t + \Phi_{(2),k}) \\ \cos(2\pi\tilde{n}_{(3),k}t + \Phi_{(3),k}) \end{bmatrix} \right\}$$

$$(7.18)$$

In maniera analoga a quanto visto per i singoli processi, si può dimostrare che:

$$\mathbf{H}(n_k)\mathbf{H}(n_k)^T = 2\Delta n\mathbf{S}_u(n_k) \quad (7.19)$$

ossia che la matrice $\mathbf{H}(n_k)$ è il fattore di Cholesky di $2\Delta n\mathbf{S}_u(n_k)$ dove $\mathbf{S}_u(n_k)$ è la matrice di densità spettrale della turbolenza atmosferica, intesa ora come processo stocastico multivariato nello spazio e nel tempo.

Per tenere in conto la correlazione del vento è possibile simulare l'*i-esima* componente fluttuante del vento nel seguente modo:

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^i H_{ij}(n_k) \cos [2\pi\tilde{n}_{(j),k}(t + \tau_{ij}) + \Phi_{(j),k}] \quad (7.20)$$

dove:

$$\tau_{ij} = 2 \frac{z_i - z_j}{[U(z_i) + U(z_j)]} \quad (7.21)$$

Pertanto, calcolato il profilo di vento per il sito in questione, si sceglie la durata della storia di vento, T , il passo di campionamento, Δt , la frequenza massima dello spettro, il numero di intervalli di frequenza, N , e si calcola la matrice delle densità spettrali $\mathbf{S}_u(n_k)$. Successivamente, si opera la fattorizzazione di Cholesky di $2\Delta n\mathbf{S}_u(n_k)$, si generano i vettori $\tilde{\mathbf{n}}_k$ e Φ_k e si calcolano le storie di vento associate alle k -esime frequenze $\tilde{\mathbf{n}}_k$. A questo punto si itera per tutte le N bande di frequenza scelte, e di volta in volta si sommano le componenti armoniche ottenute.

7.2.2 Filtri Autoregressivi

Supponiamo di voler simulare M processi cross-correlati (come la velocità fluttuante del vento a diverse quote), allora scriveremo che l'*i-esima* componente fluttuante $u_i(t)$ è data da:

$$u_i(t) = \left[\sum_{k=1}^p \sum_{j=i}^M \psi_{ij}(k) u_j(t - k\Delta t) \right] + N_i(t) \quad (7.22)$$

dove, al solito, p è l'ordine del filtro, e $\mathbf{N}(t) = [N_i(t) \dots N_M(t)]$ è il vettore composto da M rumori cui corrisponde la matrice di cross-correlazione $\mathbf{R}_{(N)}(\tau)$.

Per determinare i coefficienti del filtro, ψ_{ij} è necessario risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{im}(l\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^M \psi_{ij}(k) R_{jm} [(k-l)\Delta t] \\ R_{im}(0) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^M \psi_{ij}(k) R_{jm} [k\Delta t] + R_{(N),im}(0) \end{array} \right. \quad (7.23)$$

dove $l = 1 \dots p$.

Per stimare $N_i(t)$ si opera la fattorizzazione di Cholesky della matrice di cross-correlazione di $N_i(t)$ e $N_m(t)$, $R_{(N),im}(0)$, ottenendo le matrici \mathbf{L} detta fattore di Cholesky. Si può dimostrare che

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^i L_{ij} \epsilon_j(t) \quad (7.24)$$

dove $\epsilon_j(t)$ sono dei rumori bianchi a media nulla e varianza unitaria, completamente scorrelati tra loro.

Pertanto, calcolato il profilo di vento per il sito in questione, si sceglie la durata della storia di vento, T , il passo di campionamento, Δt , e si calcolano i coefficienti del filtro ψ_{ij} dalla prima equazione del sistema 7.23. Successivamente, dalla seconda equazione del sistema 7.23 si calcola $R_{(N),im}(0)$, se ne opera la fattorizzazione di Cholesky, trovando \mathbf{L} . Per ogni intervallo di tempo t_i , si generano i processi $\epsilon_j(t_i)$, si calcolano dunque i processi $\mathbf{N}(t_i)$, ed infine il valore di $\mathbf{u}(t_i)$. Il processo si ripete per ciascun istante t_i .

8

Dinamica delle strutture

8.1 Sistemi ad un grado di libertà

Le strutture possono essere assimilate a sistemi ad n gradi di libertà, riconducibili a n sistemi ad un solo grado di libertà. Pertanto, per affrontare lo studio delle strutture complesse, conviene introdurre la dinamica dell'oscillatore elementare.

8.1.1 Oscillazioni libere

L'oscillatore semplice è caratterizzato da una massa m collegata ad una molla di rigidezza k che esercita su di essa una forza di richiamo elastico proporzionale allo spostamento della massa stessa (Fig. 8.1).

Il moto del sistema è descritto dalla seguente equazione differenziale ordinaria

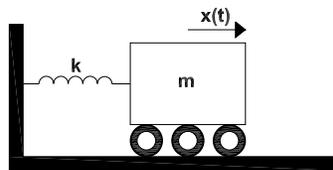


Figura 8.1: Oscillatore semplice

omogenea di secondo ordine, lineare a coefficienti costanti:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8.1)$$

L'equazione 8.1 può essere riscritta nella forma:

$$m + \omega_o^2 x = 0 \quad (8.2)$$

previa introduzione della *pulsazione naturale* ω_o :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.3)$$

La soluzione dell'equazione di moto (Eq.ni 8.1 e 8.2) fornisce la risposta dell'oscillatore semplice, e può essere scritta come segue:

$$x(t) = C \sin(\omega_o t + \phi) \quad (8.4)$$

dove le costanti C e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali. La soluzione dell'oscillatore (Eq. 8.4) risalta il fatto che il moto dell'oscillatore è di tipo *armonico* caratterizzato da una pulsazione pari alla pulsazione naturale del sistema, ampiezza C , e *fase* ϕ .

Date le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_o \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_o \end{cases} \quad (8.5)$$

si possono facilmente trovare le costanti d'integrazione:

$$\begin{cases} C = \sqrt{x_o^2 + \frac{\dot{x}_o^2}{\omega_o^2}} \\ \tan(\phi) = \omega_o \frac{x_o}{\dot{x}_o} \end{cases} \quad (8.6)$$

Nella pratica risultano essere interessanti i casi in cui $x_o(0) = 0$ oppure $\dot{x}_o(0) = 0$:

- la massa m inizialmente ferma e spostata dalla sua configurazione a riposo della quantità x_o :

$$\begin{cases} x(0) = x_o \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_o \cos(\omega_o t) \quad (8.7)$$

- la massa m è spostata dalla sua configurazione a riposo da un impulso pari a $m\dot{x}_o$:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_o \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \quad (8.8)$$

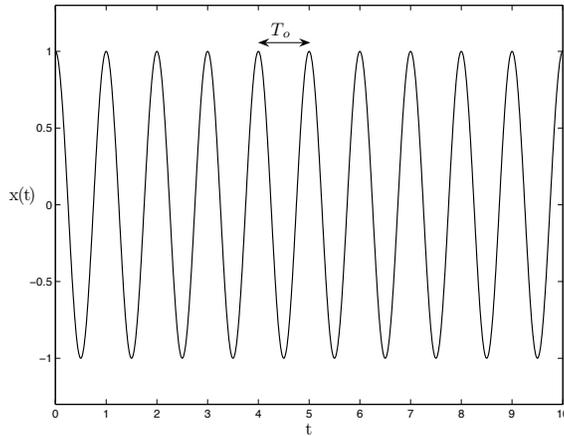


Figura 8.2: Oscillazioni libere

Le oscillazioni *libere*¹ sono oscillazioni armoniche, pertanto sono caratterizzate da un *periodo proprio*, T_o (Fig. 8.2):

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.9)$$

ossia la risposta si ripete per multipli del periodo proprio di oscillazione. L'inverso del periodo proprio prende il nome di *frequenza propria* del sistema e sarà dunque data dalla seguente relazione:

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.10)$$

8.1.2 Oscillazioni forzate

Se l'oscillatore di Fig. 8.1 è soggetto ad una forzante armonica, $F(t) = F \sin(\omega t)$, l'equazione di moto assume la forma:

$$m + \omega_o^2 x = \frac{F}{m} \sin(\omega t) \quad (8.11)$$

la cui soluzione è data dalla sovrapposizione della soluzione *omogenea* (Eq. 8.4) e di quella *particolare*. Quest'ultima si ottiene a partire dalla soluzione di tentativo

$$x_p(t) = A \sin(\omega t) \quad (8.12)$$

¹Si noti che l'oscillatore non è soggetto ad alcuna forza esterna, pertanto si parla di oscillazioni libere.

Sostituendo tale equazione nell'equazione di moto (Eq. 8.11) è facile trovare l'ampiezza A :

$$A = \frac{F}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} = \frac{F}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right]} \quad (8.13)$$

Pertanto è possibile accoppiare le due soluzioni per ottenere la risposta di un oscillatore semplice forzato:

$$x(t) = C \sin(\omega_o t + \phi) + \frac{F}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2} \sin(\omega t) \quad (8.14)$$

dove le costanti C e ϕ si calcolano a partire dalle condizioni iniziali.

In definitiva, la risposta è data dalla somma di due funzioni armoniche di cui una pulsa alla frequenza propria del sistema e l'altra alla frequenza della forzante $F(t)$. Si può facilmente notare che se le due frequenze in questione sono uguali, la risposta dell'oscillatore risulta infinita. Tale situazione è nota come condizione di *risonanza*.

8.1.3 Oscillazioni libere smorzate

Nel caso in cui l'oscillatore è munito di uno smorzatore (Fig. 8.3), la massa sarà soggetta ad un'ulteriore forza di richiamo. Tale forza è di natura *viscosa* ed è proporzionale alla velocità della massa stessa. L'equazione di moto sarà pertanto descritta

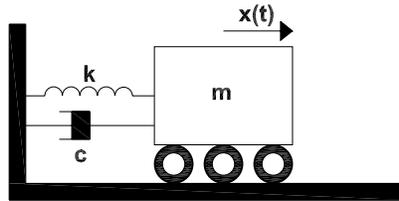


Figura 8.3: Oscillatore smorzato

dalla seguente equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (8.15)$$

che, analogamente a quanto visto per l'oscillatore non smorzato, può essere riscritta come segue:

$$\ddot{x} + 2\nu\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = 0 \quad (8.16)$$

con

$$2\nu\omega_o = \frac{c}{m} \quad (8.17)$$

relazione che permette di definire il *fattore di smorzamento*, ν :

$$\nu = \frac{c}{2m\omega_o} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (8.18)$$

Le radici dell'equazione caratteristica associata all'equazione di moto (Eq. 8.15) sono le seguenti:

$$\lambda_{1,2} = \left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 1}\right) \omega_o \quad (8.19)$$

Escludendo il caso in cui $\nu > 1$ per il quale la radici sono reali ed il moto è *aperiodico*, prendiamo in esame gli altri casi:

- $\nu = 1$: le radici sono coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_o$, e la soluzione risulta essere:

$$x(t) = A_1 e^{-\omega_o t} + A_2 t e^{-\omega_o t} \quad (8.20)$$

In questo caso lo smorzamento del sistema corrisponde a quello critico pari a $2\sqrt{km}$

- $\nu < 1$: Le radici sono complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2} = -\nu\omega_o \mp i\omega_o\sqrt{1-\nu^2} \quad (8.21)$$

e l'integrale dell'equazione di moto lo si può scrivere come:

$$x(t) = C e^{-\nu\omega_o t} \cos\left(\omega_o\sqrt{1-\nu^2}t + \phi\right) \quad (8.22)$$

Il caso $\nu < 1$ è quello più frequente per le strutture, pertanto conviene studiarlo in dettaglio. Imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_o \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_o}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu\omega_o t} \cos\left(\omega_o\sqrt{1-\nu^2}t + \phi\right) \\ \tan \phi &= -\frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

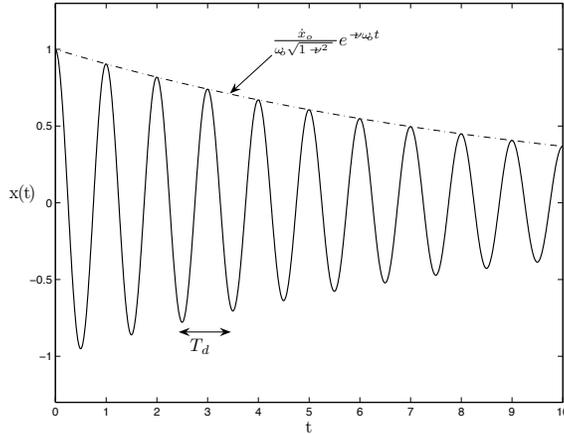


Figura 8.4: Oscillazioni smorzate

Se invece si pone:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_o \end{cases} \quad (8.25)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\dot{x}_o}{\omega_o \sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu \omega_o t} \sin\left(\omega_o \sqrt{1-\nu^2} t\right) \\ \phi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Come si vede dalla Fig. 8.4, se non vi è carico applicato le oscillazioni decadono finché la massa non torna nella sua situazione iniziale di riposo. Il periodo di tempo che intercorre tra due massimi relativi successivi è pari a:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_o \sqrt{1-\nu^2}} \quad (8.27)$$

Inoltre il rapporto tra due massimi relativi in Fig. 8.4 è pari a:

$$r = \exp\left(\frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\right) \quad (8.28)$$

Il logaritmo di questo rapporto si definisce *decremento logaritmico*, δ :

$$\delta = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (8.29)$$

Se lo smorzamento è piccolo, $\nu \ll 1$, si ha:

$$\delta \approx 2\pi\nu \quad (8.30)$$

Infine se δ è piccolo si ha:

$$e^\delta = 1 + \delta = \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow \delta = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} \quad (8.31)$$

8.1.4 Oscillazioni forzate con smorzamento

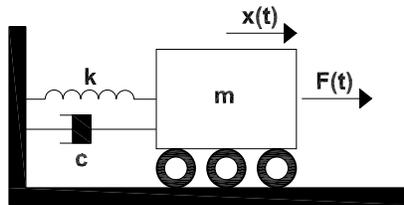


Figura 8.5: Oscillatore forzato con smorzamento

Se applichiamo all'oscillatore smorzato una forzante armonica (Fig. 8.5), avremo che il sistema sarà descritto dalla seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\ddot{x} + 2\nu\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = \frac{F}{m} \sin(\omega t) \quad (8.32)$$

All'integrale generale dell'omogenea (Eq. 8.26) andrà aggiunta la soluzione particolare che scriveremo:

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \psi) \quad (8.33)$$

Sostituendo tale soluzione nell'equazione di moto si ottiene:

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\nu^2\alpha^2}} \frac{F}{k} \sin(\omega t - \psi) \quad (8.34)$$

$$\tan(\psi) = \frac{2\nu\alpha}{1 - \alpha^2}$$

dove si è posto $\alpha = \frac{\omega}{\omega_o}$.

Si può osservare dalla prima delle Eq.ni 8.36 che il fattore F/k è il valore statico dell'ampiezza, ossia il valore che si avrebbe se il fenomeno fosse statico, mentre la quantità

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\nu^2\alpha^2}} \quad (8.35)$$

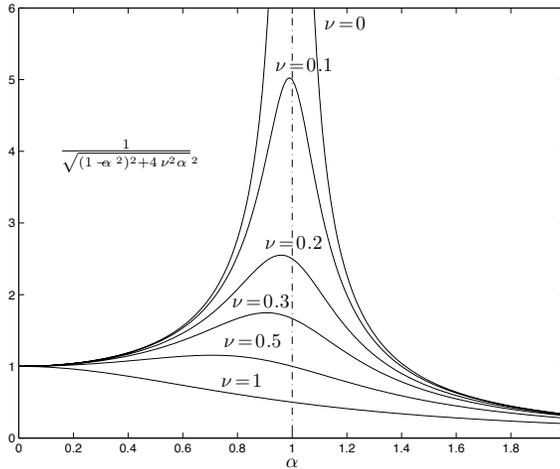


Figura 8.6: Fattore di amplificazione

assume il significato di *fattore di amplificazione*, mentre ψ rappresenta lo sfasamento tra la risposta e la forzante.

Per $\alpha = 1$ si ha la risonanza ossia la massima risposta dell'oscillatore. In corrispondenza della risonanza, se $\nu = 0$ l'amplificazione tende all'infinito, mentre per valori diversi la risposta tende a diminuire all'aumentare dello smorzamento (Fig. 8.6). L'andamento della fase, ψ , è riportato in Fig. 8.7.

In generale potremmo quindi scrivere la risposta totale del sistema come segue:

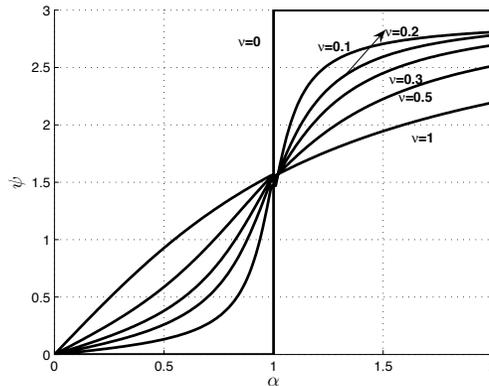
$$\begin{aligned}
 x(t) &= C e^{-\nu\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\nu^2} t + \phi) + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\nu^2\alpha^2}} \frac{F}{k} \sin(\omega t - \psi) \\
 \tan(\psi) &= \frac{2\nu\alpha}{1-\alpha^2}
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

dove le costanti C e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali.

Poiché l'oscillatore è smorzato, a parte un transitorio iniziale, le oscillazioni libere tendono a scomparire lasciando spazio alle sole oscillazioni forzate. Quando si perviene a tale situazione il sistema ha raggiunto la condizione di *regime*.

8.1.5 Risposta ad una forzante qualsiasi

Finora abbiamo trattato le forzanti armoniche, tuttavia la soluzione del problema dinamico può essere esteso al caso più generale di forzante che varia secondo una legge qualsiasi.

Figura 8.7: Andamento della fase ψ

A tal proposito è utile introdurre la risposta ad una forza F applicata all'oscillatore all'istante t_0 per la durata δt . A tale forza corrisponde l'impulso elementare $dI = F\delta t$, mentre la risposta all'impulso elementare risulta essere:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_o\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu\omega_o t} \sin\left(\omega_o\sqrt{1-\nu^2}t\right) \quad (8.37)$$

La risposta ad una forzante qualsiasi può essere vista come la somma delle risposte corrispondente ai singoli impulsi elementari in cui si ipotizza di suddividere la forzante stessa. La sovrapposizione degli effetti è garantita dall'integrale di Duhamel:

$$x_p(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.38)$$

Pertanto la soluzione complessiva sarà:

$$x(t) = Ce^{-\nu\omega_o t} \cos\left(\omega_o\sqrt{1-\nu^2}t + \phi\right) + \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.39)$$

8.2 Sistemi a più gradi di libertà

Le strutture reali sono sistemi aventi infiniti gradi di libertà, cosicché lo studio rigoroso del loro comportamento dinamico richiederebbe una formulazione al *continuo*. Tuttavia, la teoria degli *elementi finiti* permette di discretizzare la struttura complessa in un sistema caratterizzato da un numero finito di gradi di libertà. La trattazione di tali sistemi è ulteriormente semplificata riconducendo il calcolo della risposta dinamica alla sovrapposizione della risposta di singoli oscillatori elementari smorzati e

forzati. In definitiva, un sistema lineare a n gradi di libertà può essere scomposto in n sistemi ad un solo grado di libertà, per i quali vale la trattazione svolta finora. La suddetta scomposizione è nota come *decomposizione modale* e si basa sul calcolo dei *modi propri di vibrare*.

8.2.1 Oscillazioni libere non smorzate

Le oscillazioni libere di una struttura non smorzata, ricondotta ad un sistema a n gradi di libertà, si determinano risolvendo un sistema di equazioni differenziali ordinarie che potremo scrivere in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0 \quad (8.40)$$

dove \mathbf{M} e \mathbf{K} sono rispettivamente la matrice delle masse e la matrice di rigidità del sistema:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

mentre $\ddot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{U} sono rispettivamente i vettori delle accelerazioni e degli spostamenti della struttura:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (8.42)$$

Se la struttura non è labile si dimostra che \mathbf{M} e \mathbf{K} sono definite positive, pertanto la soluzione del problema la si può scrivere, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come la somma delle risposte di n sistemi ad un grado di libertà:

$$\mathbf{U}(t) = \Phi \mathbf{Q}(t) = \sum_{j=1}^n [C_j \cos(\omega_j t + \psi_j)] \phi_j \quad (8.43)$$

le costanti C_j e ψ_j dipendono dalle condizioni iniziali, mentre $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ è la matrice delle *forme modali* o *modi naturali di vibrare* del sistema, ed è una matrice reale. Il vettore $\mathbf{Q}(t) = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ è il vettore delle singole risposte associate al j -esimo oscillatore elementare: analogamente a quanto visto precedentemente (§ 8.1) avremo:

$$q_j = C_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \quad (8.44)$$

Per la stessa analogia andremo a definire la j -esima pulsazione propria, ω_j , il j -esimo periodo proprio, T_j , e la j -esima frequenza propria, f_j , della struttura:

$$\omega_j = 2\pi f_j \qquad T_j = \frac{2\pi}{\omega_j} \qquad f_j = \frac{1}{T_j} \qquad (8.45)$$

Le quantità ω_j e ϕ_j si determinano trovando le soluzioni non banali del sistema di equazioni differenziali che governa il moto (Eq. 8.40), proiettato nello spazio delle *coordinate modali*. In particolare il problema iniziale si riconduce al seguente: ricordando le relazioni 8.40 e 8.43 si ha:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{Q} + \mathbf{K}\Phi Q = 0 \qquad (8.46)$$

Considerando una soluzione del tipo $q_j = C_j \cos(\omega_j t + \psi_j)$ è facile dimostrare che il problema diviene:

$$-\omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j q_j + \mathbf{K}\phi_j q_j = 0 \qquad (8.47)$$

che può essere riscritta in forma compatta:

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi_j q_j = 0 \qquad (8.48)$$

Escludendo le soluzioni banali del tipo $q_j = 0$, vogliamo trovare le quantità ω_j e ϕ_j tali per cui:

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi_j = 0 \qquad (8.49)$$

Il problema si risolve mediante la teoria spettrale. In particolare, siamo alla ricerca delle radici del polinomio caratteristico associato al sistema. Tale polinomio è dato dalla seguente relazione:

$$\text{Det} [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] = 0 \qquad (8.50)$$

dove le radici λ_j assumono il significato di *autovalori*

Otteniamo dunque n valori di λ tali che $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Le pulsazioni proprie del sistema saranno date dalla seguente uguaglianza:

$$\omega_j^2 = \lambda_j \qquad (8.51)$$

Le forme modali o *autovettori*, ϕ_j , si trovano applicando le equazioni definite nella 8.49. Fissato j si ha un sistema di equazioni lineare omogeneo, la cui soluzioni ϕ_j , è definita a meno di una costante di proporzionalità. Per eliminare tale indeterminazione, basta porre una delle sue componenti pari all'unità, ad esempio la prima.

Si può dimostrare che gli autovettori sono vettori *ortogonali* rispetto alla matrice delle masse e alla matrice di rigidezza della struttura, ossia sono tali da diagonalizzare tali matrici. Poiché ciascun autovettore viene determinato a meno di costante

arbitraria, generalmente si opera una *normalizzazione* in modo tale che la matrice degli autovettori, Φ , sia anche *ortonormale* rispetto alla matrice delle masse:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = I \quad (8.52)$$

dove I è la matrice d'identità. Inoltre, in questo caso si ha che:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (8.53)$$

avendo posto:

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

Le proprietà di ortogonalità e ortonormalità della matrice degli autoettori, Φ , permettono di semplificare il calcolo della risposta dinamica di una struttura complessa. Infatti, premoltiplicando tutti i termini della 8.46 per Φ^T si ottiene:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{Q} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi Q = 0 \quad (8.55)$$

da cui per quanto detto si ottiene:

$$\mathbf{I} \ddot{Q} + \Omega^2 Q = 0 \quad (8.56)$$

che corrisponde ad n equazioni differenziali lineari omogenee linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \end{cases} \quad (8.57)$$

ossia la struttura viene scomposta in n oscillatori elementari le cui risposte sono date, come visto in precedenza, dalle seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \\ q_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ \vdots \\ q_n = C_n \cos(\omega_n t + \psi_n) \end{cases} \quad (8.58)$$

con le costanti C_j e ψ_j da determinare in base alle condizioni iniziali. La soluzione infine sarà data dalla sovrapposizione degli effetti:

$$U(t) = \sum_{j=1}^n [C_j \cos(\omega_j t + \psi_j)] \phi_j \quad (8.59)$$

8.3 Oscillazioni libere smorzate

Prima di entrare nella trattazione analitica delle oscillazioni libere smorzate conviene sottolineare che vi è un grande numero di incertezze nella valutazione dello smorzamento delle strutture reali. Le cause principali di queste incertezze sono di varia natura: l'attrito dei giunti, l'isteresi del materiale, la presenza di elementi non strutturali interagenti con la struttura, le resistenze del mezzo. Generalmente non è possibile tenere in conto tutte queste cause, peraltro non sempre facili da individuare, ma si preferisce valutarne l'effetto complessivo mediante indicazioni di natura sperimentale. In quest'ottica risultano giustificate alcune semplificazioni che possono essere sintetizzate in due ipotesi fondamentali:

- Le forze di richiamo viscoso, *resistenze viscosse*, sono proporzionali alla velocità;
- La matrice di smorzamento, \mathbf{C} , è esprimibile come una combinazione lineare della matrice delle masse e delle rigidità.

Quest'ultima ipotesi può essere riscritta con l'ausilio di due costanti, α e β :

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (8.60)$$

La 8.60 costituisce una condizione sufficiente affinché la matrice di dissipazione sia diagonalizzabile.

L'importanza della diagonalizzazione \mathbf{C} è evidente. La dinamica di una struttura complessa smorzata è descritta in forma matriciale nel seguente modo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0 \quad (8.61)$$

introducendo nella 8.61 la trasformazione $\mathbf{U}(t) = \Phi\mathbf{Q}(t)$ e premoltiplicando tutti i termini per Φ^T si ottiene:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{Q}} + \Omega^2\mathbf{Q} = 0 \quad (8.62)$$

dove

$$\mathbf{N} = \Phi^T\mathbf{C}\Phi = \begin{pmatrix} 2\nu_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\nu_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu_n\omega_n \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

è la matrice di dissipazione disaccoppiata.

Le equazioni che descrivono il moto (Eq. 8.62) risultano dunque essere linear-

mente indipendenti:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\nu_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + 2\nu_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n + 2\nu_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = 0 \end{cases} \quad (8.64)$$

ossia la struttura viene scomposta in n oscillatori smorzati le cui risposte sono date, come visto in precedenza, dalle seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} q_1(t) = C_1 e^{-\nu_1\omega_1 t} \cos\left(\omega_1\sqrt{1-\nu_1^2}t + \psi_1\right) \\ q_2(t) = C_2 e^{-\nu_2\omega_2 t} \cos\left(\omega_2\sqrt{1-\nu_2^2}t + \psi_2\right) \\ \vdots \\ q_n(t) = C_n e^{-\nu_n\omega_n t} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\nu_n^2}t + \psi_n\right) \end{cases} \quad (8.65)$$

con le costanti C_j e ψ_j da determinare in base alle condizioni iniziali.

La soluzione sarà data dal principio di sovrapposizione degli effetti:

$$U(t) = \sum_{j=1}^n \left[C_j e^{-\nu_j\omega_j t} \cos\left(\omega_j\sqrt{1-\nu_j^2}t + \psi_j\right) \right] \phi_j \quad (8.66)$$

8.3.1 Oscillazioni forzate con smorzamento

Il problema delle oscillazioni forzate è descritto dalle seguenti equazioni date in forma matriciale:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (8.67)$$

operando la decomposizione modale si ha:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{Q} = \mathbf{P}(t) \quad (8.68)$$

dove

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) \quad (8.69)$$

è la proiezione del carico sulle forme modali. Nella precedente formulazione si intende che

$$\mathbf{F}(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)] \quad \mathbf{P}(t) = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)] \quad (8.70)$$

La struttura viene quindi scomposta in n oscillatori smorzati e forzati:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\nu_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1 = p_1(t) \\ \ddot{q}_2 + 2\nu_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = p_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n + 2\nu_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = p_n(t) \end{cases} \quad (8.71)$$

La soluzione dipende dal tipo di forzante.

8.3.2 Risposta a forzanti qualsiasi

Si procede al calcolo della risposta per una forzante multidimensionale $F(t)$ di tipo qualsiasi, essendo tale soluzione di validità generale.

Le equazioni scritte nella 8.61 sono linearmente indipendenti, in quanto disaccoppiate. La risposta del j -esimo oscillatore sarà data dalla sovrapposizione della j -esima soluzione *omogenea* e della j -esima soluzione *particolare*. La soluzione *omogenea* è data dalle equazioni 8.65, mentre, analogamente a quanto visto nel paragrafo 8.1.5, la soluzione *particolare* sarà espressa mediante l'integrale di convoluzione, o di Duhamel.

$$\begin{cases} q_1(t) = C_1 e^{-\nu_1\omega_1 t} \cos\left(\omega_1\sqrt{1-\nu_1^2}t + \psi_1\right) + \int_0^t p_1(\tau)h_1(t-\tau)d\tau \\ q_2(t) = C_2 e^{-\nu_2\omega_2 t} \cos\left(\omega_2\sqrt{1-\nu_2^2}t + \psi_2\right) + \int_0^t p_2(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\ \vdots \\ q_n(t) = C_n e^{-\nu_n\omega_n t} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\nu_n^2}t + \psi_n\right) + \int_0^t p_n(\tau)h_n(t-\tau)d\tau \end{cases} \quad (8.72)$$

dove:

$$h_j(t) = \frac{1}{\omega_j\sqrt{1-\nu_j^2}} e^{-\nu_j\omega_j t} \sin\left(\omega_j\sqrt{1-\nu_j^2}t\right) \quad (8.73)$$

è la risposta ad un impulso unitario del j -esimo oscillatore semplice. Infine, la soluzione sarà data dalla sovrapposizione degli effetti:

$$U(t) = \sum_{j=1}^n \left[C_j e^{-\nu_j\omega_j t} \cos\left(\omega_j\sqrt{1-\nu_j^2}t + \psi_j\right) + \int_0^t p_j(\tau)h_j(t-\tau)d\tau \right] \phi_j \quad (8.74)$$

ricordando che nella condizione di *regime* l'effetto delle soluzioni omogenee svanisce in quanto la struttura è smorzata.

9

Dinamica aleatoria delle strutture

Nell'ambito della dinamica deterministica di un oscillatore ad un grado di libertà, si assume che ciascun parametro definito nell'equazione di moto è deterministico. In tali condizioni, la risposta è unicamente determinata una volta imposte le condizioni iniziali. Se almeno uno di questi parametri è aleatorio, la risposta sarà a sua volta aleatoria. Ciò significa che la risposta dovrà essere necessariamente caratterizzata statisticamente.

In questa trattazione si assume che il carico sia un processo stocastico, dal momento che generalmente il vento può essere inteso come un processo stocastico multidimensionale e multivariato.

9.1 Risposta aleatoria dell'oscillatore smorzato

Nel Cap. 8 abbiamo introdotto l'equazione di moto dell'oscillatore smorzato e forzato:

$$\ddot{x} + 2\nu\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = \frac{1}{m}f(t) \quad (9.1)$$

In questo caso $f(t)$ è un processo stocastico, applicato all'oscillatore nell'istante $t = 0$.

La soluzione del problema (cfr. Eq. 8.39) è data dalla seguente relazione:

$$x(t) = Ce^{-\nu\omega_o t} \cos(\omega_o\sqrt{1-\nu^2}t + \phi) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (9.2)$$

dove il primo termine, soluzione *omogenea*, dipende solo dalle condizioni iniziali e quindi è deterministico. Poiché vogliamo caratterizzare la risposta aleatoria, possiamo tralasciare la parte deterministica. Prendiamo così in considerazione la seguente soluzione:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (9.3)$$

dove la risposta ad un impulso, $h(t)$, è data da:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_o\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu\omega_o t} \sin \omega_o \sqrt{1-\nu^2} t \quad (9.4)$$

Dalla teoria dei processi stocastici sappiamo che per poter caratterizzare la risposta aleatoria dobbiamo calcolare i suoi *momenti* statistici. L'*n-esimo* momento è dato da:

$$\begin{aligned} E[x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n)] &= \\ &= E\left[\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f(\tau_1)h(t_1-\tau_1)\dots f(\tau_n)h(t_n-\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n\right] = \\ &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} E[f(\tau_1)\dots f(\tau_n)] h(t_1-\tau_1)\dots h(t_n-\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

ottenuto ricordando la *linearità* del operatore *valore atteso*, $E[\dots]$. Analogamente si può scrivere l'espressione dell'*n-esimo cumulante*¹

$$\begin{aligned} \kappa_n[x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n)] &= \\ &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} \kappa_n[f(\tau_1)\dots f(\tau_n)] h(t_1-\tau_1)\dots h(t_n-\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n \end{aligned} \quad (9.6)$$

Un caso particolare è quello di forzante Gaussiana che produce una risposta Gaussiana. In questo caso i momenti di ordine superiore al primo sono nulli, mentre i primi due assumono rispettivamente il significato di *funzione di media* e *funzione di*

¹Si ricorda che il primo cumulante è uguale al primo momento, mentre il secondo e terzo cumulante sono coincidenti con i corrispondenti momenti centrali, ossia:

$$\begin{aligned} \kappa_1[x(t)] &= E[x(t)] = \mu_x(t) \\ \kappa_2[x(t_1)x(t_2)] &= E\{[x(t_1) - \mu_x(t_1)][x(t_2) - \mu_x(t_2)]\} = R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2) \\ \kappa_3[x(t_1)x(t_2)x(t_3)] &= E\{[x(t_1) - \mu_x(t_1)][x(t_2) - \mu_x(t_2)][x(t_3) - \mu_x(t_3)]\} \end{aligned}$$

mentre i cumulanti di ordine superiore non sono facilmente calcolabili.

covarianza:

$$\begin{aligned}
 E[x(t)] &= \mu_x(t) = \int_0^t E[f(\tau)]h(t-\tau)d\tau \\
 \kappa_{xx}(t_1, t_2) &= R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2) = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \kappa_{ff}(\tau_1, \tau_2)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

dove R_{xx} è la funzione di *autocorrelazione* della risposta $x(t)$.

9.2 Forzanti aleatorie debolmente stazionarie

In diversi problemi di ordine pratico, la forzante può essere assunta *debolmente stazionaria*, condizione verificata quando:

$$E[f(t)] = \mu_f(t) = \mu_f \quad \forall t \tag{9.8}$$

$$E[f^2(t)] = \text{cost.} \quad \forall t \tag{9.9}$$

Si può dimostrare che quando il processo è debolmente stazionario la funzione di autocorrelazione, R_{ff} , non dipende dai singoli istanti t_1 e t_2 ma dalla loro differenza, $t_1 - t_2 = \tau$. Pertanto:

$$E[f(t_1)f(t_2)] = R_{ff}(t_1 - t_2) = R_{ff}(\tau) \tag{9.10}$$

con $\tau = t_1 - t_2$.

La funzione di autocorrelazione può essere calcolata anche operando la trasformata inversa di Fourier della densità spettrale di potenza della forzante, $S_{ff}(\omega)$:

$$R_{ff}(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}d\omega \tag{9.11}$$

Utilizzando questa relazione è possibile trovare la funzione di autocorrelazione della risposta:

$$\begin{aligned}
 R_{xx}(t_1, t_2) &= E[x(t_1), x(t_2)] = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[f(\tau_1)f(\tau_2)]h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{ff}(\tau)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega)e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)}h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2d\omega
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Ponendo $u = t_1 - \tau_1$ e $v = t_2 - \tau_2$ ed integrando per u e v si ottiene:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega) \mathfrak{M}(\omega, t_1) \mathfrak{M}^*(\omega, t_2) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (9.13)$$

con:

$$\mathfrak{M}(\omega, t) = \int_0^t h(u) e^{-i\omega u} du \quad (9.14)$$

La funzione $h(\cdot)$ è la risposta ad un impulso unitario, mentre $\mathfrak{M}(\omega, t)$ è una funzione complessa, pertanto $\mathfrak{M}^*(\omega, t)$ è il suo complesso coniugato. Si può osservare che la risposta ad una forzante stazionaria sembrerebbe non essere stazionaria perché questa è funzione di t_1 e t_2 piuttosto che di $t_1 - t_2$. Tuttavia tenendo presente che la funzione di risposta ad un impulso unitario è nulla per $t < 0$ è possibile cambiare l'estremo d'integrazione inferiore della 9.14 e porlo pari a $-\infty$:

$$\mathfrak{M}(\omega, t) = \int_{-\infty}^t h(u) e^{-i\omega u} du \quad (9.15)$$

se poi consideriamo la condizione di *regime* possiamo porre $t \rightarrow +\infty$, e otteniamo che la 9.15 diviene la trasformata di Fourier della funzione di risposta ad un impulso unitario, nota come *ammettenza strutturale* $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{m\omega_o^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right) + 2i\nu \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)\right]} \quad (9.16)$$

Possiamo dunque scrivere la funzione di autocorrelazione della risposta stazionaria:

$$R_{xx}(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (9.17)$$

Si può notare che la funzione a secondo membro della 9.17 è la trasformata inversa di Fourier della quantità $|H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega)$. Ciò permette dunque di trovare la densità spettrale della risposta stazionaria che per definizione è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_{xx}(t_1 - t_2)$:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t_1 - t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} d(t_1 - t_2) \quad (9.18)$$

da cui risulta infine:

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (9.19)$$

con:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2\omega_o^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]} \quad (9.20)$$

Risolto il problema dinamico, la valutazione della risposta dell'oscillatore è caratterizzata dai primi due momenti statistici, essendo la forzante debolmente stazionaria

9.2.1 Valutazione della risposta media

In base a quanto visto in precedenza, la risposta dell'oscilatore in condizione di regime è data da:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (9.21)$$

Pertanto il valore medio della risposta, μ_x , sarà dato da:

$$\begin{aligned} \mu_x = E[x(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] = \\ &= E[f(\tau)] \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)d\tau = \mu_f H(0) \end{aligned} \quad (9.22)$$

Avendo sfruttando la linearità dell'operatore valore medio, $E[\dots]$, e ricordando che $H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)d\tau$. Infine, notando che

$$H(0) = \frac{1}{m\omega_0^2} = \frac{1}{k} \quad (9.23)$$

si perviene alla ben nota relazione, di valenza generale, tra spostamenti e forze medie:

$$\mu_x = \frac{\mu_f}{k} \quad (9.24)$$

9.2.2 Valutazione dei momenti del secondo ordine

Operando la trasformata inversa della densità spettrale della risposta si ottiene la *funzione di correlazione* della risposta debolmente stazionaria:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad (9.25)$$

avendo posto $t_1 - t_2 = \tau$.

A partire da R_{xx} è possibile trovare il momento centrale del secondo ordine, ossia la *funzione di covarianza*, κ_{xx} , associata alla risposta debolmente stazionaria:

$$\kappa_{xx}(\tau) = E \{ [x(t_1) - \mu_x][x(t_2) - \mu_x] \} = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \quad (9.26)$$

ponendo $t_1 - t_2 = \tau$. Infine, ponendo $\tau = 0$ si ottiene la *varianza della risposta*:

$$\kappa_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (9.27)$$

La risposta aleatoria dell'oscilatore risulta così completamente caratterizzata.

9.3 Risposta dei sistemi a più gradi di libertà

La valutazione della risposta aleatoria di una struttura complessa può essere ricondotta allo studio di oscillatori ad un solo grado di libertà mediante la decomposizione modale (Cap. 8).

Consideriamo il problema dinamico di un sistema smorzato, a più gradi di libertà, soggetto ad una forzante aleatoria multidimensionale (§ 8.2):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (9.28)$$

Risolto il problema agli autovalori, ω_j , e agli autovettori, ϕ_j , è possibile proiettare il problema nello spazio delle coordinate modali, q_j , scrivendo la soluzione come combinazione lineare delle coordinate modali:

$$\mathbf{U}(t) = \Phi\mathbf{Q}(t) \quad (9.29)$$

Si ricorda che in generale gli autovettori costituiscono una base ortogonale, ossia sono tali da poter diagonalizzare la matrice delle masse e delle rigidezza. Inoltre, operando un'opportuna normalizzazione è possibile rendere gli autovettori anche ortonormali rispetto alla matrice delle masse, che risulta così essere pari alla matrice d'identità.

In questa trattazione, si preferisce considerare una base ortogonale, ma non ortonormale, di autovettori. Il significato sarà chiaro nel seguito.

Sostituendo la 9.29 nella 9.28 e moltiplicando entrambi i membri per Φ^T si ottiene la decomposizione modale del problema:

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathcal{C}\dot{\mathbf{Q}} + \mathcal{K}\mathbf{Q} = \mathbf{P}(t) \quad (9.30)$$

dove:

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T \mathbf{F}(t) \quad (9.31)$$

e

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varrho_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_n \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

Il problema si riconduce pertanto al calcolo di un sistema di equazioni differenziali linearmente indipendenti.

9.4 Forzanti aleatorie debolmente stazionarie

Abbiamo più volte ricordato che per caratterizzare un processo stocastico debolmente stazionario è sufficiente calcolare i primi due momenti statistici. Tuttavia, è importante ricordare che la risposta della struttura sarà stazionaria solo a regime (cfr. § 9.2), condizione che si avvererà quando l'effetto della soluzione omogenea del problema svanisce.

Consideriamo il sistema di equazioni che risolve la struttura:

$$\begin{cases} \mu_1 \ddot{q}_1 + \xi_1 \dot{q}_1 + \kappa_1 q_1 = p_1(t) \\ \mu_2 \ddot{q}_2 + \xi_2 \dot{q}_2 + \kappa_2 q_2 = p_2(t) \\ \vdots \\ \mu_n \ddot{q}_n + \xi_n \dot{q}_n + \kappa_n q_n = p_n(t) \end{cases} \quad (9.34)$$

che può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\nu_1 \omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{1}{\varrho_1} p_1(t) \\ \ddot{q}_2 + 2\nu_2 \omega_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{1}{\varrho_2} p_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n + 2\nu_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{\varrho_n} p_n(t) \end{cases} \quad (9.35)$$

trascurando la soluzione omogenea, avremo che la j -esima risposta sarà data dalla sola soluzione particolare:

$$q_j(t) = \int_0^t h_j(t - \tau) p_j(\tau) d\tau \quad (9.36)$$

dove al solito $h(t)$ è la funzione di risposta ad un impulso unitario:

$$h_j(t) = \frac{1}{\varrho_j \omega_j \sqrt{1 - \nu_j^2}} e^{-\nu_j \omega_j t} \sin\left(\omega_j \sqrt{1 - \nu_j^2} t\right) \quad (9.37)$$

Ricordando che $h(t)$ è per definizione nulla per $t < 0$ possiamo cambiare l'estremo inferiore di integrazione della 9.36:

$$q_j(t) = \int_{-\infty}^t h_j(t - \tau) p_j(\tau) d\tau \quad (9.38)$$

Nell'ipotesi in cui la struttura ha raggiunto la situazione di regime, possiamo cambiare anche l'estremo superiore di integrazione della 9.36, $t \rightarrow +\infty$:

$$q_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_j(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad (9.39)$$

Poiché le forzanti sono stazionarie e la struttura ha raggiunto la condizione di regime, la risposta sarà a sua volta stazionaria. In particolare, essendo le forzanti debolmente stazionarie, per caratterizzare il processo stocastico multidimensionale e multivariato della risposta, sarà necessario calcolare i suoi primi due momenti statistici. Procediamo quindi con il calcolo della funzione di cross-correlazione della risposta totale, ricordando che $u_l(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{lj} q_j(t)$ avremo:

$$\begin{aligned}
 R_{u_l u_m}(t_1 - t_2) &= E[u_l(t_1)u_m(t_2)] = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{lj} \phi_{km} E[p_j(\tau_1)p_k(\tau_2)] \times \\
 &\times h_j(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{lj} \phi_{km} R_{p_j p_k}(\tau_1 - \tau_2) h_j(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{9.40}$$

La funzione di cross-correlazione si ottiene applicando la trasformata inversa di Fourier della densità spettrale della risposta:

$$R_{p_j p_k}(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{p_j p_k}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} d\omega \tag{9.41}$$

pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned}
 R_{u_l u_m}(t_1 - t_2) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{lj} \phi_{km} h_j(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) \times \\
 &\times S_{p_j p_k}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 d\omega \tag{9.42}
 \end{aligned}$$

Ponendo $u = t_1 - \tau_1$ e $v = t_2 - \tau_2$ ed integrando per u e v avremo:

$$R_{u_l u_m}(t_1 - t_2) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{lj} \phi_{km} H_j(\omega) S_{p_j p_k}(\omega) H_k^*(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \tag{9.43}$$

che si ottiene ricordando che l'ammettenza strutturale è la trasformata di Fourier della funzione di risposta ad un impulso unitario:

$$H_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_j(u) e^{-i\omega u} du \tag{9.44}$$

Si può facilmente notare dalla relazione 9.43 che il secondo membro è, a meno delle forme modali, la trasformata inversa di Fourier di $H_j(\omega) S_{p_j p_k}(\omega) H_k^*(\omega)$.

Si può dunque calcolare la densità spettrale della risposta che per definizione è la trasformata di Fourier di $R_{u_l u_m}(t_1 - t_2)$:

$$S_{u_l u_m}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{lj} \phi_{km} H_j(\omega) S_{p_j p_k}(\omega) H_k^*(\omega) \quad (9.45)$$

Complessivamente si ottiene la matrice delle densità spettrali della risposta strutturale, $\mathbf{S}_{UU}(\omega)$:

$$\mathbf{S}_{UU}(\omega) = \Phi \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}_{PP}(\omega) \mathbf{H}^*(\omega) \Phi^T \quad (9.46)$$

dove $\mathbf{H}(\omega)$ e $\mathbf{S}_{PP}(\omega)$ sono rispettivamente la matrice delle risposte impulsive e la matrice delle densità spettrali dei carichi modali. In generale le matrici che compaiono nella 9.46 sono definite come segue:

$$\mathbf{S}_{UU}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{U_1 U_1}(\omega) & S_{U_1 U_2}(\omega) & \dots & S_{U_1 U_n}(\omega) \\ S_{U_2 U_1}(\omega) & S_{U_2 U_2}(\omega) & \dots & S_{U_2 U_n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{U_n U_1}(\omega) & S_{U_n U_2}(\omega) & \dots & S_{U_n U_n}(\omega) \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

$$\mathbf{S}_{PP}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{P_1 P_1}(\omega) & S_{P_1 P_2}(\omega) & \dots & S_{P_1 P_n}(\omega) \\ S_{P_2 P_1}(\omega) & S_{P_2 P_2}(\omega) & \dots & S_{P_2 P_n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{P_n P_1}(\omega) & S_{P_n P_2}(\omega) & \dots & S_{P_n P_n}(\omega) \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1 \omega_1^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) + 2i\nu_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_n \omega_n^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2i\nu_n \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]} \end{pmatrix} \quad (9.49)$$

Risolto il problema dinamico la valutazione della risposta strutturale si completa trovando i primi due momenti statistici della risposta².

²Le forzanti applicate sono debolmente stazionarie, pertanto soltanto i primi due momenti statistici sono stazionari.

9.4.1 Valutazione della risposta media

In base a quanto visto in precedenza, proiettando gli spostamenti strutturali nello spazio delle coordinate modali, otteniamo:

$$U(t) = \Phi Q(t) \quad (9.50)$$

Pertanto il valore medio della j -esima risposta, μ_U sarà dato da:

$$\mu_U = E[U(t)] = E[\Phi Q(t)] = \Phi E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) P(\tau) d\tau \right] \quad (9.51)$$

dove:

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h_n(t) \end{pmatrix} \quad (9.52)$$

Sfruttando la linearità della funzione valore medio, possiamo riscrivere la 9.51 come segue:

$$\begin{aligned} \mu_U &= \Phi E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) P(t) d\tau \right] = \Phi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) E[P(t)] d\tau = \\ &= \Phi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) E[\Phi^T F(t)] d\tau = \mu_F \Phi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) d\tau \right] \Phi^T = \\ &= \mu_F \Phi \mathbf{H}(0) \Phi^T \quad (9.53) \end{aligned}$$

ottenuta ricordando che $P(t) = \Phi^T F(t)$ e $\mathbf{H}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) d\tau$.

Infine, si può dimostrare che

$$\Phi \mathbf{H}(0) \Phi^T = \mathbf{K}^{-1} \quad (9.54)$$

pertanto si perviene alla ben nota relazione, di valenza generale, tra spostamenti e forze medie:

$$\mu_U = \mathbf{K}^{-1} \mu_F \quad (9.55)$$

9.4.2 Valutazione dei momenti del secondo ordine

Operando la trasformata inversa della matrice delle densità spettrali della risposta si ottiene la *matrice delle funzioni di cross-correlazione* della risposta debolmente

stazionaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{UU}(\tau) &= E[U(t_1)U(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{UU}(\omega)e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} R_{U_1U_1}(\tau) & R_{U_1U_2}(\tau) & \cdots & R_{U_1U_n}(\tau) \\ R_{U_2U_1}(\tau) & R_{U_2U_2}(\tau) & \cdots & R_{U_2U_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{U_nU_1}(\tau) & R_{U_nU_2}(\tau) & \cdots & R_{U_nU_n}(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.56)$$

avendo posto $t_1 - t_2 = \tau$.

A partire da \mathbf{R}_{UU} è possibile trovare il momento centrale del secondo ordine, ossia la *matrice delle funzioni cross-covarianza*, κ_{UU} , associata alla risposta debolmente stazionaria:

$$\kappa_{UU}(\tau) = E \{ [U(t_1) - \mu_U][U(t_2) - \mu_U] \} = \mathbf{R}_{UU}(\tau) - \mu_U \mu_U^T \quad (9.57)$$

dove si è posto $t_1 - t_2 = \tau$. Infine, ponendo $\tau = 0$ si ottiene la *matrice di covarianza della risposta*:

$$\kappa_{UU}(0) = \begin{pmatrix} \sigma_{U_1U_1}^2 & \sigma_{U_1U_2} & \cdots & \sigma_{U_1U_n} \\ \sigma_{U_2U_1} & \sigma_{U_2U_2}^2 & \cdots & \sigma_{U_2U_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{U_nU_1} & \sigma_{U_nU_2} & \cdots & \sigma_{U_nU_n}^2 \end{pmatrix} \quad (9.58)$$

che nel caso di processo stazionario coincide con $\mathbf{R}_{UU}(0)$, essendo la media stazionaria e quindi potendola considerare a parte. Tuttavia, generalmente, è preferibile considerare solo le componenti fluttuanti delle forzanti, in modo da avere dei processi stocastici a media nulla. In tal caso l'identità $\kappa_{UU}(0) = \mathbf{R}_{UU}(0)$ è rigorosa.

A questo punto la risposta aleatoria della struttura è completamente caratterizzata.

9.5 Formulazione generale della dinamica dei continui

L'equazione del moto di un continuo deformabile è data dalla seguente relazione definita nel generico punto individuato dal vettore $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$:

$$m(\mathbf{r})\ddot{U}(\mathbf{r}, t) + c(\mathbf{r})\dot{U}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{L}[U(\mathbf{r})] = F(\mathbf{r}, t) \quad (9.59)$$

con il consueto significato dei simboli fatta eccezione per il funzionale \mathcal{L} che dipende dal tipo di struttura in esame. Ad esempio, per una piastra si ha

$$\mathcal{L}[U(\mathbf{r}, t)] = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_P)} \left[\frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial y^4} \right] \quad (9.60)$$

dove h è lo spessore della piastra E è il modulo di Young, e ν_P è il coefficiente di Poisson. Per una struttura snella, che si sviluppa prevalentemente in direzione z , si ha invece:

$$\mathcal{L}[U(\mathbf{r}, t)] = \frac{\partial}{\partial z^2} \left[EI \frac{\partial U(z, t)}{\partial z^2} \right] \quad (9.61)$$

In ogni caso, con un'opportuna scelta di coordinate è possibile decomporre il problema analogamente a quanto visto per i sistemi discreti. Proiettando il problema nello spazio delle *coordinate modali*, $\phi_j(\mathbf{r})$ con $j = 1, 2, \dots, +\infty$, si ottiene:

$$U(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j(\mathbf{r}) q_j(t) \quad (9.62)$$

Le *coordinate modali* sono tali per cui lungo l'intera struttura, \mathcal{S} , si ha:

$$\int_{\mathcal{S}} \phi_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) d\mathcal{S} = 0 \quad i \neq j \quad (9.63)$$

$$\int_{\mathcal{S}} \phi_i(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) d\mathcal{S} = 0 \quad i \neq j \quad (9.64)$$

$$\int_{\mathcal{S}} \phi_i(\mathbf{r}) \mathcal{L}[\phi_j(\mathbf{r})] d\mathcal{S} = 0 \quad i \neq j \quad (9.65)$$

ed inoltre:

$$\mathcal{L}[\phi_i(\mathbf{r})] = m(\mathbf{r}) \omega_i^2 \phi_i(\mathbf{r}) \quad (9.66)$$

dove $\omega_i = 2\pi n_i$ è l'*i-esima* frequenza angolare della struttura.

Pertanto, sostituendo la 9.62 nella 9.59, pre-moltiplicando l'equazione di moto per $\phi_i(\mathbf{r})$ ed integrando su tutta la struttura \mathcal{S} , si ottiene:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_{\mathcal{S}} \phi_i(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, t) d\mathcal{S}}{\int_{\mathcal{S}} \phi_i^2(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathcal{S}} = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad i = 1, 2, \dots, +\infty \quad (9.67)$$

dove

$$p_i(t) = \int_{\mathcal{S}} \phi_i(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, t) d\mathcal{S} \quad (9.68)$$

è l'*i-esimo* carico proiettato sulla forma modale $\phi_i(\mathbf{r})$, e

$$m_i = \int_{\mathcal{S}} \phi_i^2(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathcal{S} \quad (9.69)$$

è la massa associata all'*i-esimo* modo di vibrare.

9.5.1 Risposta ad una forzante Gaussiana stazionaria

Come più volte menzionato, la risposta totale indotta da una forzante Gaussiana stazionaria è data dalla componente media e da quella fluttuante. Inoltre, nell'ipotesi di Gaussianità, i primi due momenti statistici caratterizzano completamente la risposta strutturale.

Risposta media

In questo caso la 9.59 si riduce a:

$$\mathcal{L}[U(\mathbf{r})] = \mu_F(\mathbf{r}) \quad (9.70)$$

ossia la risposta media, $\mu_U(\mathbf{r})$, si riconduce all'integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica della struttura soggetta al carico medio $\mu_F(\mathbf{r})$.

Risposta dinamica

La risposta dinamica la si può trovare nel dominio del tempo integrando le equazioni di moto (Eq. 9.67) e poi sommarle in base alla 9.62, oppure nel dominio delle frequenze. In ogni caso bisogna caratterizzare il momento statistico del secondo ordine.

Abbiamo visto che l'*i-esima* risposta associata alla struttura è data da:

$$q_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) p_i(\tau) d\tau \quad (9.71)$$

dove al solito $h_i(t)$ è la funzione di risposta ad un impulso unitario:

$$h_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_i \sqrt{1 - \nu_i^2}} e^{-\nu_i \omega_i t} \sin \left(\omega_i \sqrt{1 - \nu_i^2} t \right) \quad (9.72)$$

Ricordando che $h(t)$ è per definizione nulla per $t < 0$ possiamo cambiare l'estremo inferiore di integrazione della 9.71:

$$q_i(t) = \int_{-\infty}^t h_i(t - \tau) p_i(\tau) d\tau \quad (9.73)$$

Nell'ipotesi in cui la struttura abbia raggiunto la condizione di regime possiamo cambiare anche l'estremo superiore di integrazione della 9.71, $t \rightarrow +\infty$:

$$q_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t - \tau) p_i(\tau) d\tau \quad (9.74)$$

Analogamente a quanto visto per i sistemi discreti si può calcolare la funzione di cross-correlazione:

$$\begin{aligned}
 R_{UU}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) &= E[U(\mathbf{r}_1, t_1)U(\mathbf{r}_2, t_2)] = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)E[p_j(\tau_1)p_k(\tau_2)] \times \\
 &\times h_j(t_1 - \tau_1)h_k(t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)R_{p_jp_k}(\tau_1 - \tau_2) \times \\
 &\times h_j(t_1 - \tau_1)h_k(t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (9.75)
 \end{aligned}$$

La funzione di cross-correlazione si ottiene applicando la trasformata inversa di Fourier della densità spettrale della risposta:

$$R_{p_jp_k}(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{p_jp_k}(\omega)e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)}d\omega \quad (9.76)$$

pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned}
 R_{UU}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) &= \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)h_j(t_1 - \tau_1)h_k(t_2 - \tau_2) \times \\
 &\times S_{p_jp_k}(\omega)e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)}d\tau_1d\tau_2d\omega \quad (9.77)
 \end{aligned}$$

Ponendo $u = t_1 - \tau_1$ e $v = t_2 - \tau_2$ ed integrando per u e v avremo:

$$\begin{aligned}
 R_{UU}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) &= \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)H_j(\omega)S_{p_jp_k}(\omega)H_k^*(\omega)e^{i\omega(t_1 - t_2)}d\omega \quad (9.78)
 \end{aligned}$$

che si ottiene ricordando che l'ammettenza strutturale è la trasformata di Fourier della funzione di risposta ad un impulso unitario:

$$H_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_j(u)e^{-i\omega u}du \quad (9.79)$$

Ricordando la 9.68 si ottiene:

$$S_{p_jp_k}(\omega) = \int_S \int_S \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)S_{FF}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)dSdS = I_{jk}(\omega) \quad (9.80)$$

dove $I_{jk}(\omega)$ è il cross-spettro delle forze generalizzate proiettate sui modi j e k .

Si può facilmente notare dalla relazione 9.78 che il secondo membro è, a meno delle forme modali, la trasformata inversa di Fourier di $H_j(\omega)I_{jk}(\omega)H_k^*(\omega)$. Si può dunque calcolare la densità spettrale della risposta che, considerando le forzanti medie a parte, è per definizione la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione $R_{UU}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$:

$$S_{UU}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_j(\mathbf{r}_1)\phi_k(\mathbf{r}_2)H_j(\omega)I_{jk}(\omega)H_k^*(\omega) \quad (9.81)$$

A questo punto, la risposta risulta essere completamente caratterizzata.

10

Risposta strutturale along-wind

La turbolenza atmosferica produce un carico eolico fluttuante agente sulle strutture, a tal punto che queste iniziano a vibrare. Se le oscillazioni strutturali sono rilevanti allora la risposta media, ossia indotta dalla sola componente media della velocità del vento, è insufficiente per descrivere la risposta strutturale che di per sé evolve in campo dinamico.

Dal momento che la turbolenza è descrivibile come un processo stocastico allora anche la risposta strutturale andrà caratterizzata in termini statistici. In particolare, si assume che sia la turbolenza sia la risposta siano processi stazionari Gaussiani, caratterizzabili dunque dalla conoscenza dei primi due momenti statistici, media e funzione di correlazione. Si ricorda inoltre che grazie al gap spettrale la media è stazionaria su un intervallo di tempo compreso tra 10 minuti ed un'ora, lo stesso intervallo di tempo considerato dalle normative nella definizione del profilo di velocità media nel sito d'interesse. Pertanto, il campo di vento agente su una struttura lo si può scomporre in una componente media ed una fluttuante, dove la prima è responsabile della risposta statica e la seconda della risposta dinamica. I due effetti vengono successivamente sommati per individuare la risposta strutturale totale.

In questo capitolo si descrive la procedura di validità generale per la valutazione della risposta strutturale nella direzione del vento (*along-wind*), distinguendo tra strutture assimilabili a sistemi ad un grado di libertà e strutture complesse che invece richiedono lo studio dell'intero campo di pressione eolica e degli effetti che ne conseguono. In quest'ultimo caso la risposta sarà dunque un processo multicorrelato e multidimensionale.

Nel Cap. 9 abbiamo considerato la dinamica aleatoria dei sistemi a più gradi

di libertà. Tale trattazione è sempre valida soprattutto per strutture complesse il cui studio è condotto operando una discretizzazione mediante elementi finiti. Tuttavia in taluni casi è possibile studiare la struttura nel continuo mediante una trattazione analoga al caso discreto.

10.1 Strutture riconducibili a sistemi ad un grado di libertà

In questa sezione faremo riferimento alla trattazione di Davenport [2].

Quando la dimensione dei vortici del vento turbolento è molto maggiore della dimensione caratteristica della struttura in esame, allora quest'ultima può essere intesa come una struttura *puntiforme*. Entro certi limiti, la trattazione delle strutture puntiformi può essere estesa alle strutture con dimensioni maggiori. Ne deriva la possibilità di poter studiare tali strutture come sistemi ad un grado di libertà (Fig. 10.1).

La risposta dinamica di tali strutture può essere di tipo *quasi-statico* oppure ri-

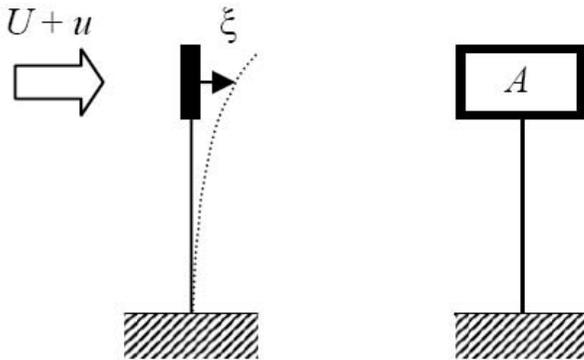


Figura 10.1: Struttura intesa come sistema ad un solo grado di libertà

sonante, in base alla rigidezza nella direzione del vento. Nel primo caso, la struttura è così rigida che le sue oscillazioni non interagiscono con la forzante applicata, mentre nel secondo caso il moto della struttura induce un'amplificazione della risposta (*risonanza*), rispetto al caso precedente.

Nelle suddette ipotesi, la struttura può essere intesa come una mensola con tutta la massa applicata sulla sua sommità ossia su un'area A , pari all'intera area investita dal vento, posta ad un'altezza h rispetto al suolo (Fig. 10.1). Per quanto visto nel Cap. 9 avremo che la risposta dinamica della struttura in Fig. 10.1 sarà data da:

$$S_{\xi\xi}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) \quad (10.1)$$

con:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2 \omega_o^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \right]} \quad (10.2)$$

con il consueto significato dei simboli, a parte la forzante eolica che viene definita come segue.

10.1.1 Definizione della forzante eolica

La forzante nella direzione del vento è espressa a partire dalla definizione della velocità del vento

$$U(\mathbf{r}, t) = [\mu_U(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{i} + v(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j} + w(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{k} \quad (10.3)$$

dove $\mu_U(\mathbf{r})$ è la velocità media e $u(\mathbf{r}, t)$, $v(\mathbf{r}, t)$ e $w(\mathbf{r}, t)$ sono le componenti fluttuanti (turbolenza), agenti lungo le tre direzioni individuate da un sistema di riferimento Cartesiano $x - y - z$, nel generico punto individuato dal raggio vettore $r = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$.

Definito con $C_p(\mathbf{r})$ il coefficiente di pressione locale per unità di superficie, nella direzione del vento avremo:

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \rho C_p(\mathbf{r}) [\mu_U(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}, t) + v(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t)]^2 \quad (10.4)$$

dove $A = 1$ è l'area investita dal vento.

Generalmente le componenti $u^2(\mathbf{r}, t)$, $v^2(\mathbf{r}, t)$ e $w^2(\mathbf{r}, t)$ sono molto più piccole della velocità media e quindi possono essere trascurate, pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \rho C_p(\mathbf{r}) [\mu_U(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}, t) + v(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t)]^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \rho C_p(\mathbf{r}) [\mu_U^2(\mathbf{r}) + 2\mu_U(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, t)] \end{aligned} \quad (10.5)$$

L'equazione 10.5 può essere scomposta in una componente media ed una fluttuante, $\mu_f(\mathbf{r})$ e $F_t(\mathbf{r}, t)$, rispettivamente:

$$\mu_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \rho \mu_U^2(\mathbf{r}) C_p(\mathbf{r}) \quad (10.6)$$

$$F_t(\mathbf{r}, t) = \rho C_p(\mathbf{r}) \mu_U(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) \quad (10.7)$$

Nel caso di una struttura riconducibile ad un sistema puntiforme possiamo ipotizzare che la forzante totale agisca su una massa posta ad una quota pari all'altezza h della struttura, pertanto:

$$\mu_f = \mu_f(h) = \frac{1}{2} \rho \int_A \mu_U^2(\mathbf{r}) C_p(\mathbf{r}) dA \quad (10.8)$$

$$F_t(h, t) = \rho \int_A C_p(\mathbf{r}) \mu_U(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) dA \quad (10.9)$$

Inoltre, ipotizzando che il coefficiente di pressione non vari nello spazio, ossia $C_p(\mathbf{r}) = C_p(h) = C_p$, si ottiene:

$$\mu_f = \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 C_D A \quad (10.10)$$

$$F_t(h, t) = \rho \mu_U C_D \int_A u(\mathbf{r}, t) dA \quad (10.11)$$

dove il coefficiente di pressione locale C_p assume il significato di coefficiente di trascinamento (*drag*), C_D , per unità di superficie, nella direzione del vento.

10.1.2 Ammettenza aerodinamica

Nel caso della struttura in esame la funzione di autocorrelazione si scrive:

$$R_{F_t F_t}(h, \tau) = (\rho \mu_U C_D)^2 \int_A \int_A E [u(\mathbf{r}_1, t) u(\mathbf{r}_2, t + \tau)] dA dA = \\ (\rho \mu_U C_D)^2 \int_A \int_A R_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) dA dA \quad (10.12)$$

Operando la trasformata di Fourier e sfruttandone la proprietà di linearità, possiamo scrivere la densità di potenza spettrale della forzante:

$$S_{F_t F_t}(h, \omega) = (\rho \mu_U C_D)^2 \int_A \int_A S_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) dA dA \quad (10.13)$$

Inoltre ricordando la 4.29, possiamo scrivere:

$$S_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S_{uu}(\mathbf{r}_1, \omega) S_{uu}(\mathbf{r}_2, \omega)} \psi_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \quad (10.14)$$

che nel caso di una struttura puntiforme si riduce ulteriormente alla seguente espressione:

$$S_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = S_{uu}(h, \omega) \psi_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \quad (10.15)$$

La 10.15 deriva dall'aver ipotizzato che la forzante turbolenta non vari nello spazio, ma solo nel tempo, pertanto considerando la forzante concentrata sulla sommità della struttura ad una certa quota h , avremo $S_{uu}(\mathbf{r}_1, \omega) = S_{uu}(\mathbf{r}_2, \omega) = S_{uu}(h, \omega)$.

Pertanto la densità spettrale della forzante eolica espressa dalla 10.13 diviene:

$$S_{F_t F_t}(h, \omega) = (\rho C_D \mu_U A)^2 S_{uu}(h, \omega) \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \psi_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) dA dA \quad (10.16)$$

che possiamo scrivere:

$$S_{F_t F_t}(h, \omega) = (\rho C_D \mu_U A)^2 S_{uu}(h, \omega) \chi^2(\omega) \quad (10.17)$$

dove

$$\chi^2(\omega) = \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \psi_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) dA dA \quad (10.18)$$

assume il significato di *ammettenza aerodinamica*. La funzione di coerenza è espressa dalla relazione 4.30 che viene riscritta di seguito:

$$\psi_{uu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = e^{-\frac{\omega}{\mu U} \sqrt{(C_y r_y)^2 + (C_z r_z)^2}} \quad (10.19)$$

dove $r_y = |y_1 - y_2|$ e $r_z = |z_1 - z_2|$ sono le distanze lungo y e z tra due punti sull'area A , mentre C_y e C_z sono due costanti che garantiscono l'appropriato decadimento della funzione.

Generalmente, l'ammettenza aerodinamica è espressa in funzione del rapporto tra la dimensione caratteristica della struttura, l , e la dimensione dei vortici, U/n , dove $n = \frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza. Fisicamente $\chi^2(\frac{nl}{U})$ può essere intesa come una misura della correlazione spaziale dei vortici: maggiore è la dimensione dei vortici rispetto a quella della struttura, maggiore è l'ammettenza aerodinamica, perché maggiore è la correlazione spaziale degli stessi vortici lungo la superficie investita dal vento; a parità di dimensione della struttura, poiché i vortici piccoli sono meno correlati nello spazio, l'ammettenza aerodinamica diminuisce (Fig. 10.2). Possiamo dunque affermare che per valori piccoli di $\frac{nl}{U}$, il carico eolico, che in generale è una forzante multidimensionale e multivariata, diviene una forzante monodimensionale, puntuale, quasi completamente correlata, e data dalla risultante di tutte le pressioni locali nella direzione del vento agenti ortogonalmente alla faccia A , infatti $\chi^2(\frac{nl}{U}) \rightarrow 1$. Per valori sempre maggiori del parametro $\frac{nl}{U}$ la diminuzione della correlazione spaziale delle varie pressioni locali indotte dal vento diviene sempre più accentuata, pertanto $\chi^2(\frac{nl}{U})$ tende a valori sempre più piccoli dell'unità.

10.1.3 Calcolo della risposta strutturale

Dal momento che la forzante eolica è un processo stocastico, anche la risposta strutturale avrà la stessa natura. Nell'ipotesi di forzante e risposta stazionarie e Gaussiane, vogliamo cercare di definire lo spostamento massimo della struttura. Si ricorda, che per valore massimo si intende il massimo valore atteso (*valore estremo*) della risposta, e non il massimo assoluto. Vogliamo dunque definire la quantità:

$$\xi_e(h) = \mu_\xi(h) + g_\xi \sigma_\xi(h) \quad (10.20)$$

dove $\mu_\xi(h)$ è la risposta media, $\sigma_\xi(h)$ è la deviazione standard, e g_ξ è il *fattore di picco* della risposta.

La risposta media è data da:

$$\mu_\xi = \frac{\mu_f}{k_\xi} = \frac{1}{k_\xi} \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 C_D A \quad (10.21)$$

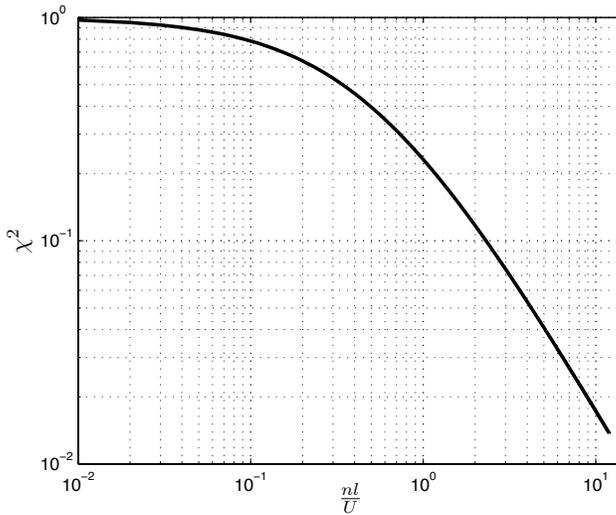


Figura 10.2: Ammettenza aerodinamica χ^2

essendo k_ξ la rigidezza alla traslazione nella direzione del vento.

Per la valutazione della risposta dinamica, si consideri nuovamente la relazione 9.81 che esprime la densità di potenza spettrale della risposta di un sistema continuo:

$$S_{\xi\xi}(h, \omega) = |H(\omega)|^2 S_{F_t F_t}(h, \omega) \quad (10.22)$$

da cui considerando la 10.17 si ottiene nel caso in esame:

$$S_{\xi\xi}(h, \omega) = (\rho C_D \mu U A)^2 |H(\omega)|^2 S_{uu}(h, \omega) \chi^2(\omega) \quad (10.23)$$

La varianza della risposta si ottiene integrando la 10.23, e nell'ipotesi di spettro unilatero avremo:

$$\sigma_\xi^2(h) = (\rho C_D \mu U A)^2 \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{uu}(h, \omega) \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.24)$$

mentre il fattore di picco della risposta è definito secondo la seguente formula di validità generale per qualsiasi processo stazionario Gaussiano:

$$g_\xi = \sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)}} \quad (10.25)$$

dove T è la lunghezza della registrazione, mentre ν_ξ è la frequenza di *attraversamento di soglia* definita da:

$$\nu_\xi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_0^{+\infty} \omega^2 S_{\xi\xi}(\omega) d\omega}{\int_0^{+\infty} S_{\xi\xi}(\omega) d\omega}} \quad (10.26)$$

10.1.4 Risposta quasi-statica

Nel caso in cui la struttura è molto rigida l'ammortamento strutturale la si può approssimare come segue:

$$|H(\omega)|^2 \approx |H(0)|^2 = \frac{1}{m\omega^2} = \frac{1}{k^2} \quad (10.27)$$

pertanto la 10.24 diviene:

$$\sigma_\xi^2(h) = \frac{(\rho C_D \mu_U A)^2}{k^2} \int_0^{+\infty} S_{uu}(h, \omega) \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.28)$$

che può essere riscritta, utilizzando la 10.10 e la varianza della turbolenza $\sigma_u^2(h)$, nel seguente modo:

$$\sigma_\xi^2(h) = \frac{4\mu_f^2}{k^2} \frac{\sigma_u^2(h)}{\mu_U^2} \int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.29)$$

Strutture puntiformi

Come accennato precedentemente, se la dimensione dei vortici della componente fluttuante della velocità del vento è molto maggiore della struttura in esame, allora $\chi^2(\omega) \rightarrow 1$ pertanto la 10.29 diviene:

$$\sigma_\xi^2(h) = \frac{4\mu_f^2}{k^2} \frac{\sigma_u^2(h)}{\mu_U^2} \int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \cdot 1 d\omega \quad (10.30)$$

da cui introducendo l'intensità di turbolenza $I_u(h) = \frac{\sigma_u(h)}{\mu_U}$ si ottiene:

$$\sigma_\xi^2(h) = \frac{4\mu_f^2}{k^2} \frac{\sigma_u^2(h)}{\mu_U^2} \cdot 1 = \frac{4\mu_f^2}{k^2} I_U^2(h) \quad (10.31)$$

È dunque possibile trovare la deviazione standard della risposta:

$$\sigma_\xi = \frac{\mu_f}{k} 2I_U(h) \quad (10.32)$$

che sommata alla risposta media fornisce l'espressione della risposta totale (Eq. 10.20):

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} [1 + g_\xi 2I_U(h)] \quad (10.33)$$

La relazione 10.33 suggerisce la definizione di un carico *statico equivalente*:

$$F_e(h) = \mu_f [1 + g_{f_t} 2I_U(h)] \quad (10.34)$$

dove $g_\xi = g_{f_t}$ nell'ipotesi di risposta quasi statica. Inoltre si può introdurre il *fattore di raffica*, φ , definito come segue:

$$\varphi = \frac{F_e(h)}{\mu_f} = 1 + g_{f_t} 2I_U(h) \quad (10.35)$$

Possiamo quindi riscrivere la risposta totale:

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} \varphi \quad (10.36)$$

da cui si evince che il fattore di raffica assume il significato di fattore di amplificazione della risposta media.

Strutture grandi

Nel caso di strutture di dimensioni maggiori l'ammettanza, per quanto detto, diminuisce dal momento che i vortici risultano meno correlati lungo la superficie strutturale investita dal vento. In questo caso si ottiene:

$$\sigma_\xi = \frac{\mu_f}{k} 2I_U(h) \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega} = \frac{\mu_f}{k} 2I_U(h) \sqrt{k_b} \quad (10.37)$$

avendo posto:

$$k_b = \int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.38)$$

In questo caso la risposta totale sarà data dalla seguente relazione:

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} [1 + g_\xi 2I_U(h) \sqrt{k_b}] \quad (10.39)$$

Pertanto il carico statico equivalente assume la forma:

$$F_e(h) = \mu_f [1 + g_{f_t} 2I_U(h) \sqrt{k_b}] \quad (10.40)$$

ed introducendo il fattore di raffica, φ ,

$$\varphi = \frac{F_e(h)}{\mu_f} = 1 + g_{f_t} 2I_U(h) \sqrt{k_b} \quad (10.41)$$

è possibile infine definire la risposta totale della struttura analogamente a quanto visto nella 10.36:

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} \varphi \quad (10.42)$$

dove il fattore di raffica in questo caso tiene conto anche della correlazione spaziale della turbolenza.

10.1.5 Risposta in risonanza

Nei paragrafi precedenti abbiamo calcolato la risposta di strutture rigide, per le quali il moto della struttura non influisce sulla risposta stessa (da cui appunto risposta quasi-statica). Nel caso di una struttura flessibile, dovremmo tenere in conto anche l'amplificazione in risonanza. Inoltre, se il moto della struttura è piuttosto pronunciato si generano ulteriori forze aerodinamiche.

Conviene riscrivere l'equazione di moto della struttura ricondotta ad un sistema ad un grado di libertà (Fig. 10.1):

$$m\ddot{\xi}(h, t) + c\dot{\xi}(h, t) + k\xi(h, t) = F(h, t) \quad (10.43)$$

In questo caso la forzante è data da:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2}\rho C_D(\mathbf{r})A \left[\mu_U(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}, t) + v(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t) - \dot{\xi}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\rho C_D(\mathbf{r})A \left[\mu_U^2(\mathbf{r}) + 2\mu_U(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, t) - 2\mu_U(\mathbf{r})\dot{\xi}(\mathbf{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (10.44)$$

che possiamo scomporre in una componente media μ_f , una fluttuante, $F_t(h, t)$, ed una componente aerodinamica, $F_a(h, t)$, applicata sulla sommità della struttura, alla quota h :

$$\mu_f = \frac{1}{2}\rho\mu_U^2 C_D A \quad (10.45)$$

$$F_t(h, t) = \rho\mu_U C_D \int_A u(\mathbf{r}, t) dA \quad (10.46)$$

$$F_a(h, t) = \rho\mu_U \dot{\xi}(h, t) C_D A = c_a \dot{\xi}(h, t) \quad (10.47)$$

La forza $F_a(h, t)$ è di natura viscosa, come la forza $c\dot{\xi}(h, t)$ nella 10.43. Inoltre, $F_t(h, t)$ è anche di natura aerodinamica, indotta cioè dal flusso di vento incidente, pertanto c_a prende il nome di *smorzamento aerodinamico*. Possiamo dunque riscrivere l'equazione di moto nel seguente modo:

$$m\ddot{\xi}(h, t) + (c + c_a)\dot{\xi}(h, t) + k\xi(h, t) = \mu_f + F_t(h, t) \quad (10.48)$$

Il problema consiste sempre nella valutazione del valore estremo della risposta (Eq. 10.20):

$$\xi_e(h) = \mu_\xi(h) + g_\xi \sigma_\xi(h) \quad (10.49)$$

Procediamo quindi al calcolo dei vari contributi.

Risposta media

La risposta media è data da:

$$\mu_\xi = \frac{\mu_f}{k_\xi} = \frac{1}{k_\xi} \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 C_D A \quad (10.50)$$

essendo k_ξ la rigidezza alla traslazione nella direzione del vento.

Risposta in risonanza

Per quanto visto nel Cap. 9 la risposta della struttura, ricondotta ad un solo grado di libertà, è data da:

$$S_{\xi\xi}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{F_t F_t}(\omega) \quad (10.51)$$

dove però l'ammettenza assume la seguente forma:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2 \omega_o^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\nu_t^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \right]} \quad (10.52)$$

essendo:

$$\nu_t = \frac{c + c_a}{2m\omega_o} \quad (10.53)$$

il rapporto di smorzamento totale, comprensivo del contributo strutturale e di quello aerodinamico. Il coefficiente di smorzamento aerodinamico c_a dipende dalla forma della struttura, ed è a favore di sicurezza se positivo (contribuisce ad aumentare lo smorzamento strutturale), mentre per valori negativi è a sfavore di sicurezza (contribuisce a diminuire lo smorzamento strutturale).

Nel caso di strutture flessibili, avremo:

$$\sigma_\xi^2(h) = (\rho C_D \mu_U A)^2 \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{uu}(h, \omega) \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.54)$$

che può essere riscritta, ricorrendo alla 10.10 e alla varianza della turbolenza $\sigma_u^2(h)$, nel seguente modo:

$$\sigma_\xi^2(h) = \frac{4\mu_f^2}{k^2} \frac{\sigma_u^2(h)}{\mu_U^2} \int_0^{+\infty} k^2 |H(\omega)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.55)$$

da cui la quantità che cerchiamo, $\sigma_\xi(h)$, è data da:

$$\sigma_\xi(h) = \frac{\mu_f}{k} 2I_U(h) \sqrt{\int_0^{+\infty} k^2 |H(\omega)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega} \quad (10.56)$$

La risposta dinamica può essere calcolata come la somma della componente quasi statica, che si ottiene per $|H(\omega)|^2 \approx |H(0)|^2 = 1/k^2$, e di quella dinamica:

$$\int_0^{+\infty} k^2 |H(\omega)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega = k_b + k_r \quad (10.57)$$

dove:

$$k_b = \int_0^{+\infty} k^2 |H(0)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega) d\omega \quad (10.58)$$

$$k_r = \int_0^{+\infty} k^2 |H(\omega)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega_o)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega_o) d\omega = \frac{\omega_o S_{uu}(h, \omega_o)}{\sigma_u^2(h)} \chi^2(\omega_o) \frac{\pi}{4\nu_t} \quad (10.59)$$

Pertanto, la risposta totale della struttura sarà data da:

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} \left[1 + g_\xi 2I_U(h) \sqrt{k_b + k_r} \right] \quad (10.60)$$

ed il carico statico equivalente assume la forma:

$$F_e(h) = \mu_f [1 + g_{f_t} 2I_U(h) \sqrt{k_b + k_r}] \quad (10.61)$$

ed introducendo il fattore di raffica, φ ,

$$\varphi = \frac{F_e(h)}{\mu_f} = 1 + g_{f_t} 2I_U(h) \sqrt{k_b + k_r} \quad (10.62)$$

è possibile infine definire la risposta totale della struttura analogamente a quanto visto nel caso delle strutture rigide:

$$\xi_e(h) = \frac{\mu_f}{k} \varphi \quad (10.63)$$

con φ che tiene conto della correlazione spaziale della turbolenza, della componente quasi-statica e di quella dinamica.

10.1.6 Strutture puntiformi

Nel caso di strutture puntiformi si ha $\chi^2(\omega) \rightarrow 1$ e quindi si ottiene:

$$k_b = \int_0^{+\infty} k^2 |H(0)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \cdot 1 d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{S_{uu}(h, \omega)}{\sigma_u^2(h)} \cdot 1 d\omega = 1 \quad (10.64)$$

$$k_r = \int_0^{+\infty} k^2 |H(\omega)|^2 \frac{S_{uu}(h, \omega_o)}{\sigma_u^2(h)} \cdot 1 d\omega = \frac{\omega_o S_{uu}(h, \omega_o)}{\sigma_u^2(h)} \frac{\pi}{4\nu_t} \quad (10.65)$$

pertanto il fattore di raffica assume la forma:

$$\varphi = \frac{F_e(h)}{\mu_f} = 1 + g_{f_t} 2I_U(h) \sqrt{1 + k_r} \quad (10.66)$$

10.2 Strutture allungate nella direzione del vento

Nei precedenti paragrafi abbiamo trattato il caso di strutture a prevalente sviluppo in una direzione (e.g. lungo z per la struttura in Fig. 10.1). Con riferimento alla Fig. 10.3, consideriamo ora il caso tridimensionale, ossia anche la dimensione lungo la direzione del vento. In questo caso la forzante di trascinamento sarà data da due con-

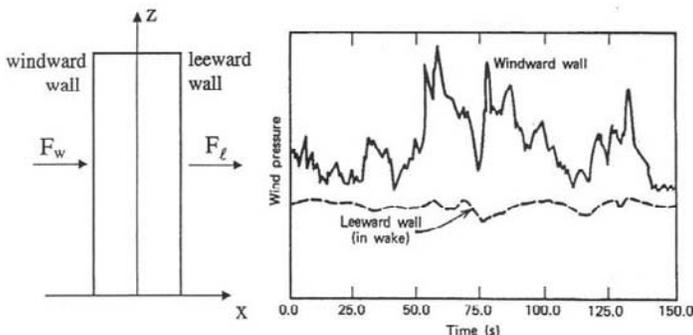


Figura 10.3: Struttura estesa nella direzione del vento

tributi, la componente agente sulla faccia direttamente investita dal vento (*windward wall*) e da quella che agisce in scia (*leeward wall*). Possiamo sempre scomporre il carico eolico in una forza statica ed una dinamica:

$$\mu_f = \mu_{f_w} + \mu_{f_l} = \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 C_{D_w} A_w + \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 C_{D_l} A_l \quad (10.67)$$

$$\begin{aligned} F_t(h, t) &= F_w(h, t) + F_l(h, t) = \\ &= \rho \mu_U C_{D_w} \int_{A_w} u(\mathbf{r}, t) dA_w + \rho \mu_U C_{D_l} \int_{A_l} u(\mathbf{r}, t) dA_l \end{aligned} \quad (10.68)$$

Il calcolo della risposta media è analogo a quanto visto precedentemente, mentre per il calcolo della risposta dinamica conviene fare alcune osservazioni. In particolare, siamo interessati al calcolo della densità spettrale della forzante dinamica $F_t(h, t) = F_w(h, t) + F_l(h, t)$ che sappiamo essere la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_{F_t F_t}(h, \tau) &= E [F_t(h, t) F_t(h, t + \tau)] = \\ &= E \{ [F_w(h, t) + F_l(h, t)] [F_w(h, t + \tau) + F_l(h, t + \tau)] \} = \\ &= E [F_w(h, t) F_w(h, t + \tau)] + E [F_l(h, t) F_l(h, t + \tau)] + \\ &+ E [F_w(h, t) F_l(h, t + \tau)] + E [F_w(h, t + \tau) F_l(h, t)] = \\ &= R_{F_w F_w}(h, \tau) + R_{F_l F_l}(h, \tau) + R_{F_w F_l}(h, \tau) + R_{F_w F_l}(h, -\tau) \end{aligned} \quad (10.69)$$

tenendo presente che $R_{F_l F_w}(h, \tau) = R_{F_w F_l}(h, -\tau)$. Operando la trasformata di Fourier si ottiene dunque la densità spettrale di potenza del carico eolico:

$$S_{F_t F_t}(h, \omega) = S_{F_w F_w}(h, \omega) + S_{F_l F_l}(h, \omega) + S_{F_w F_t}(h, \omega) + S_{F_w F_l}^*(h, \omega) \quad (10.70)$$

che sarà data dunque dalla somma degli auto-spettri e dei cross-spettri delle singole componenti.

Generalmente, come si vede dalla Fig. 10.3, le due componenti della forzante sono poco correlate tra loro, pertanto $R_{F_w F_l}(h, \pm\tau) \rightarrow 0$ con buona approssimazione. Conseguentemente $S_{F_w F_l}(h, \omega) \rightarrow 0$ e $S_{F_w F_l}^*(h, \omega) \rightarrow 0$, quindi la densità spettrale di potenza sarà data da:

$$S_{F_t F_t}(h, \omega) \approx S_{F_w F_w}(h, \omega) + S_{F_l F_l}(h, \omega) \quad (10.71)$$

Noto lo spettro della forzante eolica si può procedere al calcolo della risposta come visto nei precedenti paragrafi, distinguendo tra struttura rigida o flessibile, puntiforme o estesa.

10.3 Trattazione generale della risposta strutturale along-wind

Nei precedenti paragrafi abbiamo considerato il calcolo semplificato della risposta along-wind, considerando la struttura come un sistema ad un grado di libertà. In questa sezione viene descritta la trattazione, di carattere più generale, per il calcolo della risposta strutturale nella direzione del vento, con particolare riguardo alle strutture *line-like* e *plate-like* (Dyrbye and Hansen [4]).

Tale procedura si riferisce a strutture aventi forme semplici, riconducibili alle seguenti tipologie:

- edifici a torre;
- ciminiere;
- ponti a mensola;
- linee di trasmissione elettrica;
- opere per l'illuminazione.

Inoltre, si assumono le seguenti ipotesi:

- Il carico eolico è determinato dal campo di vento indisturbato;
- La struttura è elastica-lineare con smorzamento viscoso;
- I modi propri di vibrare nella direzione del vento sono disaccoppiati tra loro.

10.3.1 Equazione di moto per le strutture che vibrano nella direzione del vento

L'equazione di moto della struttura che vibra nella direzione del vento è la seguente:

$$m(\mathbf{r})\ddot{\xi}(\mathbf{r}, t) + c(\mathbf{r})\dot{\xi}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{L}[\xi(\mathbf{r})] = F(\mathbf{r}, t) \quad (10.72)$$

con il consueto significato dei simboli. In analogia a quanto visto nel paragrafo 9.5 è possibile decomporre il problema proiettandolo nello spazio delle coordinate modali, $\psi_i(\mathbf{r})$:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \frac{\int_S \psi_i(\mathbf{r})F(\mathbf{r}, t)d\mathcal{S}}{\int_S \psi_i^2(\mathbf{r})m(\mathbf{r})d\mathcal{S}} = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad i = 1, 2, \dots, +\infty \quad (10.73)$$

Se più modi di vibrare nella direzione del vento contribuiscono in maniera significativa alla risposta strutturale, allora avremo che la risposta dinamica totale, R , sarà data da:

$$\sigma_R^2 = \sum_i \sigma_{R,i}^2 \quad (10.74)$$

10.3.2 Funzioni d'influenza

Finora abbiamo considerato come risposta strutturale lo spostamento estremo, tuttavia conviene formulare il problema in modo da poter estendere la valutazione della risposta in funzione di qualsivoglia quantità (spostamenti, deformazioni, tensioni e caratteristiche di sollecitazione). Peranto, introduciamo le *funzioni d'influenza*, $I_R(\mathbf{r})$, della generica risposta R .

La funzione di influenza è la generica risposta che si ottiene in un generico punto della struttura per effetto di un singolo carico *unitario* applicato in un altro punto della struttura stessa.

Calcoliamo, ad esempio, il valore medio del taglio alla base di una struttura verticale assimilabile ad una mensola. Per ogni singolo carico *unitario* applicato alla quota z , ossia $F(z) = 1$, avremo che il taglio alla base è uguale, ma di verso contrario, al carico applicato, $T(0) = F(z) = 1$. Pertanto, in questo caso la funzione d'influenza del taglio, $I_T(z)$, è costantemente pari ad 1. Infatti, se si applica una forza generica alla quota z , sia essa $F(z)$, avremo $T(0) = 1 \cdot F(z)$, con $I_T(z) = 1$.

Nel caso del momento flettente, avremo $M(0) = z \cdot F(z)$, per qualsiasi carico $F(z)$ applicato alla generica quota z . Conseguentemente, essendo la funzione d'influenza la risposta generica dovuta ad un carico unitario, avremo $I_M(z) = z \cdot 1 = z$.

In generale, per un carico non uniformemente distribuito, il momento flettente alla base sarà dato dalla seguente relazione:

$$M(0) = \int_0^h I_M(z)F(z)dz = \int_0^h zF(z)dz \quad (10.75)$$

È facile dimostrare che nel caso di un carico uniformemente distribuito si ha:

$$M(0) = \int_0^h I_M(z)F(z)dz = F \int_0^h zdz = F \frac{h^2}{2} \quad (10.76)$$

ossia il ben noto momento d'incastro di una mensola caricata uniformemente.

10.3.3 Valore estremo della risposta

Lo scopo di questa trattazione è quello di valutare il valore estremo della risposta:

$$R_e = \mu_R + g_R \sigma_R \quad (10.77)$$

dove:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{R_b}^2 + \sigma_{R_r}^2} \quad (10.78)$$

essendo σ_{R_b} e σ_{R_r} la deviazione standard della risposta quasi-statica e in risonanza, rispettivamente.

10.3.4 Strutture Line-Like

Per strutture Line-Like s'intendono strutture con prevalente sviluppo in una direzione. Assumendo che il vento agisce in direzione x , possiamo distinguere tra strutture che si estendono prevalentemente in direzione y (e.g., ponti) ed altre che si estendono in direzione z (e.g., ciminiere).

In questa sezione consideriamo strutture che si estendono in altezza, dunque lungo z , ma la trattazione è del tutto analoga per le strutture allungate nella direzione y .

Equazione di moto

L'equazione di moto, associata all' i -esimo modo di vibrare, sarà dunque data dalla seguente relazione:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^h \psi_i(z)F(z,t)dz}{\int_0^h \psi_i^2(z)m(z)dz} = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad i = 1, 2, \dots, +\infty \quad (10.79)$$

Definizione della forzante eolica

La forzante eolica è data da:

$$\begin{aligned} F(z,t) &= \frac{1}{2} \rho C(z) D(z) \left[\mu_U(z) + u(z,t) + v(z,t) + w(z,t) - \dot{\xi}(z,t) \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \rho C(z) D(z) \left[\mu_U^2(z) + 2\mu_U(z)u(z,t) - 2\mu_U(z)\dot{\xi}(z,t) \right] \quad (10.80) \end{aligned}$$

che possiamo scomporre in una componente media $\mu_f(z)$, una fluttuante, $F_t(z, t)$, ed una componente aerodinamica, $F_a(z, t)$,

$$\mu_f(z) = \frac{1}{2} \rho \mu_U^2(z) C(z) D(z) \quad (10.81)$$

$$F_t(z, t) = \rho C(z) D(z) \mu_U(z) u(z, t) \quad (10.82)$$

$$F_a(z, t) = \rho C(z) D(z) \mu_U(z) \dot{\xi}(z, t) = \rho C(z) D(z) \mu_U(z) \dot{q}_i \psi_i(z) \quad (10.83)$$

dove nella 10.83 si è tenuto conto della decomposizione modale che porta alla relazione 10.79. La quantità $D(z)$ è la dimensione della struttura nella direzione perpendicolare alla direzione del vento, mentre $C(z)$ è un coefficiente di forma.

Smorzamento aerodinamico

La forzante definita nella 10.83 è di natura aerodinamica, in quanto indotta dal vento incidente, ma anche di natura viscosa perché è proporzionale a \dot{q} . Pertanto, è possibile definire uno *smorzamento aerodinamico*: consideriamo la 10.79 dove la forzante sia solo quella di natura aerodinamica:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \dot{q}_i \frac{\int_0^h \psi_i^2(z) \rho C(z) D(z) \mu_U(z) dz}{\int_0^h \psi_i^2(z) m(z) dz} \quad (10.84)$$

ponendo

$$2\nu_{a,i} \omega = \frac{\int_z \psi_i^2(z) \rho C(z) D(z) \mu_U(z) dz}{\int_0^h \psi_i^2(z) m(z) dz} \quad (10.85)$$

avremo:

$$\ddot{q}_i + 2(\nu_i + \nu_{a,i}) \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (10.86)$$

pertanto, l'ammettenza strutturale associata all'*i-esimo* modo di vibrare sarà:

$$|H(\omega_i)|^2 = \frac{1}{m^2 \omega_i^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4\nu_{t,i}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2 \right]} \quad (10.87)$$

con $\nu_{t,i} = (\nu_i + \nu_{a,i})$.

È possibile scrivere il rapporto di smorzamento aerodinamico $\nu_{a,i}$ nel seguente modo:

$$\nu_{a,i} = \frac{\int_0^h \psi_i^2(z) \rho C(z) D(z) \mu_U(z) dz}{\int_0^h \psi_i^2(z) m(z) dz} = \frac{1}{4\pi} C(z^*) \frac{U_{rid,i}}{M_{rid,i}} \gamma_{a,i} \quad (10.88)$$

dove:

$$U_{rid,i} = \frac{U(z^*)}{n_i D(z^*)} \quad (10.89)$$

$$M_{rid,i} = \frac{m_{g,i}/h}{\rho D^2(z^*)} \quad (10.90)$$

$$m_{g,i} = \int_0^h m(z) \frac{\psi_i^2(z)}{\psi_i^2(z^*)} dz \quad (10.91)$$

$$\gamma_{a,i} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{C(z)D(z)\mu_U(z)\psi_i^2(z)}{C(z^*)D(z^*)\mu_U(z^*)\psi_i^2(z^*)} dz \quad (10.92)$$

dove z^* è una quota di riferimento arbitraria, $n_i = \omega_i/(2\pi)$ è l' i -esima frequenza naturale del sistema, e h è l'altezza della struttura.

Complessivamente, possiamo scrivere l'equazione di moto associata al i -esimo modo di vibrare nel seguente modo:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_{t,i}\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^h \psi_i(z)[\mu_F(z) + F_t(z,t)]dz}{\int_0^h \psi_i^2(z)m(z)dz} \quad (10.93)$$

Risposta media

Detta $I_R(z)$ la funzione d'influenza della generica risposta possiamo calcolare la risposta media come segue:

$$\mu_R = \int_0^h I_R(z)\mu_F(z)dz \quad (10.94)$$

che possiamo scrivere, facendo riferimento ad una generica quota z^* , come segue:

$$\mu_R = \frac{1}{2}\rho h D(z^*)C(z^*)\mu_U^2(z^*)I_R(z^*)\gamma_m \quad (10.95)$$

dove:

$$\gamma_m = \frac{1}{h} \int_0^h g_m(z)dz \quad (10.96)$$

$$g_m(z) = \frac{D(z)C(z)\mu_U^2(z)I_R(z)}{D(z^*)C(z^*)\mu_U^2(z^*)I_R(z^*)} \quad (10.97)$$

La funzione $g_m(z)$ è una funzione adimensionale che esprime la variazione del carico medio e della funzione d'influenza della generica risposta. Pertanto, γ_m rappresenta l'effetto complessivo di $g_m(z)$ sull'intera struttura.

Risposta quasi-statica

La risposta quasi-statica è data da:

$$\sigma_{R_b}^2 = R_{R_b R_b}(\tau = 0) \quad (10.98)$$

dove $R_{R_b R_b}(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione della generica risposta, $R_b(t)$, definita come segue:

$$R_b(t) = \int_0^h \int_0^h I_R(z) F_t(z, t) dz \quad (10.99)$$

La funzione di autocorrelazione di $R_b(t)$ è dunque data dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} R_{R_b R_b}(\tau) &= \int_0^h \int_0^h E [F_t(z_1, t) F_t(z_2, t + \tau)] I_R(z_1) I_R(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \int_0^h \int_0^h [\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] \times \\ &\times E [u(z_1, t) u(z_2, t + \tau)] I_R(z_1) I_R(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \int_0^h \int_0^h [\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] \times \\ &\times R_{uu}(z_1, z_2, \tau) I_R(z_1) I_R(z_2) dz_1 dz_2 \quad (10.100) \end{aligned}$$

Dal momento che stiamo considerando la sola componente fluttuante, allora $\sigma_{R_b}^2 = R_{R_b R_b}(\tau = 0)$ ossia:

$$\begin{aligned} \sigma_{R_b}^2 &= \int_0^h \int_0^h [\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] \times \\ &\times R_{uu}(r_z, 0) I_R(z_1) I_R(z_2) dz_1 dz_2 \quad (10.101) \end{aligned}$$

dove si è supposta che la funzione di cross-correlazione della componente fluttuante della velocità del vento dipenda dalla distanza $r_z = |z_1 - z_2|$. Inoltre, moltiplicando e dividendo per $\sigma_u(z_1) \sigma_u(z_2)$, e considerando una quota di riferimento z^* possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sigma_{R_b}^2 &= [\rho C(z^*) D(z^*) \mu_U(z^*) \sigma_u(z^*) I_R(z^*)]^2 \times \\ &\times \int_0^h \int_0^h \frac{[\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)]}{[\rho C(z^*) D(z^*) \mu_U(z^*) \sigma_u(z^*) I_R(z^*)]^2 \sigma_u(z_1) \sigma_u(z_2)} \times \\ &\times R_{uu}(r_z, 0) I_R(z_1) I_R(z_2) \sigma_u(z_1) \sigma_u(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= [\rho C(z^*) D(z^*) \mu_U(z^*) \sigma_u(z^*) I_R(z^*)]^2 \times \\ &\times \int_0^h \int_0^h \frac{[\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] \rho_{uu}(r_z)}{[\rho C(z^*) D(z^*) \mu_U(z^*) \sigma_u(z^*) I_R(z^*)]^2} \times \\ &\times I_R(z_1) I_R(z_2) \sigma_u(z_1) \sigma_u(z_2) dz_1 dz_2 \quad (10.102) \end{aligned}$$

dove $\rho(r_z) = \frac{R_{uu}(r_z, 0)}{\sigma_u(z_1)\sigma_u(z_2)}$ è la funzione di cross-correlazione normalizzata della componente fluttuante del vento.

L'equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sigma_{R_b}^2 = [\rho C(z^*)D(z^*)\mu_U(z^*)\sigma_u(z^*)]^2 h^2 I_R^2(z^*) J_b^2 \quad (10.103)$$

dove:

$$J_b^2 = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h \rho_u(r_z) g_b(z_1) g_b(z_2) dz_1 dz_2 \quad (10.104)$$

$$g_b(z) = \frac{C(z)D(z)\sigma(z)\mu_U(z)I_R(z)}{C(z^*)D(z^*)\sigma(z^*)\mu_U(z^*)I_R(z^*)} \quad (10.105)$$

La funzione $g_b(z)$ esprime la variazione del carico fluttuante lungo la struttura, mentre J_b^2 è la varianza adimensionale della risposta e può essere scomposta in due integrali:

$$J_b^2 = \frac{1}{h} \int_0^h k(r_z) \rho(r_z) dr_z \quad (10.106)$$

$$k(r_z) = \frac{2}{h} \int_0^{h-r_z} g_b(z) g_b(z+r_z) dz \quad (10.107)$$

I valori asintotici di J_b^2 sono i seguenti:

$$J_b^2 \rightarrow k(0)/\phi_z \quad \text{per} \quad \phi_z = \frac{h}{L_u^z} \rightarrow +\infty \quad (10.108)$$

$$J_b^2 \rightarrow \gamma_b^2 \quad \text{per} \quad \phi_z = \frac{h}{L_u^z} \rightarrow 0 \quad (10.109)$$

dove

$$\gamma_b = \frac{1}{h} \int_0^h g_b(z) dz \quad (10.110)$$

fornisce la deviazione standard adimensionale della risposta, J_b , nel caso di turbolenza completamente correlata, $\rho_u(r_z) = 1$.

Nel caso in cui le funzioni g_m e g_b abbiano segno costante la varianza della risposta quasi-statica può essere scritta nella seguente forma:

$$\sigma_{R_b}^2 = [\mu_R 2I_u(z^*)]^2 \theta_b^2 k_b \quad (10.111)$$

dove $I_u(z^*)$ è l'intensità di turbolenza alla quota di riferimento z^* , mentre

$$\theta_b = \frac{\gamma_b}{\gamma_m} \quad (10.112)$$

$$k_b = \frac{J_b^2}{\gamma_b^2} \quad (10.113)$$

Una buona approssimazione di k_b è data da:

$$k_b = \frac{1}{1 + \Gamma \phi_z} \quad (10.114)$$

dove Γ è una costante che dipende dalla funzione $g_b(z)$. In Fig. 10.4 è rappresentata la J_b^2 per alcune funzioni $g_b(z)$.

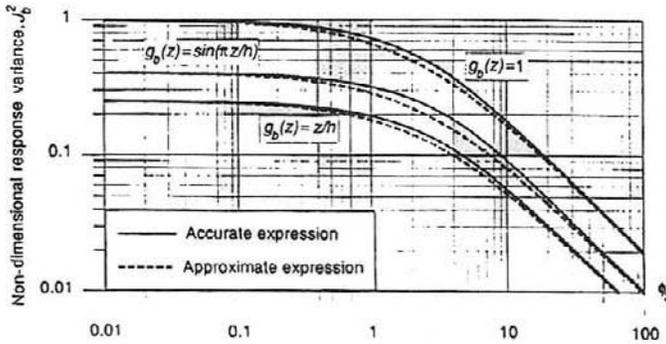


Figura 10.4: J_b^2 in funzione di ϕ_z nel caso di $g_b(z) = 1$ ($\Gamma = 1/2$); $g_b(z) = z/h$ ($\Gamma = 3/8$); $g_b(z) = \sin(\pi z/h)$ ($\Gamma = 4/\pi^2$)

Nel caso in cui g_m e g_b cambiano di segno lungo la struttura, k_b deve essere calcolata caso per caso. In Fig. 10.5 è riportato l'andamento della varianza adimensionale della risposta per $g_b(z) = 2z/h - 1$.

Risposta in risonanza

In questo caso non è possibile procedere direttamente con l'ausilio delle funzioni d'influenza, dal momento che queste sono modificate dal moto della struttura che di per sé è l'incognita del problema. Pertanto, bisogna dapprima risolvere il problema dinamico, e successivamente definire un carico dinamico inerziale, ossia proporzionale all'accelerazione della struttura, che permette l'utilizzo delle funzioni d'influenza.

Siamo alla ricerca di una forzante $F_d(z, t)$ definita nel seguente modo:

$$F_d(z, t) = m(z)\ddot{Q}(z, t) = m(z) \sum_i \psi_i(z)\ddot{q}_i(t) \quad (10.115)$$

dove $m(z)$ è la massa per unità di lunghezza, $\ddot{Q}(z, t)$, è l'accelerazione totale della struttura che può essere decomposta, come più volte menzionato, nella somma delle

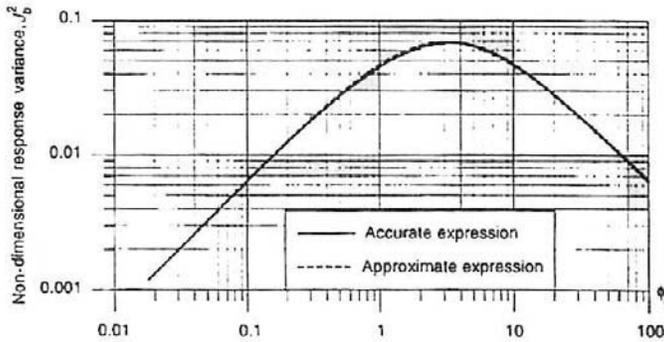


Figura 10.5: J_b^2 in funzione di ϕ_z nel caso di $g_b(z) = 2z/h - 1$. Una buona approssimazione è data da $J_b^2(\phi_z) = \frac{2\phi_z}{3\phi_z^2 + 10\phi_z + 30}$

accelerazioni associate ai sistemi elementari in cui è possibile scomporre la struttura. Le funzioni $\psi_i(z)$ sono dunque le forme modali della struttura.

Consideriamo l'*i*-esimo modo di vibrare della struttura, allora l'*i*-esimo carico dinamico sarà¹:

$$F_{d,i}(z, t) = m(z)\psi_i(z)\ddot{q}_i(t) = m(z)\omega_i^2\psi_i(z)q_i(t) \quad (10.116)$$

che consente la valutazione della generica risposta in risonanza $R_{r,i}$ con l'ausilio della funzione d'influenza $I_R(z)$:

$$R_{r,i}(t) = \int_0^h I_R(z)F_{d,i}(z, t)dz \quad (10.117)$$

La risposta in risonanza si riconduce al calcolo della varianza della generica risposta in risonanza:

$$\sigma_{R_{r,i}}^2 = \int_0^{+\infty} S_{R_{r,i}R_{r,i}}(\omega)d\omega \quad (10.118)$$

dove $S_{R_{r,i}R_{r,i}}(\omega)$ è lo spettro della generica risposta in risonanza, $R_{r,i}(t)$, definito come:

$$\begin{aligned} S_{R_{r,i}R_{r,i}}(\omega) &= \\ &= \left[\int_0^h \int_0^h m(z_1)m(z_2)\psi_i(z_1)\psi_i(z_2)\omega_i^4 I_R(z_1)I_R(z_2)dz_1dz_2 \right] S_{q_iq_i}(\omega) \end{aligned} \quad (10.119)$$

¹Il carico dinamico è definito a meno del segno negativo che deriva dal fatto che $\ddot{q}_i(\omega) = -\omega_i^2 q_i(t)$. Questo perché il segno è ininfluenza sulla valutazione della risposta.

Dobbiamo pertanto calcolare $S_{q_i q_i}(\omega)$ risolvendo il problema dinamico associato all' i -esimo modo di vibrare della struttura:

$$\ddot{q}_i + 2\nu_{t,i}\omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^h \psi_i(z) F_t(z, t) dz}{\int_0^h \psi_i^2(z) m(z) dz} \quad (10.120)$$

dove

$$F_t(z, t) = \rho C(z) D(z) \mu_U(z) u(z, t) \quad (10.121)$$

Nell'ipotesi di modi disaccoppiati avremo che, per l' i -esimo modo di vibrare, la densità spettrale della risposta è data da:

$$S_{q_i q_i}(\omega) = |H_i(\omega)|^2 I_{ii}(\omega) \quad (10.122)$$

dove l'ammettenza strutturale $|H_i(\omega)|^2$ tiene conto del coefficiente di smorzamento totale, $\nu_{t,i}$, comprensivo del coefficiente di smorzamento aerodinamico, $\nu_{a,i}$ (Eq. 10.88).

$$|H(\omega_i)|^2 = \frac{1}{m^2 \omega_i^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4\nu_{t,i}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2 \right]} \quad (10.123)$$

Il cross-spettro delle forze modali associato all' i -esimo modo di vibrare è dato dalla seguente relazione:

$$I_{ii}(\omega) = \int_0^h \int_0^h \psi_i(z_1) \psi_i(z_2) S_{FF}(z_1, z_2, \omega) dz_1 dz_2 \quad (10.124)$$

ottenuta calcolando la funzione di autocorrelazione del carico $\int_0^h \psi_i(z) F_t(z, t) dz$ e successivamente operando la trasformata di Fourier.

Tenendo presente la 10.121 il cross-spettro del carico può essere espresso nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_{FF}(z_1, z_2, \omega) &= \\ &= [\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] S_{uu}(z_1, z_2, \omega) = \\ &= [\rho C(z_1) D(z_1) \mu_U(z_1)] [\rho C(z_2) D(z_2) \mu_U(z_2)] \times \\ &\quad \times \sqrt{S_{uu}(z_1, \omega) S_{uu}(z_2, \omega)} \psi_{uu}(r_z, \omega) \end{aligned} \quad (10.125)$$

dove $r_z = |z_1 - z_2|$, e $\psi_{uu}(r_z, \omega)$ è il co-spettro normalizzato della componente longitudinale della velocità del vento.

Considerando una quota di riferimento z^* possiamo riscrivere la densità spettrale della risposta associata all' i -esimo modo di vibrare nel seguente modo:

$$S_{q_i q_i}(\omega) = [h \rho C(z^*) D(z^*) \mu_U(z^*) \psi_i(z^*)]^2 |H(\omega_i)|^2 J_{z,i}^2(\omega) S_{uu}(z^*) \quad (10.126)$$

dove $J_{z,i}^2(\omega)$ assume il significato di ammettenza congiunta e può essere scritta nel seguente modo:

$$J_{z,i}^2(\omega) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h g_{r,i}(z_1, \omega) g_{r,i}(z_2, \omega) \psi_{uu}(r_z, \omega) dz_1 dz_2 \quad (10.127)$$

essendo $g_{r,i}(z, \omega)$ la funzione che tiene conto della distribuzione del carico eolico in condizioni di risonanza:

$$g_{r,i}(z, \omega) = \frac{C(z)D(z)\mu_U(z)\sqrt{S_{uu}(z, \omega)}\psi_i(z)}{C(z^*)D(z^*)\mu_U(z^*)\sqrt{S_{uu}(z^*, \omega)}\psi_i(z^*)} \quad (10.128)$$

L'ammettenza congiunta $J_{z,i}^2(\omega)$ può essere calcolata scomponendo l'integrale nel seguente modo:

$$J_{z,i}^2(\omega) = \frac{1}{h} \int_0^h k_{z,i}(r_z, \omega) \psi_{uu}(r_z, \omega) dr_z \quad (10.129)$$

$$k_{z,i}(r_z, \omega) = \frac{2}{h} \int_0^{h-r_z} g_{r,i}(z, \omega) g_{r,i}(z + r_z, \omega) dz \quad (10.130)$$

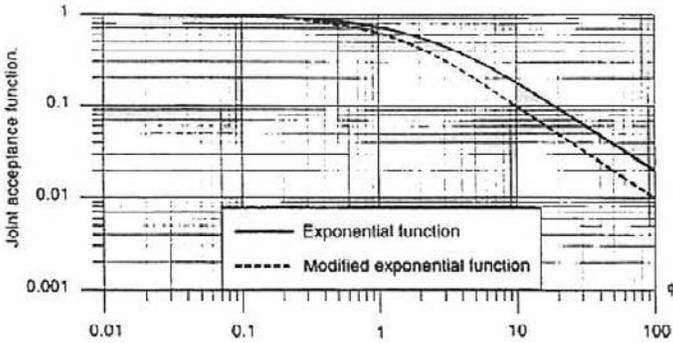


Figura 10.6: $J_z^2(\omega)$ in funzione di ϕ_z nel caso di $\psi(z) = 1$, variando il co-spettro normalizzato. (—) $J_z^2(\omega)$ ottenuta utilizzando ψ_{uu}

Varianza della risposta in risonanza

Risolto il problema dinamico, ossia nota la densità spettrale $S_{q_i q_i}(\omega)$, è possibile calcolare la varianza della generica risposta in risonanza associata all'*i*-esimo modo di vibrare, $\sigma_{R_{r,i}}^2$, secondo la 10.118.

Si può dimostrare che

$$\sigma_{R_{r,i}}^2 = [\mu_R 2I_u(z^*)]^2 \theta_{r,i}^2 k_{r,i} \quad (10.131)$$

Nel caso di modi propri di vibrare che non cambiano segno si ha:

$$\theta_{r,i} = \frac{\gamma_{r,i}}{\gamma_m} \frac{1}{m_{g,i}} \int_0^h m(z) \frac{\psi_i(z)}{\psi_i(z^*)} \frac{I_R(z)}{I_R(z^*)} dz \quad (10.132)$$

$$k_{r,i} = \frac{\pi^2}{4\pi\nu_{t,i}} \frac{\omega_i S_{uu}(z^*, \omega_i)}{\sigma_u^2(z^*)} J_{z,i}^2(\omega_i) \frac{1}{\gamma_{r,i}^2} \quad (10.133)$$

con

$$\gamma_{r,i} = \frac{1}{h} \int_0^h g_{r,i}(z, 0) dz \quad (10.134)$$

$$m_{g,i} = \int_0^h m(z) \frac{\psi_i^2(z)}{\psi_i^2(z^*)} dz \quad (10.135)$$

Quando in modi propri di vibrare cambiano segno, la varianza della risposta deve essere calcolata caso per caso. Ciò è dovuto alla diversa interazione tra la turbolenza e i modi di vibrare della struttura.

Nel caso in cui la turbolenza è costituita prevalentemente da vortici piccoli, l'ammettenza congiunta tende al suo valore asintotico,

$$J_z^2(\omega) \rightarrow \frac{1}{J_z \phi_z} \quad (10.136)$$

dove J_z è una costante che dipende dalla funzione $g_r(z)$, $\phi_z = \frac{C_z n h}{U}$, essendo C_z la costante che garantisce il decadimento di $\psi_{uu}(r_z, \omega)$ lungo z .

Quando invece la turbolenza è costituita da vortici di dimensioni paragonabili alla struttura, se non maggiori, allora l'interazione tra la turbolenza e la struttura è così diversa che il co-spettro normalizzato $\psi_{uu}(r_z, \omega)$ non tende più all'unità alle basse frequenze. Questo fenomeno è maggiormente pronunciato per strutture che vibrano con modi non aventi segno costante.

Un esempio di come varia l'ammettenza congiunta relativamente ad un modo di vibrare che cambia segno, è dato dalla Fig. 10.7

Risposta totale

Generalmente la risposta in risonanza è principalmente data dal primo modo di vibrare. Pertanto, tenendo presente la 10.77, la 10.94, la 10.111 e la 10.131, possiamo scrivere la risposta totale come:

$$R_e = \mu_R \left[1 + g_r 2I_u(z^*) \sqrt{\theta_b^2 k_b + \theta_r^2 k_r} \right] \quad (10.137)$$

dove la risposta dinamica è quella associata al solo primo modo di vibrare.

Infine, possiamo quindi scrivere il coefficiente di amplificazione della risposta media, *coefficiente di raffica*, nel seguente modo:

$$\varphi = \frac{R_e}{\mu_R} = 1 + g_r 2I_u(z^*) \sqrt{\theta_b^2 k_b + \theta_r^2 k_r} \quad (10.138)$$

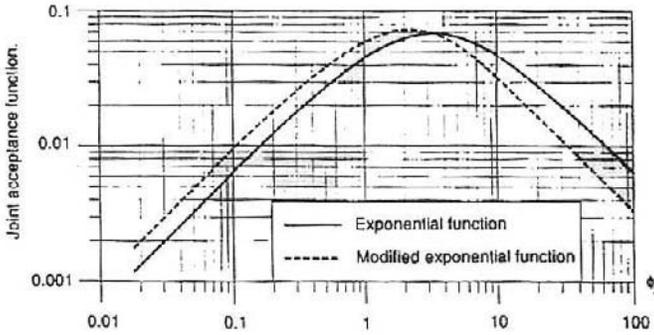


Figura 10.7: $J_z^2(\omega)$ in funzione di ϕ_z nel caso di $\psi(z)$ con segno non costante, variando il co-spettro normalizzato. (–) $J_z^2(\omega)$ ottenuta utilizzando ψ_{uu}

Strutture line-like orizzontali

Nel caso di strutture Line-Like orizzontali (e.g., ponti), che si estendono cioè in direzione y per una lunghezza b , avremo:

$$J_{y,i}^2(\omega) = \frac{1}{b} \int_0^b k_{y,i}(r_y, \omega) \psi_{uu}(r_y, \omega) dr_y \quad (10.139)$$

$$k_{y,i}(r_y, \omega) = \frac{2}{b} \int_0^{b-r_y} g_{r,i}(y, \omega) g_{y,i}(y + r_y, \omega) dy \quad (10.140)$$

dove in questo caso

$$g_{r,i}(y, \omega) = \frac{C(y)D(y)\mu_U(y)\sqrt{S_{uu}(y, \omega)}\psi_i(y)}{C(y^*)D(y^*)\mu_U(y^*)\sqrt{S_{uu}(y^*, \omega)}\psi_i(y^*)} = \frac{C(y)D(y)\psi_i(y)}{C(y^*)D(y^*)\psi_i(y^*)} \quad (10.141)$$

essendo $\mu_U(y) = \mu_U(y^*)$ e $S_{uu}(y, \omega) = S_{uu}(y^*, \omega)$. La trattazione è uguale a quella delle strutture Line-Like verticali.

10.3.5 Strutture plate-like

Le strutture Plate-Like sono strutture che si estendono sia in direzione verticale, z , sia in direzione orizzontale, y . La trattazione è analoga a quella delle strutture Line-Like, pertanto si riportano direttamente le quantità d'interesse per la valutazione della risposta estrema:

$$R_e = \mu_R \left[1 + g_r 2I_u(z^*) \sqrt{\theta_b^2 k_b + \theta_r^2 k_r} \right] \quad (10.142)$$

dove la risposta dinamica è quella associata al solo primo modo di vibrare, che generalmente prevale sugli altri. Il *coefficiente di raffica* è definito secondo la nota relazione:

$$\varphi = \frac{R_e}{\mu_R} = 1 + g_r 2I_u(z^*) \sqrt{\theta_b^2 k_b + \theta_r^2 k_r} \quad (10.143)$$

Vediamo in dettaglio i vari contributi della risposta, ossia la risposta media, quasi-statica e in risonanza. Quest'ultima è calcolata tenendo in conto soltanto il primo modo di vibrare.

Risposta media

$$\mu_R = \frac{1}{2} \rho b h C(z^*, y^*) \mu_U^2(z^*) I_R(z^*, y^*) \gamma_m \quad (10.144)$$

con:

$$\gamma_m = \frac{1}{bh} \int_0^h \int_0^b g_m(y, z) dz \quad (10.145)$$

$$g_m(z, y) = \frac{C(z, y) \mu_U^2(z) I_R(z, y)}{C(z^*, y^*) \mu_U^2(z^*) I_R(z^*, y^*)} \quad (10.146)$$

dove h e b sono rispettivamente le dimensioni lungo z e y della struttura, mentre $I_R(x, y)$ è la funzione (superficie) d'influenza della generica risposta R . Il punto di coordinate (z^*, y^*) è un punto di riferimento della struttura.

Risposta quasi-statica

La varianza della risposta quasi-statica è data dalla seguente relazione:

$$\sigma_{R_b}^2 = [\rho b h C(z^*, y^*) \mu_U(z^*) \sigma_u(z^*)]^2 I_R^2(z^*, y^*) J_b^2 \quad (10.147)$$

dove:

$$J_b^2 = \frac{1}{b^2 h^2} \int_0^h \int_0^h \int_0^b \int_0^b \rho_u(r_z, r_y) g_b(z_1, y_1) g_b(z_2, y_2) dz_1 dz_2 dy_1 dy_2 \quad (10.148)$$

$$g_b(z, y) = \frac{C(z, y) \sigma(z) \mu_U(z) I_R(z, y)}{C(z^*, y^*) \sigma(z^*) \mu_U(z^*) I_R(z^*, y^*)} \quad (10.149)$$

Se le funzioni g_m e g_b non cambiano segno, avremo:

$$\theta_b = \frac{\gamma_b}{\gamma_m} \quad (10.150)$$

$$k_b = \frac{J_b^2}{\gamma_b^2} \quad (10.151)$$

dove:

$$\gamma_b = \frac{1}{b^2 h^2} \int_0^h \int_0^b g_b(z, y) dy dz \quad (10.152)$$

che sarebbe il valore di J_b^2 quando $\rho_u(r_z, r_y) = 1$. Assumendo $g_b(z, y) = g_b(z)g_b(y)$ il fattore di risposta k_b è ben approssimato dalla seguente formula:

$$k_b = \frac{1}{1 + \sqrt{(\Gamma_y \phi_y)^2 + (\Gamma_z \phi_z)^2 + \left(\frac{2}{\pi} \Gamma_y \phi_y \Gamma_z \phi_z\right)^2}} \quad (10.153)$$

$$\phi_z = \frac{h}{L_u^z} \quad \phi_y = \frac{b}{L_u^y} \quad (10.154)$$

dove Γ è una costante che dipende dalla funzione g_b . Alcuni valori sono riportati in Fig. 10.4.

Risposta in risonanza

Per la risposta in risonanza l'ammettenza congiunta è la seguente:

$$J_{zy}^2(\omega) = \frac{1}{b^2 h^2} \times \int_0^h \int_0^h \int_0^b \int_0^b g_r(z_1, y_1, \omega) g_r(z_2, y_2, \omega) \psi_{uu}(r_z, r_y, \omega) dz_1 dz_2 dy_1 dy_2 \quad (10.155)$$

dove:

$$g_r(z, y, \omega) = \frac{C(z, y) \mu_U(z) \sqrt{S_{uu}(z, y, \omega)} \psi(z, y)}{C(z^*, y^*) \mu_U(z^*) \sqrt{S_{uu}(z^*, y^*, \omega)} \psi(z^*, y^*)} \quad (10.156)$$

Per il calcolo della risposta in risonanza si hanno le seguenti quantità associate al primo modo di vibrare con segno costante:

$$\theta_r = \frac{\gamma_r \int_0^h \int_0^b m(x, y) \frac{\psi(z, y)}{\psi(z^*, y^*)} \frac{I_R(z, y)}{I_R(z^*, y^*)} dy dz}{\gamma_m \int_0^h \int_0^b m(x, y) \frac{\psi^2(z, y)}{\psi^2(z^*, y^*)} dy dz} \quad (10.157)$$

$$k_r = \frac{\pi^2}{4\pi\nu_t} \frac{\omega_1 S_{uu}(z^*, \omega_1)}{\sigma_u^2(z^*)} K_s(\omega_1) \quad (10.158)$$

dove $\omega_1 = 2\pi n_1$ è la frequenza angolare associata al primo modo di vibrare, $m(x, y)$ è la massa per unità di superficie, mentre γ_r è data da:

$$\gamma_r = \frac{1}{hb} \int_0^h \int_0^b g_r(y, z, 0) dy dz \quad (10.159)$$

Infine, $K_s(\omega)$ è una funzione di riduzione che tiene conto dell'interazione della turbolenza con il modo proprio di vibrare della struttura. Nel caso di modi di vibrare con segno costante si ha che $K_s(\omega)$ tende all'unità alle basse frequenze in corrispondenza delle quali la turbolenza è maggiormente correlata, mentre decresce progressivamente alle alte frequenze dal momento che i vortici sempre più piccoli sono sempre meno correlati. Un'approssimazione della funzione di riduzione $K_s(\omega)$ è così data:

$$K_s(\omega) = \frac{1}{1 + \sqrt{(G_y \phi_y)^2 + (G_z \phi_z)^2 + \left(\frac{2}{\pi} G_y \phi_y G_z \phi_z\right)^2}} \quad (10.160)$$

$$\phi_z = \frac{C_z h \omega}{U(z^*)} \quad \phi_y = \frac{C_y b \omega}{U(z^*)} \quad (10.161)$$

dove C_y e C_z sono le costanti della 4.30, mentre G_z e G_y sono delle costanti che dipendono dalla funzione g_r .

Nel caso di modi di vibrare che cambiano segno, la risposta in risonanza deve essere calcolata caso per caso, visto che l'interazione tra turbolenza e modo di vibrare induce un cambiamento della funzione di ammettenza congiunta come discusso precedentemente.

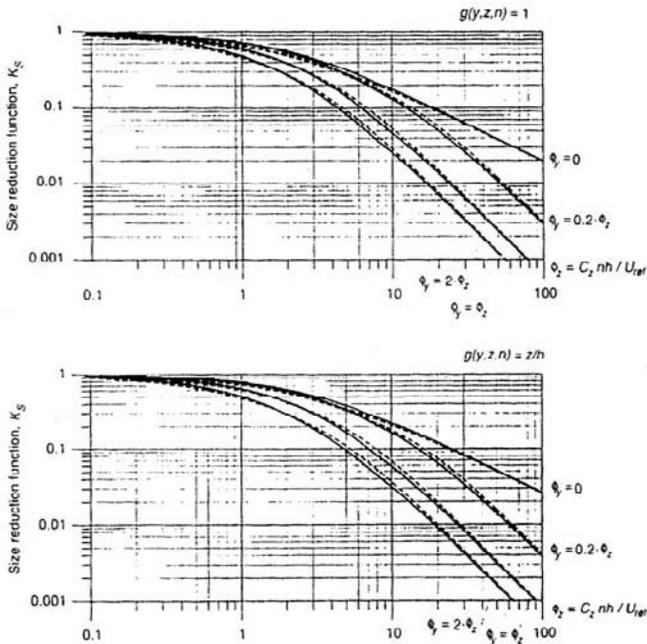


Figura 10.8: Funzione di riduzione K_s al variare di $g(z, y, \omega)$, ϕ_y e ϕ_z

11

Risposta strutturale along-wind secondo l'Eurocodice 1

11.1 Scopo

L'EC1 fornisce regole e metodi per il calcolo delle azioni del vento agenti su strutture che non superino un'altezza di 200m, e sui loro componenti strutturali; su ponti, viadotti stradali e ferroviari che si estendono fino a 200m di lunghezza; su passerelle e ponti pedonali fino a 30m.

I carichi del vento devono essere calcolati per l'intera struttura, o su parti di essa (componenti, rivestimenti ed elementi di fissaggio, etc.). Le ciminiere e le strutture a mensola sono contemplate, ma non vi sono requisiti fondamentali per le torri a traliccio. Ponti strallati e ponti sospesi non rientrano nella normativa, e dovrebbero essere oggetto di studi specialistici. Non vi sono regole per le antenne strallate e per le strutture offshore.

11.2 Modellazione dell'azioni del vento

Le azioni del vento sono rappresentate in termini di pressione o forza. Le pressioni indotte dal vento s'intendono agenti perpendicolarmente alla superfici investite salvo diverse indicazioni come nel caso di forze tangenziali dovute al vento radente.

Si fa riferimento ai seguenti parametri:

- q_{ref} intesa come la pressione eolica di riferimento;

- $c_e(z)$ ossia il coefficiente di esposizione che tiene conto dell'effetto della rugosità superficiale del sito sulla velocità del vento alla quota z . In particolare $c_e(z)$ modifica la pressione media in una pressione di picco (estrema) per tenere conto della turbolenza atmosferica.
- c_d è il coefficiente dinamico che tiene conto della correlazione del vento turbolento agente sulla struttura, e dell'amplificazione della risposta in risonanza dovuta al moto della struttura.

11.3 Pressione dinamica di riferimento

La pressione dinamica di riferimento è definita come segue:

$$q_{ref} = \frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 \quad (11.1)$$

dove U_{ref} è la velocità eolica di riferimento che dipende dal sito in questione, e ρ è la densità dell'aria pari 1.25 Kg/m^3 .

La velocità eolica di riferimento è ottenuta operando una media della componente longitudinale della velocità del vento su un'intervallo di 10 minuti (all'interno del gap spettrale), ad un'altezza di 10 metri sopra un suolo appartenente alla seconda categoria. Tale velocità di riferimento è intesa come la velocità che ha una probabilità di eccedenza pari a 0.02, corrispondente ad un tempo di ritorno di 50 anni.

In particolare si ha:

$$U_{ref} = c_{dir} c_{tem} c_{alt} U_{ref,0} \quad (11.2)$$

dove c_{dir} è il fattore di direzione posto pari a 1 se non altrimenti specificato; c_{tem} è il fattore temporaneo pari ad 1 se non altrimenti specificato; c_{alt} è il fattore di altitudine posto pari a 1 se non altrimenti specificato, $U_{ref,0}$ è il valore di base della velocità di riferimento del vento.

11.4 Profilo della velocità del vento

La velocità media del vento ad una generica quota z al di sopra del suolo dipende dalla rugosità del terreno e dalla topografia:

$$U(z) = c_r(z) c_t(z) U_{ref} \quad (11.3)$$

dove $c_r(z)$ è il coefficiente di rugosità che tiene conto della variazione della velocità del vento con la quota per effetto della rugosità del terreno; $c_t(z)$ è il coefficiente di topografia che tiene conto della variazione della velocità eolica dovuta ad eventuali ostacoli naturali (e.g., colline, scarpate).

Il coefficiente di topografia è generalmente assunto pari ad 1, mentre l'influenza del coefficiente di rugosità sulla velocità eolica è dato dalla Fig. 11.1.

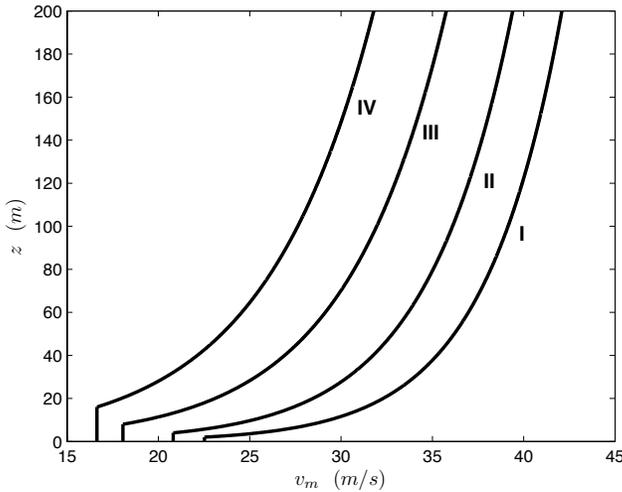


Figura 11.1: Profili di vento per differenti rugosità secondo l'EC1

11.4.1 Coefficiente di rugosità

Il coefficiente di rugosità è definito nel seguente modo:

$$c_r(z) = k_T \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad z \geq z_{min} \quad (11.4)$$

$$c_r(z) = c_r(z_{min}) \quad z < z_{min} \quad (11.5)$$

con k_T fattore di terreno, z_0 lunghezza di rugosità del sito d'interesse, z_{min} quota minima sopra il terreno. Questi coefficienti dipendono dalla categoria del terreno e sono riportati in Tabella 11.1.

11.5 Coefficiente di raffica

Nel Cap. 10 abbiamo definito il coefficiente di raffica nel seguente modo:

$$\varphi(z) = 1 + 2gI_u(z)\sqrt{k_b + k_r} \quad (11.6)$$

dove g è il fattore di picco, $I_u(z)$ è l'intensità di turbolenza alla generica quota z , mentre k_b e k_r sono due costanti relative rispettivamente alla risposta quasi-statica e in risonanza, e che tengono in conto anche la correlazione spaziale della turbolenza attraverso l'ammettenza aerodinamica $\chi^2(\omega)$.

Moltiplicando e dividendo la 11.6 per la quantità $1 + 2gI_u(z)$, si ottiene:

$$\varphi(z) = [1 + 2gI_u(z)] \frac{1 + 2gI_u(z)\sqrt{k_b + k_r}}{1 + 2gI_u(z)} \quad (11.7)$$

Tabella 11.1: Categorie del terreno e relativi parametri

	Categoria del terreno	k_T	z_0 (m)	z_{min} (m)
I	Mare aperto, laghi con minimo 5 km di estensione sopravento e campagna senza ostacoli	0.17	0.01	2
II	Terreno agricolo con recinzioni, piccole fattorie isolate, case o alberi	0.19	0.05	4
III	Aree suburbane o industriali o foreste permanenti	0.22	0.3	8
IV	Area urbana in cui almeno il 15% della superficie sia coperta da edifici la cui altezza media superi i 15m	0.24	1	16

Inoltre esprimendo l'intensità di turbolenza come:

$$I_u(z) = \frac{k_T}{c_r(z)c_t(z)} \quad (11.8)$$

si ottiene:

$$\varphi(z) = \left[1 + 2g \frac{k_T}{c_r(z)c_t(z)} \right] \frac{1 + 2gI_u(z)\sqrt{k_b + k_r}}{1 + 2gI_u(z)} \quad (11.9)$$

11.6 Forzante eolica

Tenendo presente le relazioni appena ottenute, la forzante eolica indotta dal vento è espressa nel seguente modo:

$$F(z) = \frac{1}{2}\rho U^2(z)\varphi(z)c_f A_{ref} = \frac{1}{2}\rho U_{ref}^2 c_r^2(z)c_t^2(z)\varphi(z)c_f A_{ref} \quad (11.10)$$

dove φ assume il significato di coefficiente di amplificazione della pressione media, c_f è un coefficiente aerodinamico che varia in base alla struttura considerata, e A_{ref} è un'area di riferimento. La relazione 11.10 può essere riscritta considerando la definizione del coefficiente di raffica data nella 11.9. In particolare, si ottiene:

$$F(z) = \frac{1}{2}\rho U_{ref}^2 c_r^2(z)c_t^2(z) \left[1 + 2g \frac{k_T}{c_r(z)c_t(z)} \right] \frac{1 + 2gI_u(z)\sqrt{k_b + k_r}}{1 + 2gI_u(z)} c_f A_{ref} \quad (11.11)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$F(z) = q_{ref} c_e(z)c_d(z)c_f A_{ref} \quad (11.12)$$

dove:

$$c_e(z) = c_r^2(z)c_t^2(z) \left[1 + 2g \frac{k_T}{c_r(z)c_t(z)} \right] \quad (11.13)$$

è il *coefficiente di esposizione*, mentre

$$c_d(z) = \frac{1 + g2I_u(z)\sqrt{k_b + k_r}}{1 + g2I_u(z)} \quad (11.14)$$

è il *coefficiente dinamico*.

11.7 Azioni eoliche agenti sulle strutture

La relazione 11.12 costituisce la formula generale con cui l'EC1 definisce le azioni di calcolo agenti sulle strutture. In particolare, l'EC1 distingue tra pressioni (forze per unità di superficie) e forze globali.

11.7.1 Pressioni

Se le superfici strutturali sono sufficientemente rigide da poter trascurare il contributo delle loro vibrazioni risonanti, le pressioni interne ed esterne possono essere calcolate come è di seguito riportato.

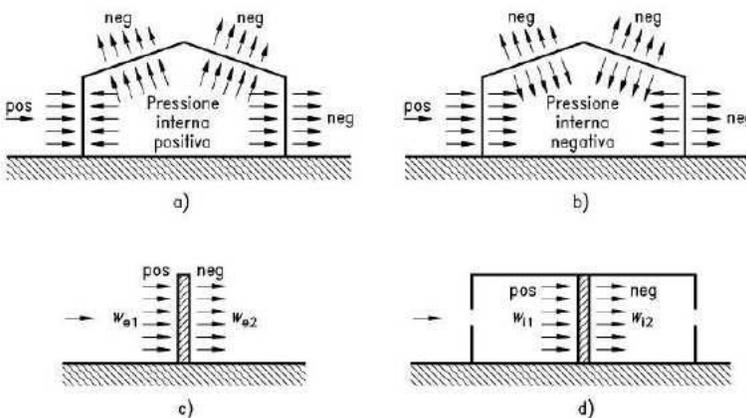


Figura 11.2: Convenzione dei segni per le pressioni esterne ed interne

Pressioni esterne ed interne

Le pressioni sono date dalle seguenti relazioni:

$$w_e = q_{ref} c_e(z_e) c_{pe} \quad (11.15)$$

$$w_i = q_{ref} c_i(z_i) c_{pi} \quad (11.16)$$

ripettivamente per le pressioni esterne ed interne. Le quote z_e e z_i sono le quote di riferimento per la struttura in esame, mentre c_{pe} e c_{pi} sono rispettivamente i coefficienti di pressione esterna ed interna e dipendono dalla forma della struttura.

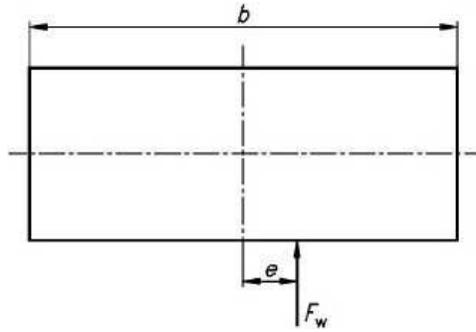


Figura 11.3: Forzante applicata con un'eccentricità $e = \frac{b}{10}$

Forze globali

Le forzanti globali agenti sulla struttura, o su parte di essa, può essere calcolata in base alla relazione 11.12. In particolare, l'EC1 definisce tali forzanti in funzione di una quota di riferimento che dipende dal tipo di struttura in esame, $z = z_e$:

$$F_w = q_{ref} c_e(z_e) c_d c_f A_{ref} \quad (11.17)$$

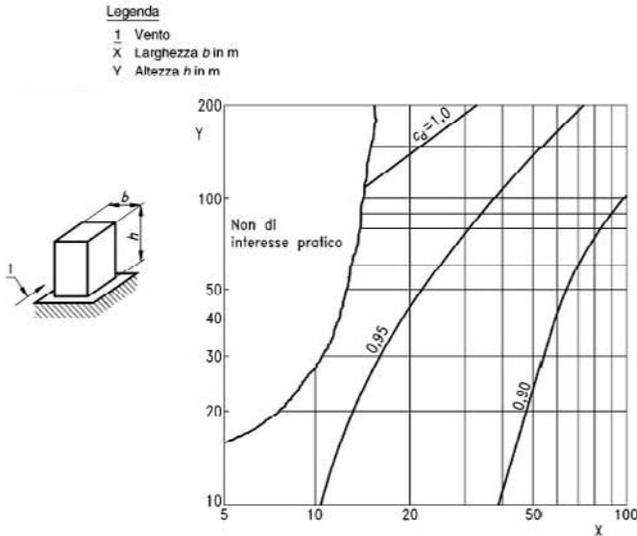
con il consueto significato dei simboli. Alcuni valori del coefficiente dinamico sono riportati nelle Fig. 11.4, 11.5 e 11.6.

Gli effetti torsionali dovuti ad un vento inclinato oppure alla non completa correlazione del vento turbolento, possono essere tenuti in conto applicando la forza F_w con un'eccentricità pari ad un decimo della dimensione della struttura normale alla direzione del vento, $e = \frac{b}{10}$ (Fig. 11.3).

Inoltre L'EC1 fornisce anche la forzante d'attrito dovuta al vento radente, valida soprattutto per quelle strutture che presentano grandi aree investite dal vento. Tale forza è espressa dalla seguente relazione:

$$F_{fr} = q_{ref} c_e(z_e) c_{fr} A_{ref} \quad (11.18)$$

dove c_{fr} è il coefficiente d'attrito. In questo caso si può notare che non rientra il coefficiente dinamico nella definizione della forzante.

Figura 11.4: c_d per strutture in calcestruzzo e muratura

11.8 Procedura per il calcolo della risposta along-wind

L'EC1 prevede due tipologie di analisi per la valutazione della risposta along-wind delle strutture: una procedura semplificata ed una dettagliata.

Le due procedure non sono applicabili per ponti a travata continua, ponti ad arco, ponti sospesi, per strutture snelle che non presentino un comportamento elastico lineare oppure che non abbiano il primo modo di vibrare nella direzione del vento sufficientemente disaccoppiato dai modi superiori o che non siano riconducibili agli schemi semplificati (verticale, orizzontale e puntiforme) in Fig. 11.7.

11.8.1 Procedura semplificata

La procedura semplificata fa riferimento alle strutture non suscettibili all'amplificazione dinamica. In particolare si applica nel caso di edifici e ciminiere con altezza minore di 200 metri, per viadotti stradali e ferroviari la cui campata massima non superi i 200 metri. In ogni caso $c_d < 1.2$.

Per procedere alla valutazione della forzante globale agente sulla struttura si considera un fattore di picco pari a 3.5 ($g = 3.5$), pertanto avremo:

$$F_w = q_{ref} c_e(z_{eq}) c_d c_f A_{ref} \quad (11.19)$$

dove

$$c_e(z_{eq}) = c_r^2(z_{eq}) c_t^2(z_{eq}) \left[1 + \frac{7k_T}{c_r(z_{eq}) c_t(z_{eq})} \right] \quad (11.20)$$

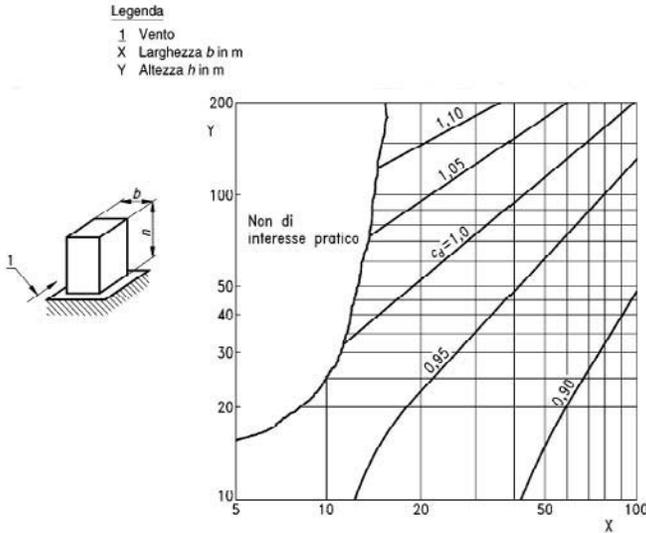


Figura 11.5: c_d per strutture in acciaio

con z_{eq} è l'altezza equivalente che dipende dal tipo di struttura in esame (Fig. 11.7), mentre il c_d è dato dalle tabelle (e.g., Fig. 11.4, 11.5 e 11.6).

L'andamento del coefficiente di esposizione al variare della quota è riportato in Fig. 11.8

11.8.2 Procedura dettagliata

La procedura dettagliata si applica a quelle strutture per le quali la componente dinamica della risposta non è trascurabile. In particolare si fa riferimento a questo tipo di analisi ogni qualvolta $c_d > 1.2$. Tuttavia, è consigliata anche quando $1 \leq c_d \leq 1.2$.

Nell'ambito della procedura dettagliata il coefficiente dinamico viene definito come segue:

$$c_d = \frac{1 + 2gI_u(z_{eq})\sqrt{Q_0^2 + R_x^2}}{1 + 2gI_u(z_{eq})} \quad (11.21)$$

dove z_{eq} è l'altezza equivalente definita nella Fig. 11.7, $Q_0^2 = k_b$ e $R_x^2 = k_r$ secondo la simbologia utilizzata nel Cap. 10.

L'intensità di turbolenza viene valutata secondo la seguente espressione:

$$I_u(z_{eq}) = \frac{1}{c_t(z_{eq}) \ln(z_{eq}/z_0)} \quad (11.22)$$

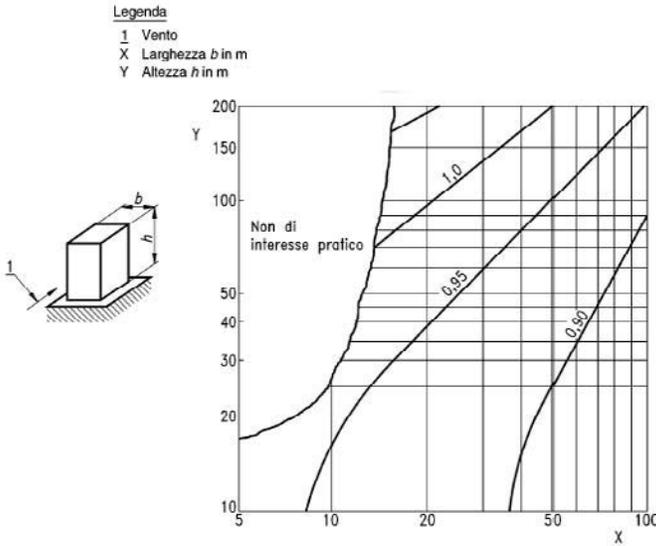


Figura 11.6: c_d per strutture miste acciaio-calcestruzzo

mentre il fattore di picco è dato dalla seguente formula:

$$g = \sqrt{2 \ln(\nu T)} + \frac{0.6}{\sqrt{2 \ln(\nu T)}} \tag{11.23}$$

dove $T = 600$ secondi è il tempo su cui è mediata la velocità di riferimento del vento, mentre ν è definito come segue:

$$\nu = \sqrt{\frac{\nu_0^2 Q_0^2 + n_{1,x}^2 R_x^2}{Q_0^2 + R_x^2}} \tag{11.24}$$

dove $n_{1,x}$ è la frequenza di vibrazione della struttura nella direzione del vento, ossia lungo x , e ν_0 è la frequenza attesa delle azioni di raffica su strutture rigide. L'andamento del fattore di picco è riportato in Fig. 11.9.

Componente quasi-statica della risposta

La risposta quasi-statica viene quantificata attraverso la seguente formula:

$$Q_0^2 = \frac{1}{1 + 0.9 \left[\frac{b+h}{L_i(z_{eq})} \right]^{0.63}} \tag{11.25}$$

dove $L_i(z_{eq})$ è la scala integrale di turbolenza alla quota di riferimento (Fig. 11.11), b e h sono rispettivamente la larghezza e l'altezza della struttura in esame. In Fig. 11.10 è riportato l'andamento di Q_0^2 .

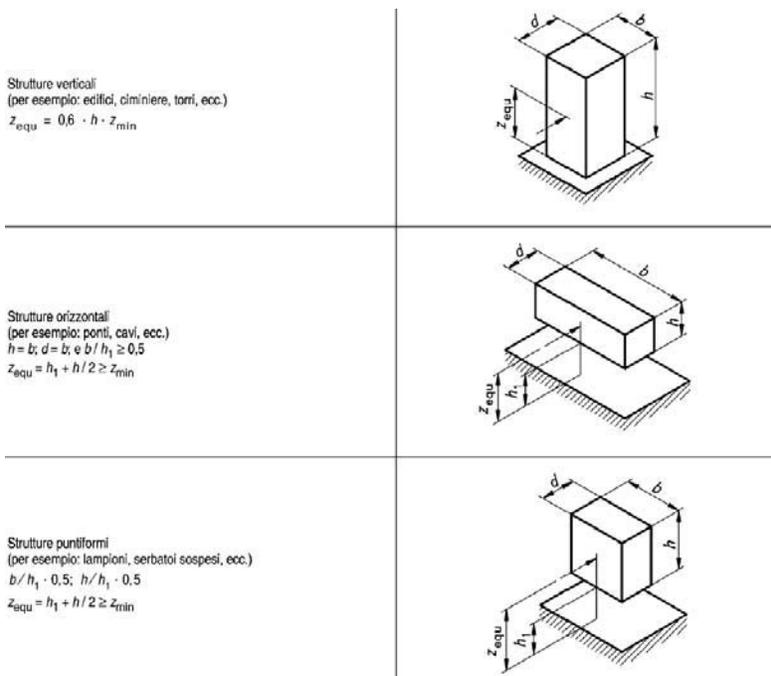


Figura 11.7: Definizione dell'altezza equivalente

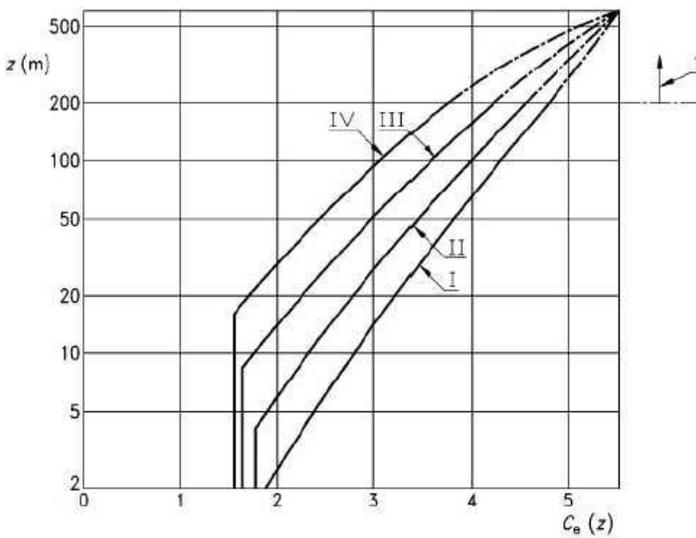


Figura 11.8: c_e al variare della quota, nelle quattro categoria di terreno. $c_t = 1$

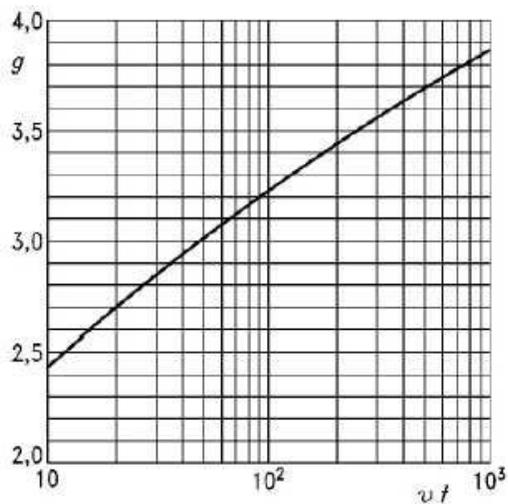
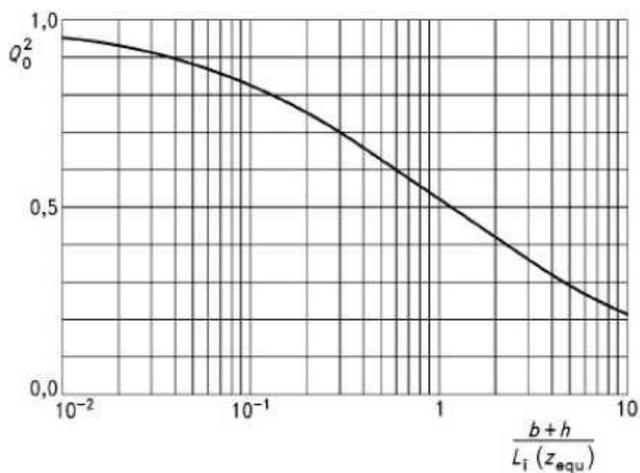
Figura 11.9: Andamento del fattore di picco rispetto a $v_f T$ 

Figura 11.10: Andamento della componente quasi-statica della risposta

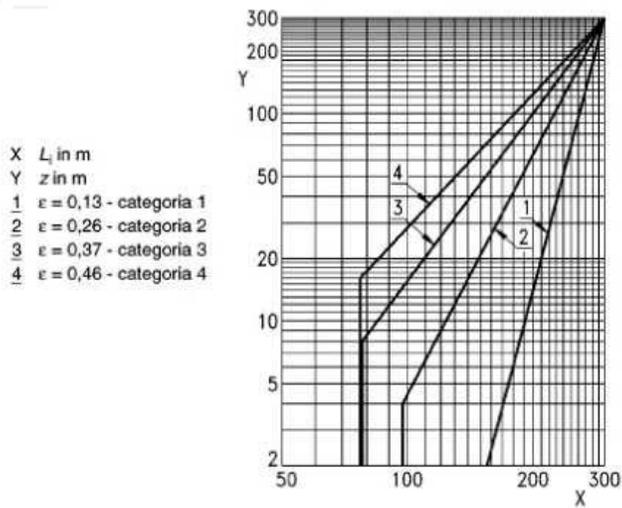


Figura 11.11: Scala integrale di turbolenza $L_i(z)$, per diverse categorie di terreno

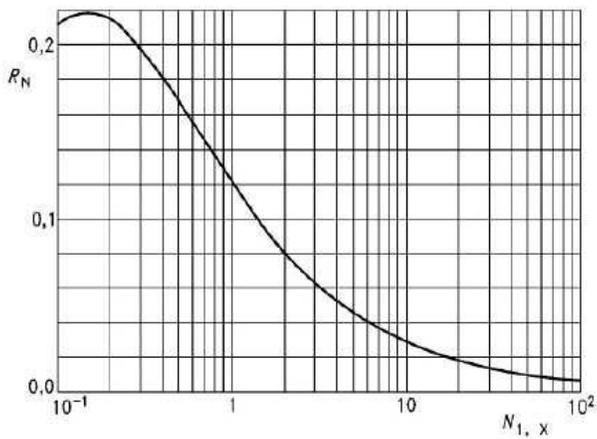


Figura 11.12: Densità spettrale adimensionale della risposta, R_N

Componente in risonanza della risposta

La risposta in risonanza è data dalla seguente relazione:

$$R_x^2 = \frac{\pi^2}{2\delta} R_N R_h R_b \quad (11.26)$$

dove $\delta = 2\pi\nu_s$ è il decremento logaritmico dello smorzamento, ν_s è il rapporto di smorzamento strutturale. R_N è la densità spettrale adimensionale del vento turbolento (Fig. 11.12):

$$R_N = \frac{n_{1,x} S_{uu}(n_x)}{\sigma_u^2} = \frac{6.8 N_x}{(1 + 10.2 N_x)^{5/3}} \quad (11.27)$$

con

$$N_x = \frac{n_{1,x} L_i(z_{eq})}{U_m(z_{eq})} \quad (11.28)$$

L'ammettenza aerodinamica è definita lungo la larghezza e l'altezza della struttura, rispettivamente R_b ed R_h :

$$R_l = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{2\eta^2} (1 - e^{-2\eta}) \quad \text{per } \eta > 0 \quad (11.29)$$

$$R_l = 1 \quad \text{per } \eta = 0 \quad (11.30)$$

con

$$R_h = R_l \quad \text{ponendo } \eta = \frac{4.6 N_{1,x} h}{L_i(z_{eq})} \quad (11.31)$$

$$R_b = R_l \quad \text{ponendo } \eta = \frac{4.6 N_{1,x} b}{L_i(z_{eq})} \quad (11.32)$$

Nel caso in cui le forme modali nella direzione del vento cambiano segno (presentano cioè dei punti nodali) l'ammettenza aerodinamica dovrà essere valutata con procedure più dettagliate.

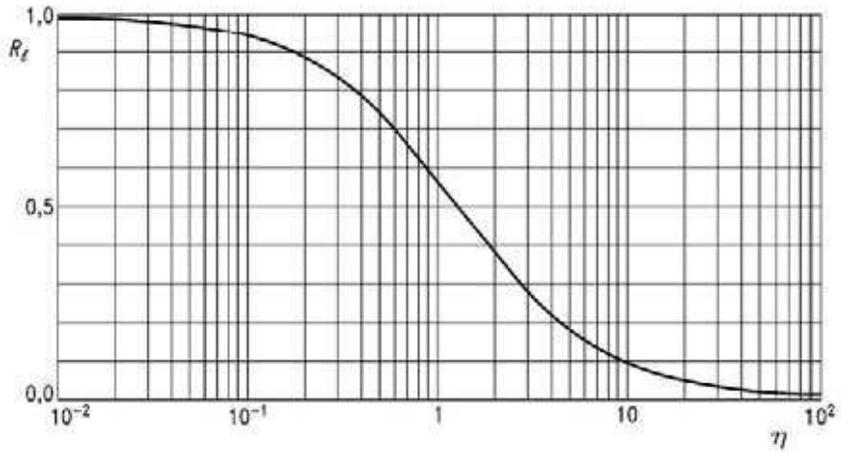


Figura 11.13: Ammettenza aerodinamica, R_f ($l=h,b$)

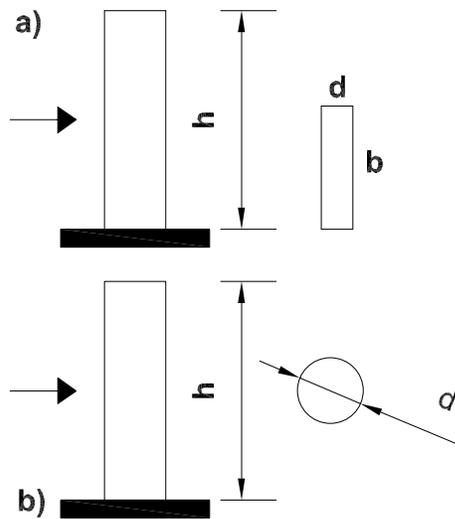


Figura 11.14: a) Edificio in acciaio: $h = 10 \div 200m$, $b = 20m$, $d = 10m$; b) Torre in calcestruzzo con snellezza $\lambda = h/d$.

11.9 Esempi

Consideriamo alcuni esempi che mettono a confronto la procedura semplificata e dettagliata.

11.9.1 Edificio in acciaio

La struttura è situata in un'area urbana (categoria 2), la velocità di riferimento del vento è $U_{ref} = 27m/s$. Il coefficiente di forza è $c_f = 1.3$. Secondo l'EC1, la procedura semplificata la si può applicare per un'altezza che non superi i 50m (Fig. 11.15).

11.9.2 Edificio basso in acciaio

La struttura è situata in un'area urbana (categoria 2), la velocità di riferimento del vento è $U_{ref} = 27m/s$. Il coefficiente di forza è $c_f = 1.3$. In queste ipotesi, si ottengono i seguenti valori dell'azione eolica:

- Procedura semplificata: $F_w/A_w = 1.40KN/m^2$
- Procedura dettagliata: $F_w/A_w = 1.19KN/m^2$

La forzante eolica calcolata con la procedura semplificata è circa il 18% più grande di quella calcolata con la procedura dettagliata. Ciò è dovuto al fatto che la procedura semplificata non tiene conto degli effetti dovuti alla dimensione della struttura. La dimensione della struttura è tale che l'ammiettenza aerodinamica diminuisce.

11.9.3 Torre in calcestruzzo poco snella ($\lambda < 12$)

La struttura è situata in un'area urbana (categoria 2), la velocità di riferimento del vento è $U_{ref} = 27m/s$.

Per i criteri sulle torri, questa struttura può essere calcolata con la procedura semplificata. Sia la procedura semplificata sia quella dettagliata forniscono lo stesso valore della forzante eolica visto che gli effetti dovuti alla dimensione della struttura, e la sua risposta risonante sono trascurabili:

- $F_w/A_w = 1.47 KN/m^2$

11.9.4 Torre in calcestruzzo molto snella ($\lambda > 12$)

La struttura è situata in un'area urbana (categoria 2), la velocità di riferimento del vento è $U_{ref} = 27m/s$.

Per i criteri sulle torri questa struttura deve essere calcolata con la procedura dettagliata.

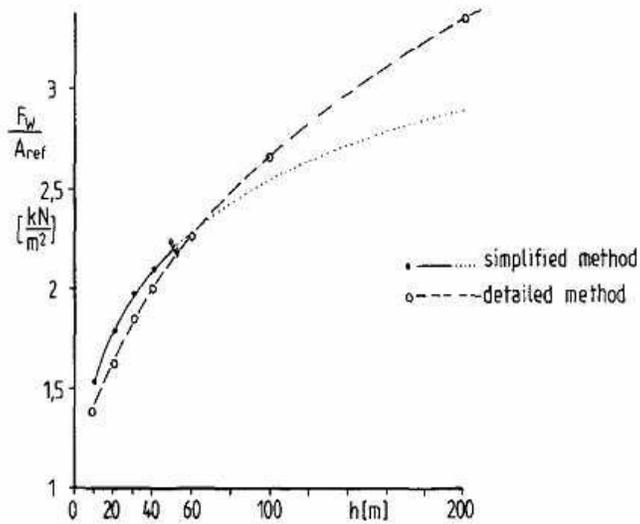


Figura 11.15: Confronto tra la procedura semplificata e quella dettagliata

- $F_w/A_w = 2.23 \text{ KN/m}^2$

Con la procedura semplificata si otterrebbe una forza per unità di superficie pari alla metà di quella ottenuta con la procedura dettagliata. La snellezza della struttura induce una rilevante risposta in risonanza.

12

Risposta strutturale across-wind

In questo capitolo viene discussa la risposta strutturale nella direzione ortogonale a quella del vento (across-wind), dovuta principalmente al fenomeno del distacco dei vortici.

Prima di discutere il problema strutturale, conviene introdurre alcune nozioni relative al fenomeno del distacco dei vortici e alla formazione della scia.

12.1 Fenomeno del distacco dei vortici

Un corpo immerso in una corrente fluida è delimitato da uno strato limite superficiale che si separa alternativamente dalle regioni laterali dando vita ad una scia di vortici che defluisce a valle del corpo. La natura della scia dipende sensibilmente dal numero di Reynolds:

$$R_e = \frac{UD}{\nu} \quad (12.1)$$

dove ν è la viscosità cinematica del fluido, U è la velocità media del flusso incidente, e D è la dimensione caratteristica del corpo nella direzione normale a quella del flusso. Nella Fig. 12.1 è riportata schematicamente l'effetto del numero di Reynolds sul processo di formazione della scia. Per valori bassi di R_e , circa $R_e < 5$, le linee di flusso seguono il contorno della sezione (flusso non separato). Nell'intervallo $5 \leq R_e \leq 40$, il flusso si separa nella regione a valle del cilindro formando una coppia di vortici simmetrici. Se il numero di Reynolds viene incrementato

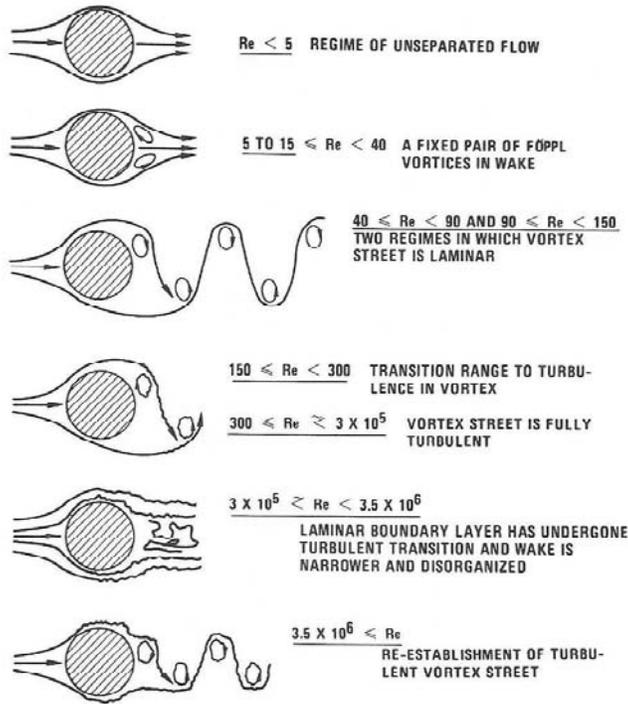


Figura 12.1: Caratteristiche della scia di un cilindro circolare al variare di Re

ulteriormente, $40 < Re \leq 150$, la scia diviene instabile e i vortici si staccano alternativamente dalla regioni laterali del cilindro formando una scia di vortici di tipo laminare (*regime laminare*). Nell'intervallo $150 < Re \leq 300$ la scia comincia a diventare turbolenta anche se lo strato limite superficiale sul cilindro è ancora laminare. I numeri di Reynolds compresi tra $300 < Re \leq 3 \cdot 10^5$ caratterizzano una scia completamente turbolenta (*regime subcritico*). Il *regime critico* si manifesta nell'intervallo $3 \cdot 10^5 < Re \leq 3.5 \cdot 10^6$ ed è caratterizzato da una scia turbolenta e disorganizzata a tal punto che non è più distinguibile il distacco dei vortici. Infine, per $Re > 3.5 \cdot 10^6$ si ha il *regime supercritico* dove riappare nuovamente il distacco dei vortici all'interno di una scia turbolenta.

I vortici si staccano dalle regioni laterali del corpo con una frequenza, f_{vs} , che segue la nota legge del numero di Strouhal:

$$f_{vs} = S_t \frac{U}{D} \quad (12.2)$$

dove S_t è il numero di Strouhal che dipende da diversi parametri, quali ad esempio la forma della sezione ed il numero di Reynolds. Si può facilmente notare che la legge

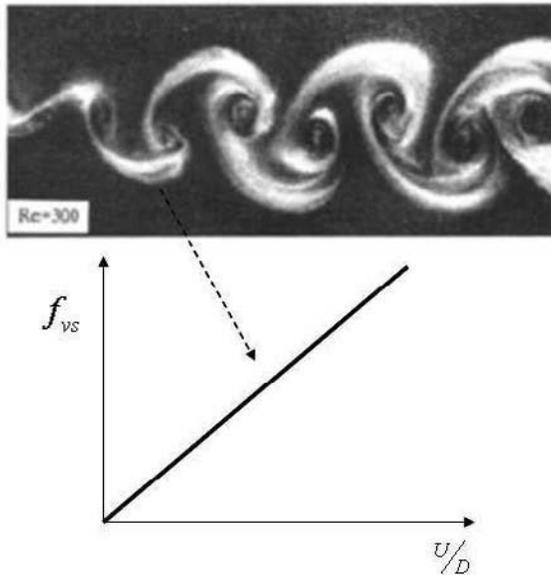


Figura 12.2: Legge del numero di Strouhal

del numero di Strouhal è una legge lineare (Fig. 12.2).

12.2 Sincronizzazione del distacco dei vortici

Quando la frequenza del distacco dei vortici uguaglia la frequenza di oscillazione trasversale del cilindro elasticamente sospeso o ad elasticità diffusa, si instaura una complessa interazione fluido-struttura che si traduce in notevoli ampiezze di oscillazione, pari addirittura al diametro del cilindro per cilindri poco smorzati. La sincronizzazione è un fenomeno aeroelastico molto complesso di cui, in questa sede, si ricordano le caratteristiche principali d'interesse strutturale.

Considerando la 12.2, e ponendo $f_{vs} = f_o$, dove f_o è la frequenza di oscillazione trasversale del cilindro, si ottiene la velocità critica, ossia la velocità per la quale si ha la piena sincronizzazione del distacco dei vortici:

$$U_{cr} = \frac{f_o D}{S_t} \quad (12.3)$$

Tuttavia, il fenomeno si estende su un'intervallo di velocità, intorno alla velocità critica, all'interno del quale la legge del numero di Strouhal risulta essere violata (Fig. 12.3 e 12.4). La risposta diminuisce all'aumentare dello smorzamento strutturale e si assesta su valori della velocità critica decrescenti (Fig. 12.3). Inoltre, all'aumentare

dello smorzamento, l'intervallo di sincronizzazione diminuisce ed arretra leggermente (Fig. 12.4).

La massima risposta risulta dipendere fortemente dal parametro *massa smorzamento*:

$$K_s = \frac{m\nu_s}{\rho D^2} \quad (12.4)$$

dove m è la massa per unità di lunghezza, ρ è la densità dell'aria, ν_s è il rapporto di smorzamento meccanico, e D è la dimensione trasversale della sezione del corpo. Generalmente si preferisce fare riferimento al numero di Scruton:

$$S_c = 4\pi K_s = \frac{4\pi m\nu_s}{\rho D^2} \quad (12.5)$$

ed esistono alcune relazioni matematiche che esprimono la massima ampiezza di oscillazione in funzione del numero di Scruton: si riportano la relazione di Griffin and Ramberg [8]:

$$\left(\frac{y}{d}\right)_{max} = \frac{1.29}{[1 + 0.43 (2\pi S_t^2 S_c)]^{3.35}} \quad (12.6)$$

e quella di Sarpkaya [14]:

$$\left(\frac{y}{d}\right)_{max} = 1.12e^{-1.05S_G} \quad (12.7)$$

dove S_G è il numero di Skop-Griffin ed è un ulteriore parametro di *massa smorzamento*. In Fig. 12.5 sono riportati alcuni risultati sperimentali comparati con le curve teoriche nelle relazioni 12.6 e 12.7.

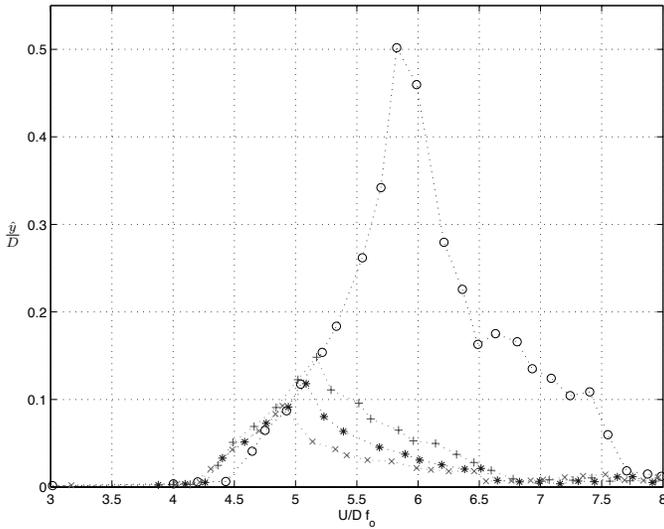


Figura 12.3: Ampiezza adimensionale di oscillazione, \hat{y}/D , al variare dello smorzamento ν_s e del numero di Scruton S_c : o $\nu_s = 0.243\%$, $S_c = 3.1632$; + $\nu_s = 0.388\%$, $S_c = 5.05$; * $\nu_s = 0.459\%$, $S_c = 5.98$; X $\nu_s = 0.502\%$, $S_c = 6.54$; $S_t = 0.2074$. Pastò [12]

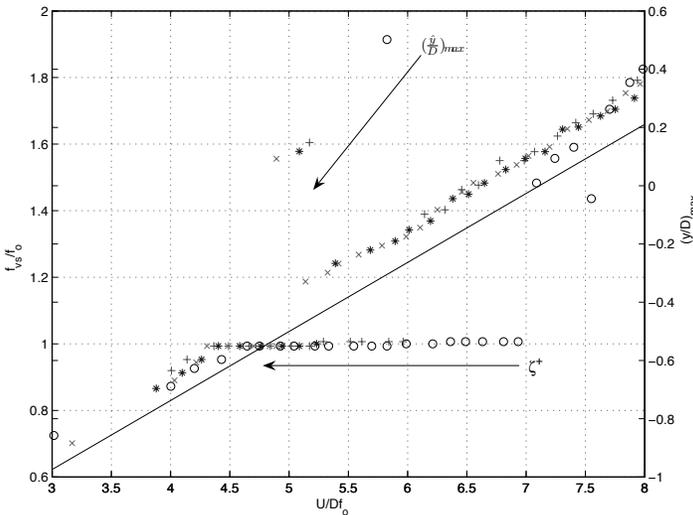


Figura 12.4: Intervallo di sincronizzazione al variare dello smorzamento ν_s e del numero di Scruton S_c : o $\nu_s = 0.243\%$, $S_c = 3.1632$; + $\nu_s = 0.388\%$, $S_c = 5.05$; * $\nu_s = 0.459\%$, $S_c = 5.98$; X $\nu_s = 0.502\%$, $S_c = 6.54$; $S_t = 0.2074$. Pastò [12]

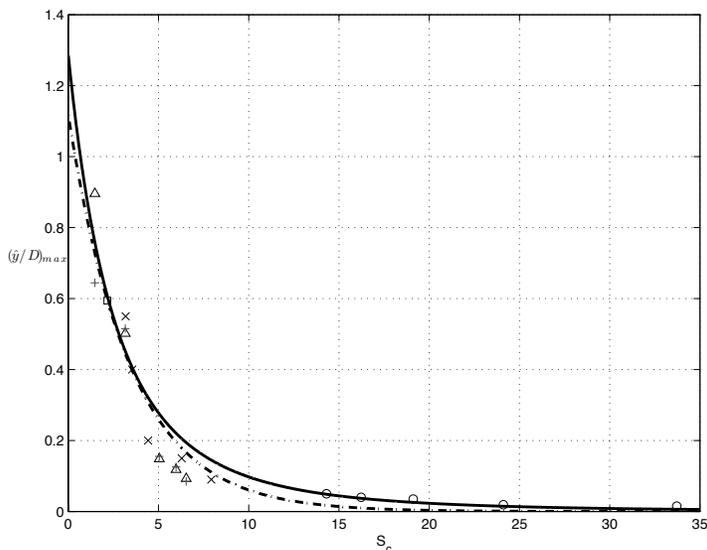


Figura 12.5: Smooth flow: $(\frac{y}{d})_{max}$ in funzione di S_c : – Griffin and Ramberg [8] (Eq. 12.6); - - Sarpkaya [14] (Eq. 12.7); ○ Goswami et al. [7]; × Feng [6]; +, △ Pastò [12]

Un'altra caratteristica del fenomeno della sincronizzazione è l'aumento della correlazione della forzante di Lift lungo il cilindro (Fig. 12.6). Per ampiezze di oscillazioni molto elevate la forza di Lift risulta quasi completamente correlata, mentre la risposta diviene isteretica, ossia raggiungendo la sincronizzazione per velocità crescenti o decrescenti si ottengono due curve differenti (Fig. 12.8).

Da un punto di vista strutturale è importante ricordare che sebbene la risposta possa essere notevolmente amplificata dall'interazione fluido-struttura, le oscillazioni strutturali non divergono ossia presentano un ciclo limite per una data velocità compresa nell'intervallo di sincronizzazione (Fig. 12.7). Ciò permette di poter mitigare la risposta agendo, ad esempio, sullo smorzamento strutturale.

12.3 Risposta across-wind delle strutture

In questa sezione viene proposto il modello di Vickery and Basu [18], valido per strutture snelle verticali a sezione circolare (e.g., ciminiera, torri di telecomunicazioni etc.), che può essere esteso a qualsiasi tipo di sezione, previa conoscenza dei parametri necessari per l'analisi.

I parametri che ricorrono nel modello di Vickery and Basu [18] hanno origine da dati sperimentali su cilindri circolari elasticamente sospesi (Fig. 12.9).

L'equazione di moto associata al generico modo di vibrare è la seguente:

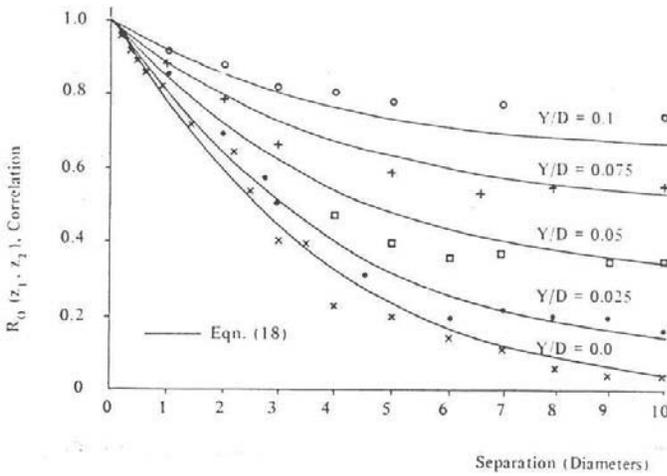


Figura 12.6: Correlazione della forzante di Lift lungo il cilindro in condizione di sincronizzazione

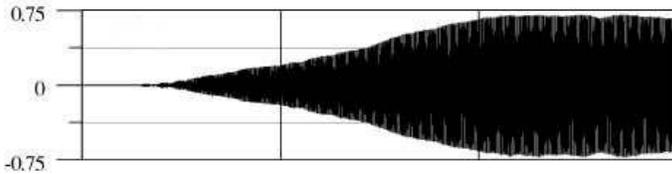


Figura 12.7: Ciclo Limite della risposta in condizioni di sincronizzazione del distacco dei vortici

$$\ddot{y} + 2\nu_s\omega_o\dot{y} + \omega_o^2y = \frac{\int_0^h \psi(z)F(z,t)dz}{\int_0^h \psi^2(z)m(z)dz} = \frac{\int_0^h \psi(z) [F_{vs}(z,t) + F_v(z,t) + F_{ae}(z,t)] dz}{\int_0^h \psi^2(z)m(z)dz} \quad (12.8)$$

dove $\omega_o = 2\pi f_o$ è la frequenza angolare della struttura, associata al generico modo di vibrare. L'equazione 12.8 è ottenuta mediante una decomposizione modale del problema dinamico della struttura (§ 9.5). La risposta strutturale across-wind associata a tale modo di vibrare sarà dunque data da:

$$Y(z,t) = \psi(z)y(t) \quad (12.9)$$

Vediamo in dettaglio le vari componenti della forzante $F(z,t)$, supposte scorrelate tra loro:

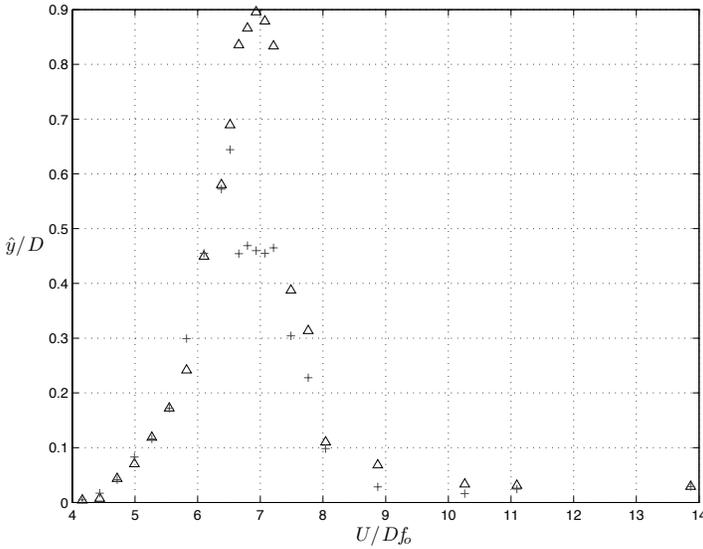


Figura 12.8: Isteresi dell'ampiezza adimensionale di oscillazione, \hat{y}/D . \triangle velocità crescente; + velocità decrescente. Pastò [12]

12.3.1 Forzante dovuta al distacco dei vortici

Il distacco dei vortici induce una forzante normale alla direzione del vento (forza di Lift) pseudo-armonica:

$$F_{vs}(z, t) = \frac{1}{2} \rho \mu_U^2 D(z) C_L(z, t) \quad (12.10)$$

dove $D(z)$ è la dimensione normale al vento (nella presente trattazione è il diametro della struttura). La quantità $C_L(z, t)$ è il coefficiente di Lift per unità di lunghezza, e $\sigma_{C_L}^2$ è la sua varianza. La densità spettrale del coefficiente di Lift è generalmente espressa come segue:

$$S_{C_L}(z, f) = \frac{\sigma_{C_L}^2}{\sqrt{\pi} B f_{vs}} e^{\left[- \left(\frac{1-f/f_{vs}}{B} \right)^2 \right]} \quad (12.11)$$

ossia come una sorta di campana di Gauss (Fig. 12.10) la cui larghezza è determinata dal parametro B che dipende dall'intensità di turbolenza:

$$B^2 = B_0^2 + 2I_u^2 \quad (12.12)$$

dove B_0 è il valore di B in flusso laminare, generalmente compreso tra 0.05 e 0.1.

Tenendo presente la 12.8, la correlazione della forzante indotta dal distacco dei

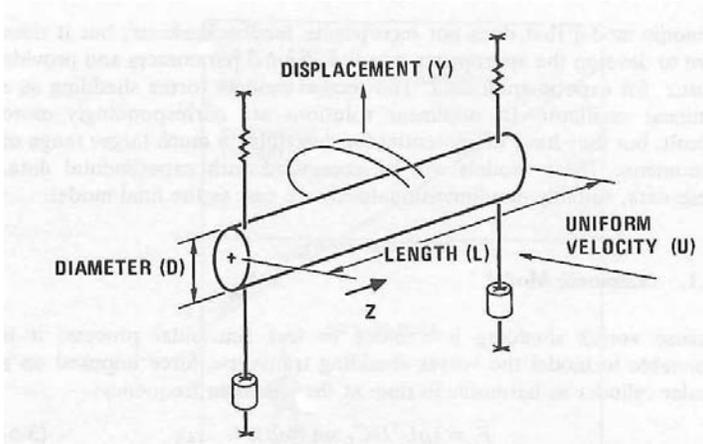


Figura 12.9: Modello di un cilindro circolare elasticamente sospeso

vortici è data dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 R_{F_{vs}F_{vs}}(\tau) &= \int_0^h \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho \mu_U^2 \right)^2 D(z_1) D(z_2) E [C_L(z_1, t) C_L(z_2, t + \tau)] \times \\
 &\times \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \int_0^h \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho \mu_U^2 \right)^2 D(z_1) D(z_2) R_{C_L C_L}(z_1, z_2, \tau) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2
 \end{aligned} \tag{12.13}$$

Operando la trasformata di Fourier della 12.13 si ottiene lo spettro della forzante di Lift:

$$\begin{aligned}
 S_{F_{vs}F_{vs}}(f) &= \int_0^h \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho \mu_U^2 \right)^2 D(z_1) D(z_2) S_{C_L}(z_1, z_2, f) \times \\
 &\times \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \int_0^h \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho \mu_U^2 \right)^2 D(z_1) D(z_2) \sqrt{S_{C_L C_L}(z_1, f) S_{C_L C_L}(z_2, f)} \times \\
 &\times Coh_{vs}(z_1, z_2, f) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2
 \end{aligned} \tag{12.14}$$

dove la funzione di coerenza è indipendente dalla frequenza

$$Coh_{vs}(z_1, z_2, f) = \cos\left(\frac{2|z_1 - z_2|}{3}\right) e^{\left[-\left(\frac{|z_1 - z_2|}{3}\right)^2\right]} \tag{12.15}$$

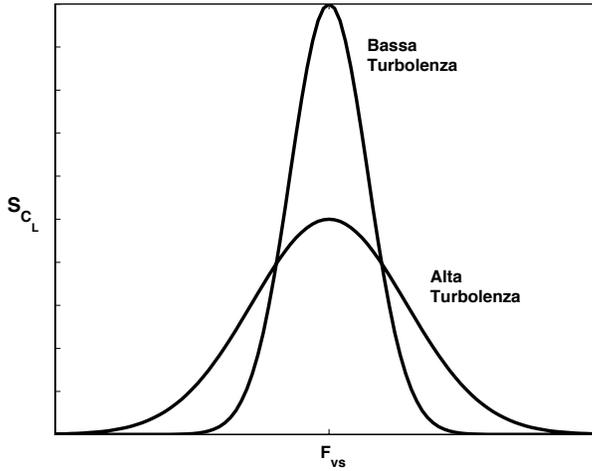


Figura 12.10: Spettro di C_L al variare della turbolenza

12.3.2 Forzante dovuta alla turbolenza laterale

Nell'ambito della teoria quasi-stazionaria linearizzata, la turbolenza trasversale associata alla velocità v (lungo y) ha l'effetto di cambiare l'angolo d'attacco α ($\alpha \approx v/\mu U$) della velocità media μU . Ne consegue una forzante del tipo:

$$F_v(z, t) = \frac{1}{2} \rho D(z) C_D(z) v \mu U \quad (12.16)$$

dove C_D è il coefficiente di trascinamento per unità di lunghezza. Lo spettro della forzante indotta dalla turbolenza trasversale è dato da:

$$S_{F_v F_v}(f) = \int_0^h \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho \mu U \right)^2 C_D(z_1) C_D(z_2) D(z_1) D(z_2) \times \\ \times \sqrt{S_{vv}(z_1, f) S_{vv}(z_2, f)} \chi_v^2(f) \text{Coh}_v(z_1, z_2, f) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2 \quad (12.17)$$

dove $\chi^2(f)$ è l'ammettenza della componente turbolenta trasversale, generalmente espressa a partire dall'ammettenza della turbolenza longitudinale u (Vickery and Basu [18]).

12.3.3 Forzanti aeroelastiche

L'interazione aeroelastica tra il flusso e la struttura si traduce in un'amplificazione della risposta che talvolta può essere anche notevole e insostenibile per la struttura.

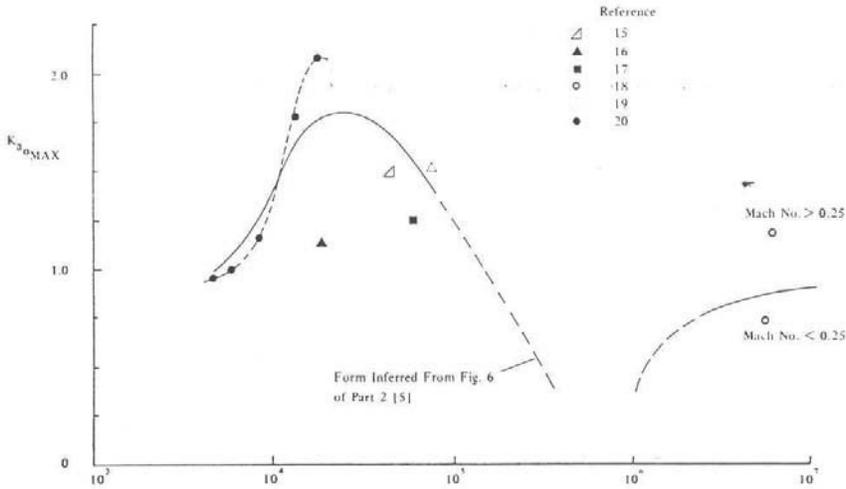


Figura 12.11: Massimo valore di K_{ao} al variare di Re

Per riprodurre numericamente tale amplificazione si ricorre ad una forzante viscosa che induce uno smorzamento aerodinamico: minore è lo smorzamento della struttura maggiore è la risposta strutturale (8.6). Tuttavia, si ricorda che la risposta della struttura è comunque limitata (presenta un ciclo limite) pertanto lo smorzamento totale dovrà essere sempre maggiore di zero. Sperimentalmente si osserva che, per ampiezze di oscillazioni molto grandi, forzanti viscosi lineari non garantiscono un ciclo limite, pertanto si ricorre ad uno smorzamento non-lineare.

In particolare, la forzante aeroelastica di natura viscosa è definita come segue:

$$f_{ae,d}(z, t) = k_a (\dot{Y} - G\dot{Y}^3) \tag{12.18}$$

dove k_a e G sono delle costanti, e $Y(z, t) = \psi(z)y(t)$.

Tuttavia, si preferisce utilizzare comunque una forzante viscosa *linearizzata*, pertanto avremo:

$$f_{ae,d}(z, t) = 4\pi f_o \rho D^2(z) K_{ao} \left[1 - \left(\lambda \frac{\psi(z)\sigma_y}{D(z)} \right)^2 \right] \psi(z)\dot{y}(t) \tag{12.19}$$

dove il termine $(\sigma_y/(\lambda D(z)))^2$ garantisce la presenza di un ciclo limite per oscillazioni molto elevate. Il parametro K_{ao} è definito come segue:

$$K_{ao} = \frac{\beta}{1 + 6I_u} e^{\left\{ - \left[\frac{6(1-\beta)}{1+6I_u} \right]^2 \right\}} \tag{12.20}$$

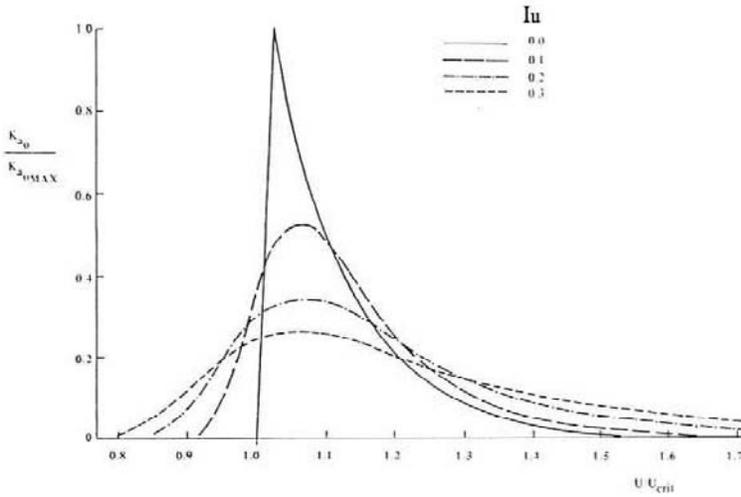


Figura 12.12: $K_{a0}/K_{a0,max}$ al variare di $\mu U/\mu U_{cr}$

dove $\beta = \mu U/\mu U_{cr}$.

La forzante modale (secondo la 12.8) sarà:

$$F_{ae,d} = \dot{y} \int_0^h 4\pi f_o \rho D^2(z) K_{a0} \left[1 - \left(\lambda \frac{\psi(z) \sigma_y}{D(z)} \right)^2 \right] \psi^2(z) dz \quad (12.21)$$

Dal momento che la F_{ae} è proporzionale a \dot{y} allora è possibile definire il coefficiente di smorzamento modale c_{ae} :

$$c_{ae} = 4\pi f_o \rho D_{ref}^2 \left[\int_0^h \left[\frac{D(z)}{D_{ref}} \right]^2 K_{a0} \psi^2(z) dz - \frac{\lambda^2 \sigma_y^2}{D_{ref}^2} \int_0^h K_{a0} \psi^4(z) dz \right] \quad (12.22)$$

avendo moltiplicato e diviso la forzante $f_{ae,d}$ per un diametro di riferimento, D_{ref}^2 .

Si introduce la massa equivalente m_e :

$$m_e = \frac{\int_0^h \psi^2(z) m(z) dz}{\int_0^h \psi^2(z) dz} \quad (12.23)$$

e possiamo dunque scrivere (sempre con riferimento alla 12.8):

$$2\nu_{ae}\omega_o = -\frac{c_{ae}}{m_e} \quad (12.24)$$

da cui si ottiene infine il rapporto di smorzamento aeroelastico, ν_{ae}

$$\nu_{ae} = -\frac{\rho D_{ref}^2}{m_e} \left[c_1 - c_2 \left(\frac{\sigma_y}{D_{ref}} \right)^2 \right] \quad (12.25)$$

essendo

$$c_1 = \frac{\int_0^h K_{ao} \left[\frac{D(z)}{D_{ref}} \right]^2 \psi(z)^2 dz}{\int_0^h \psi^2(z) dz} \quad (12.26)$$

$$c_2 = \lambda^2 \frac{\int_0^h K_{ao} \psi^4(z) dz}{\int_0^h \psi^2(z) dz} \quad (12.27)$$

Inoltre, sperimentalmente si osserva che entro l'intervallo di sincronizzazione, il flusso e la struttura si sincronizzano non solo per valori di $f_{vs}/f_0 = 1$, ma anche per valori che si discostano dall'unità. Ciò giustifica l'introduzione di una forzante che induce una rigidezza aerodinamica:

$$f_{ae,k}(z, t) = 8\pi^2 f_o^2 \rho D^2(z) H_a \psi(z) y(t) \quad (12.28)$$

dove l'andamento di H_a è riportato in Fig. 12.13. Sebbene per strutture immerse in un campo di vento si può assumere $f_{vs}/f_0 = 1$ (che equivale a porre $H_a = 0$) la componente in fase della forzante aeroelastica, $f_{ae,k}$, gioca un ruolo fondamentale da un punto di vista fisico (cfr., e.g., Pastò [12]) per l'innesco del fenomeno della sincronizzazione. In questa sede si preferisce non appesantire la trattazione della sincronizzazione del distacco dei vortici, e assumeremo trascurabile la componente in fase della forzante aeroelastica, pertanto $F_{ae}(z, t) = F_{ae,d}$.

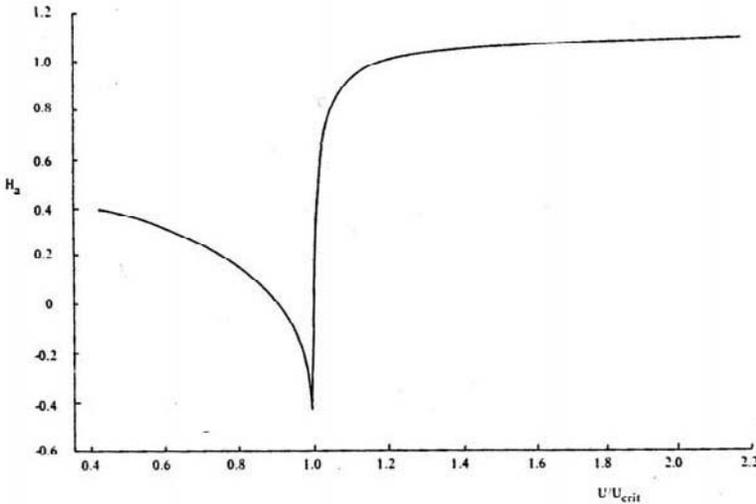


Figura 12.13: H_a al variare di $\mu U/\mu U_{cr}$

12.3.4 Valutazione della risposta strutturale sincronizzata

Come più volte menzionato nei capitoli precedenti, la risposta del sistema (decomposto) ad un grado di libertà (Eq. 12.8) può essere calcolata nel dominio delle frequenze secondo la formula:

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{FF}(\omega) \quad (12.29)$$

dove l'ammettenza strutturale è definita come al solito nel seguente modo:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{M^2 \omega_o^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{f^2}{f_o^2}\right)^2 + 4\nu_t^2 \left(\frac{f}{f_o}\right)^2 \right]} \quad (12.30)$$

con

$$M = \int_0^h \psi^2(z) m(z) dz \quad (12.31)$$

$$\nu_t = \nu_s + \nu_{ae} \quad (12.32)$$

Lo spettro della forzante invece è dato dalle relazioni 12.14 e 12.17:

$$S_{FF}(f) = S_{F_{vs}F_{vs}}(f) + S_{F_vF_v}(f) \quad (12.33)$$

nell'ipotesi che la forzante indotta dal distacco dei vortici e quella dovuta alla turbolenza laterale siano scorrelate.

Siamo alla ricerca della varianza della risposta che nel caso di spettri unilateri viene calcolata come segue:

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty S_{yy}(f) df = \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 S_{FF}(f) df \quad (12.34)$$

In condizioni di sincronizzazione avremo $f_{vs} = f_o$, pertanto la varianza della risposta potrà essere scritta nel seguente modo:

$$\sigma_y^2 = S_{FF}(f_o) \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (12.35)$$

da cui si ricava:

$$\sigma_y^2 = \frac{S_{F_{vs}F_{vs}}(f) + S_{F_vF_v}(f)}{(4\pi f_o)^3 M^2 (\nu_s + \nu_{ae})} \quad (12.36)$$

La massima risposta sarà data da:

$$y_e = \mu_y + k_p \sigma_y = k_p \sigma_y \quad (12.37)$$

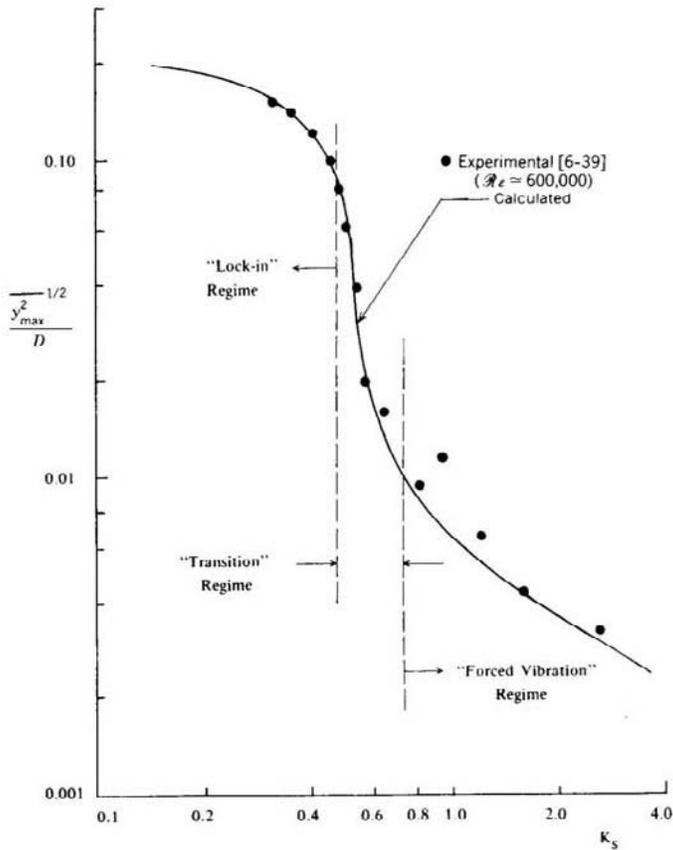


Figura 12.14: σ_y/D al variare di K_s

dove $\mu_y = 0$ dal momento che le fluttuazioni indotte dal distacco dei vortici, sia in regime stazionario sia in condizioni di sincronizzazione, hanno media nulla. Con k_p si indica il fattore di picco che può essere calcolato con le consuete formule. La risposta massima modale sarà data da:

$$Y_e(z) = \psi(z)y_e \quad (12.38)$$

L'andamento della risposta adimensionalizzata in funzione del parametro K_s (definito nell'Eq. 12.4) è riportato in Fig. 12.14, dove si vede che le ampiezze in condizione di sincronizzazione (*Lock-In*) sono decisamente maggiori rispetto a quelle in regime *forzato* dove l'interazione aeroelastica svanisce.

13

Risposta strutturale across-wind secondo L'Eurocodice 1

La risposta in condizioni di sincronizzazione contemplata dall'Eurocodice-1 [5] si basa sul modello di Ruscheweyh [13] che viene qui riproposto.

13.1 Modello di Ruscheweyh

L'equazione di moto associata al generico modo di vibrare è data dalla seguente relazione:

$$\ddot{y} + 2\nu_s\omega_o\dot{y} + \omega_o^2y = \frac{\int_0^h \psi(z)f(z,t)dz}{\int_0^h \psi^2(z)m(z)dz} \quad (13.1)$$

dove $\omega_o = 2\pi f_o$ è la frequenza angolare della struttura, associata al generico modo di vibrare. L'Eq. 13.1 è ottenuta mediante una decomposizione modale del problema dinamico della struttura (§ 9.5). La risposta strutturale across-wind associata a tale modo di vibrare sarà dunque data da:

$$Y(z,t) = \psi(z)y(t) \quad (13.2)$$

Ruscheweyh introduce la seguente forzante dovuta al distacco dei vortici in condizioni di sincronizzazione:

$$f(z,t) = q(z)D(z)c_f(z)\cos(2\pi f_o t + \gamma(z)\pi) \quad (13.3)$$

dove q e D sono rispettivamente la pressione dinamica ed il diametro della struttura alla generica quota z , e $c_f(z)$ è un coefficiente aerodinamico. Nel caso in cui il modo di vibrare non presenti punti nodali, possiamo porre $\gamma(z) = 0$, e la forza modale sarà data da:

$$F(z, t) = \cos(2\pi f_o t) \int_0^h \psi(z) q(z) D(z) c_f(z) dz \quad (13.4)$$

In condizione di sincronizzazione, $f_{vs} = f_o$, si ottiene la seguente risposta massima (ricordando che $\mu_y = 0$):

$$Y_{max} = \psi_{max} y_{max} = \psi_{max} k_p \sigma_y \quad (13.5)$$

dove k_p è il fattore di picco e σ_y è data da:

$$\sigma_y = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \delta(f - f_o) df} \int_0^h \psi(z) q(z) D(z) c_f(z) dz \quad (13.6)$$

ottenuta tenendo presente che il secondo integrale è una costante. La funzione $\delta(f - f_o)$ è il δ di Dirac, e corrisponde allo spettro di $\cos(2\pi f_o t)$. La funzione sotto radice, $\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \delta(f - f_o) df$, è definita solo per $f = f_o$, pertanto otteniamo:

$$\sigma_y = \frac{1}{(2\pi f_o)^2 m_e} \frac{1}{2\nu_s} \frac{\int_0^h \psi(z) q(z) D(z) c_f(z) dz}{\int_0^h \psi^2(z)} \quad (13.7)$$

ricordando che:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{M^2 \omega_o^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{f^2}{f_o^2}\right)^2 + 4\nu_t^2 \left(\frac{f}{f_o}\right)^2 \right]} \quad (13.8)$$

$$M = \int_0^h m(z) \psi^2(z) \quad (13.9)$$

$$m_e = \frac{M}{\int_0^h \psi^2(z)} \quad (13.10)$$

Definita con z^* la quota in cui avviene la sincronizzazione possiamo scrivere la massima risposta in questo modo:

$$\frac{Y_{max}}{D(z^*)} = \psi_{max} \frac{1}{(2\pi f_o)^2 m_e} \frac{1}{2\nu_s} \frac{1}{2} \rho U^2(z^*) k_p \frac{\int_0^h \psi(z) \frac{q(z)}{q(z^*)} \frac{D(z)}{D(z^*)} c_f(z) dz}{\int_0^h \psi^2(z)} \quad (13.11)$$

dove la pressione dinamica $q(z^*) = \frac{1}{2} \rho U^2(z^*) D(z^*)$. Inoltre, ricordando la definizione del numero di Scruton:

$$S_c = \frac{4\pi\nu_s m_e}{\rho D^2} \quad (13.12)$$

e del numero di Strouhal

$$S_t = \frac{f_{vs} D}{U} \quad (13.13)$$

considerando una struttura a sezione costante $D(z) = D$, e un profilo di velocità uniforme, $q(z) = q$, si ottiene:

$$\frac{Y_{max}}{D(z^*)} = \psi_{max} \frac{1}{S_c} \frac{1}{S_t^2} k_p \frac{\int_0^h \psi(z) c_f(z) dz}{4\pi \int_0^h \psi^2(z)} \quad (13.14)$$

A questo punto si introduce la lunghezza di correlazione, L^* definita come il doppio dell'integrale della funzione di cross-correlazione della forzante. In particolare Ruscheweyh pone:

$$k_p \int_0^h c_f(z) \psi(z) dz = c_{lat} k_p \int_{L^*} \psi(z) dz \quad (13.15)$$

dove c_{lat} è la deviazione standard della forzante applicata.

Successivamente, Ruscheweyh introduce l'*lunghezza effettiva di correlazione*, L_e , tale che:

$$k_p \int^{L^*} \psi(z) dz = \int^{L_e} \psi(z) dz \quad (13.16)$$

Infine la massima risposta in regime di sincronizzazione viene scritta nel seguente modo:

$$\frac{Y_{max}}{D(z^*)} = K_\psi K_w c_{lat} \frac{1}{S_c} \frac{1}{S_t^2} \quad (13.17)$$

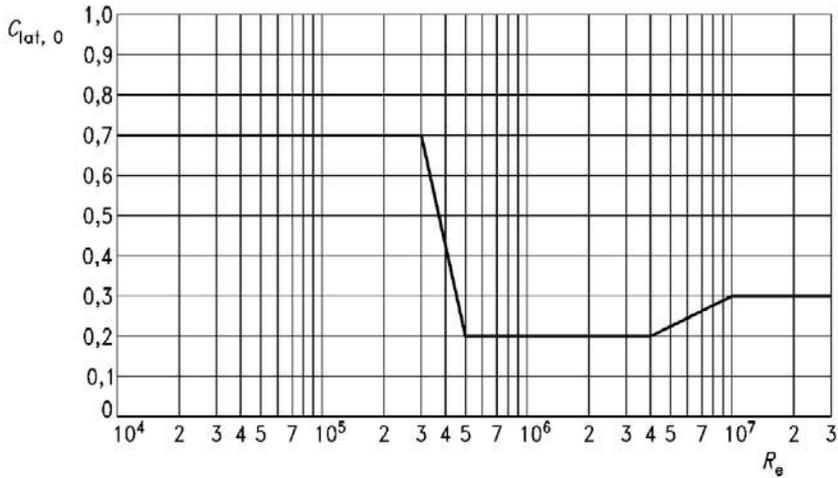
dove:

$$K_\psi = \psi_{max} \frac{\int_0^h \psi(z) dz}{4\pi \int_0^h \psi^2(z)} \quad (13.18)$$

$$K_w = \frac{\int^{L_e} \psi(z) dz}{\int_0^h \psi(z) dz} \quad (13.19)$$

Tabella 13.1: Valori del coefficiente aerodinamico c_{lat}

Rapporto critico di velocità del vento	$c_{lat,0}$
$\frac{V_{crit,i}}{V_{m,Lj}} \leq 0.83$	$c_{lat} = c_{lat,0}$
$0.83 < \frac{V_{crit,i}}{V_{m,Lj}} < 1.25$	$c_{lat} = \left(3 - 2.4 \frac{V_{crit,i}}{V_{m,Lj}}\right) c_{lat,0}$
$1.25 \leq \frac{V_{crit,i}}{V_{m,Lj}}$	$c_{lat} = 0$

Figura 13.1: Valori di $c_{lat,0}$ per cilindri circolari

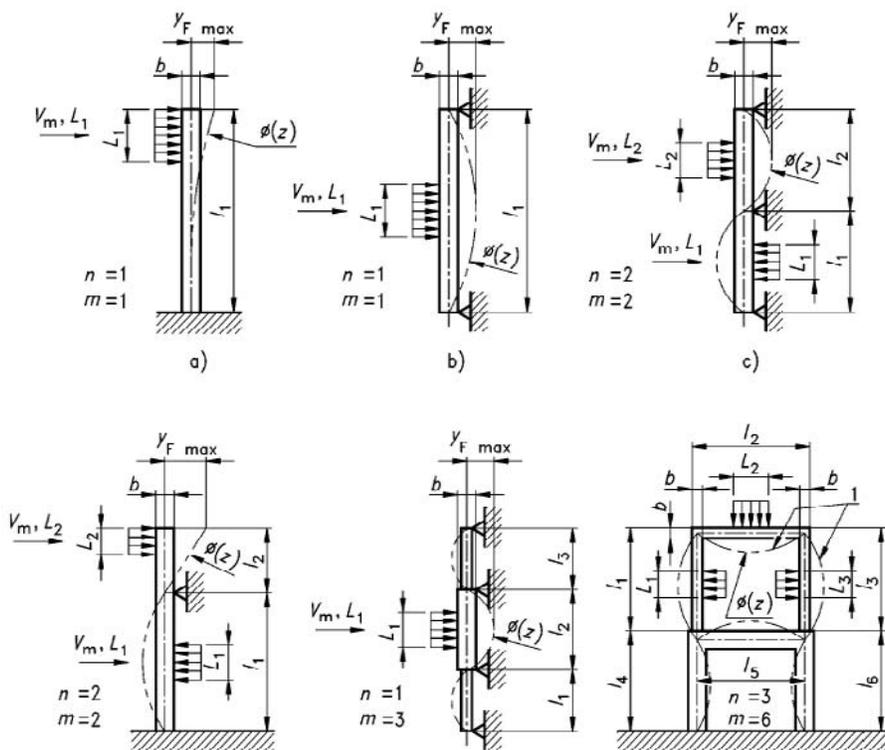


Figura 13.2: Esempi di lunghezza effettiva di correlazione

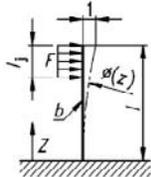
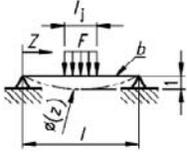
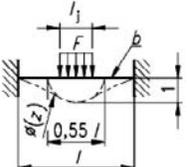
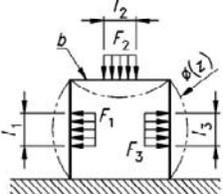
Struttura	Forma modale $\Phi(z)$	K_w	K
	vedere C.4.3 con $\xi = 2,0$ $n = 1; m = 1$	$3 \cdot \frac{L_1/b}{\lambda} \left[1 - \frac{L_1/b}{\lambda} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L_1/b}{\lambda} \right)^2 \right]$	0,13
	vedere figura C.9 $n = 1; m = 1$	$\cos \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{L_1/b}{\lambda} \right) \right]$	0,10
	vedere figura C.9 $n = 1; m = 1$	$\frac{L_1/b}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen} \left[\pi \cdot \left(1 - \frac{L_1/b}{\lambda} \right) \right]$	0,11
	analisi modale $n = 3$ $m = 3$	$\frac{\sum_{i=1}^m \int_{L_i} \Phi(z) \cdot dz}{\sum_{i=1}^m \int_{L_i} \Phi(z) \cdot dz}$	0,10

 Figura 13.3: Valori di K_w

14

Risposta aeroelastica delle strutture

Le strutture aventi una sezione non circolare sono soggette ad una forzante fluida che cambia con l'orientamento del corpo rispetto al flusso. Se la struttura oscilla, la sua posizione cambia e la forzante fluida oscilla a sua volta. Se la forzante fluida tende ad aumentare le oscillazioni strutturali, la struttura diviene instabile e si possono manifestare grandi ampiezze di oscillazione.

In questo capitolo studieremo la risposta alle oscillazioni *galoppanti* e in regime di *Flutter*.

14.1 Galloping traslazionale

L'analisi delle oscillazioni galoppanti si basa sull'ipotesi secondo la quale la forzante fluida agente sulla struttura dipende soltanto dalla velocità eolica istantanea (*teoria quasi-statica*), pertanto il fenomeno può essere studiato in galleria del vento su modelli stazionari, misurando la forza fluida al variare dell'angolo d'attacco.

È doveroso ricordare che la teoria quasi-statica può essere ritenuta valida soltanto se la frequenza di distacco dei vortici, f_{vs} , è molto più grande della frequenza propria di oscillazione della struttura, f_o . La condizione $f_{vs} \gg f_o$ è verificata se:

$$\frac{U}{f_o D} > 20 \quad (14.1)$$

dove $\frac{U}{f_o D}$ è la velocità ridotta, $U = \mu U$ è la velocità media del flusso, e D è la dimensione trasversale della sezione strutturale.

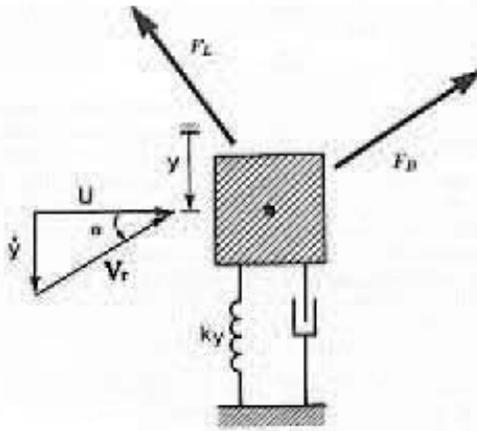


Figura 14.1: Modello ad un grado di libertà per le oscillazioni galoppanti

Tuttavia, alcune strutture presentano oscillazioni galoppanti per valori della velocità ridotta compresi nell'intervallo $1 \div 20$ ($1 \leq \frac{U}{f_o D} \leq 20$), intervallo in cui l'applicazione della teoria quasi-statica è molto discutibile.

In Fig. 14.1 è schematizzato il modello di un sistema ad un solo grado di libertà che si muove con velocità \dot{y} , e soggetto ad una forzante di Lift ed una di Drag espresse come segue:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V_r^2 D C_L \quad (14.2)$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V_r^2 D C_D \quad (14.3)$$

e dirette rispettivamente ortogonalmente e parallelamente alla direzione della velocità relativa $V_r = \sqrt{U^2 + \dot{y}^2}$. I coefficienti C_L e C_D sono chiaramente i coefficienti di Lift e di Drag.

Il moto del sistema cambia la sua posizione rispetto alla velocità del flusso che di per sé risulta inclinata di un angolo α rispetto alla direzione del flusso indisturbato:

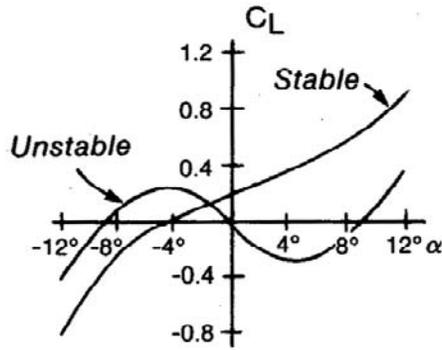
$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{U} \right) \quad (14.4)$$

L'equazione di moto del sistema sarà dunque:

$$\ddot{y} + 2\nu_s \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y = \frac{1}{m} F_y(\alpha) \quad (14.5)$$

dove:

$$F_y(\alpha) = \frac{1}{2} \rho V_r^2 D C_y(\alpha) \quad (14.6)$$


 Figura 14.2: Esempio di curve stabili ed instabili per C_L

$$C_y(\alpha) = -[C_L \cos(\alpha) + C_D \sin \alpha] \quad (14.7)$$

Per piccoli angoli d'attacco ($\alpha \rightarrow 0$), linearizzando le quantità d'interesse, si ottiene:

$$\alpha \cong \frac{\dot{y}}{U} \quad (14.8)$$

$$V_r \cong U \quad (14.9)$$

$$C_y(\alpha) \cong C_y(0) + C_{y,\alpha}(0) \alpha = -C_L(0) - [C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] \alpha \quad (14.10)$$

con $C_{(\cdot),\alpha} = \partial C_{(\cdot)}/\partial \alpha$.

Possiamo quindi scrivere l'equazione di moto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\nu_s \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y &= \frac{1}{2m} \rho V_r^2 D C_y(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2m} \rho U^2 D \left\{ -C_L(0) - [C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] \frac{\dot{y}}{U} \right\} \end{aligned} \quad (14.11)$$

ossia:

$$\ddot{y} + 2\omega_y \left\{ \nu_s + \frac{\rho U D}{4m\omega_y} [C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] \right\} \dot{y} + \omega_y^2 y = -\frac{1}{2m} \rho U^2 D C_L(0) \quad (14.12)$$

Dalla 14.12 è facile constatare che il moto della struttura induce una forza fluida viscosa che può essere tenuta in conto definendo uno smorzamento totale dato dalla somma dello smorzamento strutturale e di quello aerodinamico:

$$\nu_t = \nu_s + \frac{\rho U D}{4m\omega_y} [C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] \quad (14.13)$$

da cui si evince subito che il sistema è stabile se:

$$[C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] > 0 \quad (14.14)$$

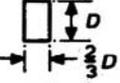
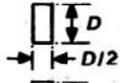
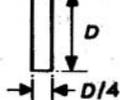
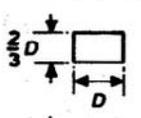
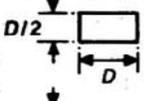
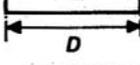
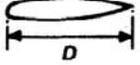
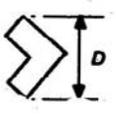
Section	$\partial C_y / \partial \alpha^2$		Reynolds number
	Smooth flow	Turbulent flow ^b	
	3.0	3.5	10^5
	0.	-0.7	10^5
	-0.5	0.2	10^5
	-0.15	0.	10^3
	1.3	1.2	66 000
	2.8	-2.0	33 000
	-10.	—	2 000–20 000
	-6.3	-6.3	$>10^3$
	-6.3	-6.3	$>10^3$
	-0.1	0.	66 000
	-0.5	2.9	51 000
	0.66	—	75 000

Figura 14.3: $C_{L,\alpha}$ sezioni. Per $C_{L,\alpha} < 0$ ovvero $C_{L,\alpha} + C_D > 0$ l'equilibrio risulta stabile

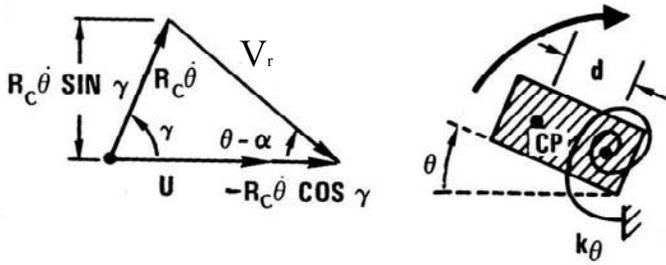


Figura 14.4: Modello di Galloping torsionale

Infatti, la soluzione dell'equazione di moto può essere scritta:

$$y = \frac{-\frac{1}{2}\rho U^2 DC_L(0)}{k_y} + A_y e^{-\nu_t \omega_y t} \sin\left(\omega_y \sqrt{1 - \nu_t^2} t + \phi\right) \quad (14.15)$$

da cui si evince che se lo smorzamento totale, ν_t , diviene negativo, per effetto di $[C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)] < 0$, la struttura diviene instabile in quanto la sua risposta diverge (si veda l'Eq. 14.15). In Fig. 14.2 sono riportate due curve di esempio per il C_L .

Pertanto, ponendo $\nu_t = 0$, è possibile trovare la velocità eolica critica che induce oscillazioni galoppanti:

$$U_{cr} = \frac{8\pi m f_y \nu_s}{\rho D} \left(\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}\right)^{-1} \quad (14.16)$$

In Fig. 14.3 sono riportati i valori di $C_{y,\alpha} = -[C_{L,\alpha}(0) + C_D(0)]$ per alcune sezioni (Blevins [1]).

14.2 Divergenza e Galloping torsionale

Nel Galloping torsionale, l'angolo d'attacco cambia con la posizione angolare θ e con la velocità angolare $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$. La velocità angolare, $\dot{\theta}$, induce un angolo d'attacco che varia lungo la sezione: una velocità d'attacco positiva induce un angolo d'attacco negativo e viceversa.

Dato un generico punto sulla sezione, l'angolo d'attacco è espresso come segue:

$$\alpha = \theta - \tan^{-1}\left(\frac{R_c \dot{\theta} \sin \gamma}{U - R_c \dot{\theta} \cos \gamma}\right) \quad (14.17)$$

mentre la velocità relativa è data dalla seguente relazione:

$$V_r^2 = \left(R_c \dot{\theta} \sin \gamma\right)^2 + \left(U - R_c \dot{\theta} \cos \gamma\right)^2 \quad (14.18)$$

dove $U = \mu_U$ è la velocità del flusso, e $R = R_c \sin \gamma$ è il raggio caratteristico della sezione. Nel caso di un rettangolo, R è pari a metà larghezza del rettangolo stesso. In generale, R dipende dalla sezione considerata.

Per piccoli angoli di attacco ($\alpha \rightarrow 0$) si ottengono i seguenti valori dell'angolo di attacco e della velocità relativa:

$$\alpha \cong \theta - \frac{R\dot{\theta}}{U} \quad (14.19)$$

$$V_r^2 \cong U^2 \quad (14.20)$$

La sezione sarà pertanto soggetta ad un momento torsionale, per unità di lunghezza, dato dalla seguente relazione:

$$M_\theta = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_M \quad (14.21)$$

che può essere espansa in serie di Taylor fornendo la seguente forzante:

$$M_\theta = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 [C_M(0) + C_{M,\alpha}(0)\alpha + \dots] \quad (14.22)$$

dove:

$$C_{M,\alpha}(0)\alpha = C_{M,\alpha}(0) \left(\theta - \frac{R\dot{\theta}}{U} \right) \quad (14.23)$$

L'equazione di moto del problema dinamico viene scritta nel seguente modo:

$$J_\theta \ddot{\theta} + 2J_\theta \nu_\theta \omega_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_M(0) + \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_{M,\alpha}(0) \left(\theta - \frac{R\dot{\theta}}{U} \right) \quad (14.24)$$

Conviene riscrivere l'equazione di moto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} J_\theta \ddot{\theta} + \left(2J_\theta \nu_\theta \omega_\theta + \frac{1}{2}\rho U R D^2 C_{M,\alpha}(0) \right) \dot{\theta} + \left(k_\theta - \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_{M,\alpha}(0) \right) \theta = \\ = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_M(0) \end{aligned} \quad (14.25)$$

da cui si possono notare due tipi di instabilità, una dinamica (*Gallopping torsionale*), ed una statica (*Divergenza*)

14.2.1 Divergenza

La Divergenza è un'instabilità statica perché si verifica quando la somma della rigidità rotazionale e della rigidità aerodinamica è nulla, ossia quando (cfr. Eq. 14.25):

$$k_\theta - \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_{M,\alpha}(0) = 0 \quad (14.26)$$

che corrisponde alla seguente velocità eolica critica:

$$U_{cr} = \sqrt{\frac{2k_\theta}{\rho D^2 C_{M,\alpha}(0)}} \tag{14.27}$$

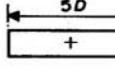
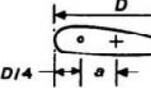
Section	$\partial C_M / \partial \alpha$	Reynolds number
	-0.18	$10^4 - 10^5$
	-0.64	$5 \times 10^3 - 5 \times 10^5$
	-18.	$2 \times 10^3 - 2 \times 10^4$
	-26.	$2 \times 10^3 - 2 \times 10^4$
	$\frac{2\pi a^c}{D}$	$> 10^3$

Figura 14.5: $C_{M,\alpha}(0)$ per alcune sezioni

14.2.2 Galloping torsionale

Nel caso in cui la somma dello smorzamento strutturale e di quello aerodinamico è nulla, si ha il Galloping torsionale la cui velocità critica si calcola analogamente a quanto visto precedentemente per il Galloping traslazionale:

$$2J_\theta \nu_\theta \omega_\theta + \frac{1}{2} \rho U R D^2 C_{M,\alpha}(0) = 0 \tag{14.28}$$

da cui si ottiene la corrispondente velocità critica:

$$U_{cr} = -\frac{4J_\theta \nu_\theta \omega_\theta}{\rho D^2 R} \frac{1}{C_{M,\alpha}(0)} \tag{14.29}$$

In Fig. 14.5 sono riportati i valori di $C_{M,\alpha}(0)$ per alcune sezioni.

14.3 Galloping di sistemi a due gradi di libertà

Nella realtà, le strutture possono sia ruotare che traslare. Pertanto, in questa sezione viene estesa la trattazione precedentemente illustrata, valida quando i due modi di

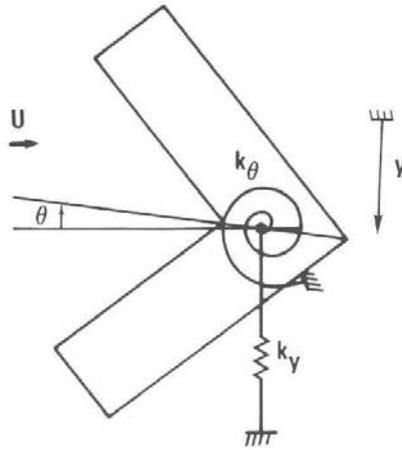


Figura 14.6: Sezione generica a due gradi di libertà

vibrare possono essere considerati indipendenti l'uno dall'altro.

La rotazione e la traslazione di una generica sezione immersa in un campo di vento (si veda la Fig. 14.6), sono aerodinamicamente accoppiate attraverso l'angolo d'attacco che in questo caso si scrive:

$$\alpha = \theta - \frac{R\dot{\theta}}{U} + \frac{\dot{y}}{U} \quad (14.30)$$

Inoltre, la rotazione e la traslazione sono accoppiate inerzialmente quando il centro elastico della sezione non coincide con il centro di massa della sezione stessa. Il centro elastico è quel punto della sezione dove qualsiasi carico che vi è applicato non produce effetti torsionali.

Con riferimento alla Fig. 14.6, l'equazioni di moto del sistema a due gradi di libertà si scrivono come segue:

$$m\ddot{y} + 2m\nu_y\omega_y\dot{y} + S_x\ddot{\theta} + k_y y = \frac{1}{2}\rho U^2 DC_y(\alpha) \quad (14.31)$$

$$J_\theta\ddot{\theta} + 2J_\theta\nu_\theta\omega_\theta\dot{\theta} + S_x\ddot{y} + k_\theta\theta = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 C_M(\alpha) \quad (14.32)$$

dove:

$$m = \int_A \mu_m d\xi d\eta \quad (14.33)$$

$$J_\theta = \int_A (\xi^2 + \eta^2) \mu_m d\xi d\eta \quad (14.34)$$

$$S_x = \int_A \mu_m \xi d\xi d\eta \quad (14.35)$$

sono rispettivamente la massa per unità di lunghezza, il momento di inerzia polare ed il momento statico della sezione. Inoltre, μ_m è la densità di massa, (ξ, η) sono le coordinate di un generico punto sulla sezione.

L'angolo d'attacco α accoppia aerodinamicamente i due gradi di libertà della sezione, θ e y (Eq. 14.30), mentre il momento statico S_x li accoppia inerzialmente.

L'equazioni di moto del sistema risultano pertanto dipendenti tra loro. Tuttavia, attraverso una decomposizione modale è possibile disaccoppiare il sistema che può essere così studiato come la somma degli effetti di due sistemi ad un solo grado di libertà. Tralasciando i passaggi intermedi, si arriva alla definizione della velocità critica che comporta l'instabilità dinamica del sistema:

$$U_{cr} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{-4m\nu_y\omega_y - 4c_2^2 J_\theta \nu_\theta \omega_\theta}{\rho D (Rc_2 + 1) [c_2 DC_{M,\alpha}(0) - C_{y,\alpha}(0)]} \\ \frac{-4c_1^2 m\nu_y\omega_y - 4J_\theta \nu_\theta \omega_\theta}{\rho D (R + c_1) [-c_1 C_{y,\alpha}(0) + DC_{M,\alpha}(0)]} \end{array} \right. \quad (14.36)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti, che derivano dalla decomposizione modale, date dalla seguenti relazioni:

$$c_1 = \frac{S_x \omega_1^2}{m (\omega_y^2 - \omega_1^2)} \quad (14.37)$$

$$c_2 = \frac{S_x \omega_2^2}{J_\theta (\omega_\theta^2 - \omega_2^2)} \quad (14.38)$$

con ω_1 e ω_2 frequenze angolari proprie del sistema. Si può subito notare che se $S_x = 0$, allora $c_1 = c_2 = 0$ ed il sistema risulta disaccoppiato in partenza. In quest'ultimo caso la velocità critica è la minima tra la velocità di Galloping traslazionale e quella di Galloping rotazionale, viste precedentemente.

14.4 Flutter

Il Flutter è un'instabilità dinamica originariamente studiata per i profili alari, e successivamente estesa alle strutture ed in particolar modo ai ponti di grande luce. Il termine Flutter, in realtà, riassume diverse tipologie d'instabilità dinamica: Flutter classico, Stall-Flutter, Flutter ad un grado di libertà.

Il Flutter classico è un fenomeno cui corrisponde l'accoppiamento di due gradi di libertà della struttura, generalmente quello traslazionale e rotazionale, che innesci delle oscillazioni instabili.

Lo Stall-Flutter è un'instabilità legata al moto torsionale della sezione, e indotta da una forzante di lift non lineare in prossimità dello stallo (perdita di portanza).

Il Flutter ad un grado di libertà, include lo Stall-Flutter, ma in generale è associato a quelle sezioni la cui forma è tale da indurre una pronunciata separazione del flusso

in corrispondenza di essa. Sezioni tozze, poco aerodinamiche sono tipici esempi di sezioni strutturali candidate a questo tipo di Flutter.

È doveroso ricordare che, in generale, il Flutter, in tutte le sue forme, coinvolge fenomeni aerodinamici non lineari. Tuttavia, sotto opportune ipotesi, è possibile linearizzare le forzanti indotte dall'interazione fluido-struttura e dunque studiare la soglia di stabilità della struttura. Lo studio dell'evoluzione dell'aerodinamica non stazionaria da cui trae origine il fenomeno, è rimandata a studi specifici generalmente più complessi.

Le ipotesi che permettono lo studio del Flutter delle strutture sono fondamentalmente due: la struttura è elastica lineare smorzata linearmente, e dunque presenta delle oscillazioni armoniche smorzate esponenzialmente; le oscillazioni sono piccole, e si ritiene che la soglia di stabilità sia raggiunta quando tali oscillazioni raggiungono un valore critico corrispondente alla velocità di Flutter. Pertanto, come per il Galloping e la Divergenza, l'analisi si riduce allo studio della velocità critica che porta all'instabilità della struttura, in questo caso dovuta al Flutter. La progettazione aerodinamica della struttura sarà tanto più affidabile quanto più la velocità critica di Flutter sarà alta, o comunque maggiore della velocità eolica di progetto, avente una certa probabilità di eccedenza nel sito dove sorgerà la struttura.

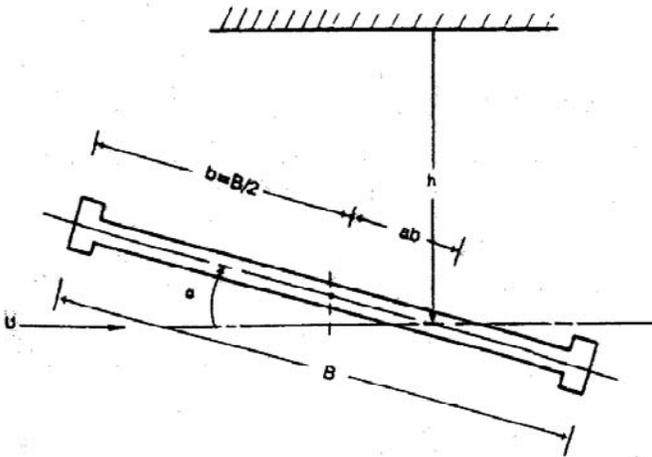


Figura 14.7: Convenzione dei segni per una generica sezione

14.4.1 Equazioni di moto su un impalcato da ponte

In Fig. 14.7 è schematizzata la sezione di un ponte, avente due gradi di libertà: la traslazione verticale, h , e la torsione, α . L'equazione di moto sarà dunque scritta nel

seguinte modo:

$$\begin{cases} m_h \ddot{h} + S_x \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + C_h h = L_h \\ J_\alpha \ddot{\alpha} + S_x \ddot{h} + c_\alpha \dot{\alpha} + C_\alpha \alpha = M_\alpha \end{cases} \quad (14.39)$$

dove S_x è il momento statico della sezione calcolato rispetto all'asse x rivolto nella direzione della velocità media $\mu_U = U$, J_α è il momento polare della sezione, m_h è la massa della sezione, c_h e c_α sono i coefficienti di smorzamento per i rispettivi gradi di libertà, mentre C_h e C_α sono rispettivamente le rigidezze alla traslazione e alla rotazione della sezione.

14.4.2 Forzanti aeroelastiche L_h e M_α per i profili alari sottili

Come accennato precedentemente, il Flutter deriva dalle pratiche aeronautiche. Pertanto, si accenna brevemente l'origine del problema facendo riferimento alla non stazionarietà delle forze aerodinamiche agenti su un profilo alare sottile in moto traslazionale e rotazionale.

Un sezione di forma generica è tale da modificare le linee di flusso del corrente fluida incidente, creando dei disturbi distribuiti lungo la sezione stessa, e addirittura inducendo la separazione del flusso in corrispondenza di essa fino ad innescare la formazione di vortici che defluiscono a valle dando vita ad una scia vorticoso. Pertanto, quello che all'origine era un flusso irrotazionale, diviene un flusso rotazionale in corrispondenza della sezione, e conseguentemente la velocità delle particelle fluide, in prossimità della sezione, non è più tangente alla sezione stessa in quanto si genera una componente verticale della velocità.

Nel caso di un profilo alare stazionario, i disturbi indotti dalla sezione stessa, sono così contenuti che la velocità delle particelle fluide segue il contorno della sezione (sezione streamline), e dunque la portanza che si sviluppa è essenzialmente una forza media con una deviazione standard molto contenuta dal momento che i disturbi del flusso prossimo alla superficie, sono a loro volta molto contenuti.

Se il profilo alare oscilla traslazionalmente e rotazionalmente, le particelle fluide, in corrispondenza della sezione, presentano anche una componente normale alla superficie, sinonimo del fatto che la non stazionarietà del flusso, in questo caso, gioca un ruolo fondamentale inducendo delle forzanti aeroelastiche (dipendenti cioè dal moto della sezione) che allo stato limite ultimo inducono un'instabilità dinamica, nota appunto come Flutter.

Theodorsen [17], utilizzando la teoria del flusso a potenziale, dimostrò che le forzanti L_h e M_h sono lineari in h e α e nelle loro rispettive derivate del primo e secondo ordine. In particolare, Theodorsen arrivò alla definizione di una funzione, nota appunto come *funzione di Theodorsen*, che tiene in conto della non stazionarietà del flusso in prossimità del profilo alare, indotta dal moto della sezione stessa. Tale

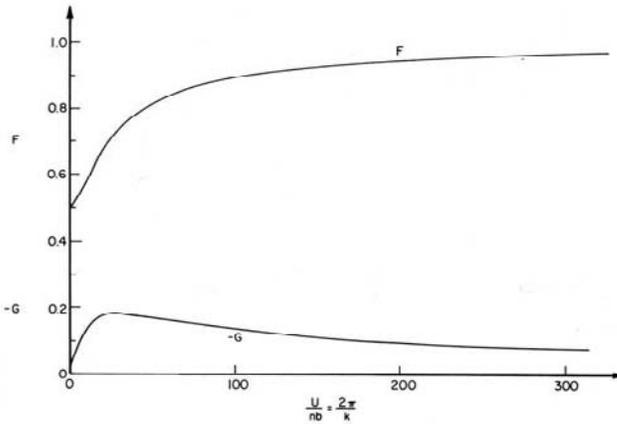


Figura 14.8: Funzione di Theodorsen [17], $C(k) = F(k) + iG(k)$, in funzione della velocità ridotta $U_{rid} = \frac{2\pi}{k}$

funzione, indicata con $C(k)$, è una funzione complessa:

$$C(k) = F(k) + iG(k) \quad (14.40)$$

espressa in funzione della frequenza ridotta

$$k = 2\pi \frac{fb}{U} \quad (14.41)$$

con $b = \frac{B}{2}$, essendo B la larghezza della sezione alare. In particolare, L_h e M_h , per un profilo alare, si esprimono nel seguente modo:

$$L_h = -\rho b^2 \left(U\pi\dot{\alpha} + \pi\ddot{h} - \pi ba\ddot{\alpha} \right) - 2\pi\rho C(k) \left[U\alpha + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (14.42)$$

$$M_\alpha = -\rho b^2 \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} - a \right) Ub\dot{\alpha} + \pi b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} - a\pi b\ddot{h} \right\} + 2\rho U b^2 \pi \left(\frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[U\alpha + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (14.43)$$

dove ab è la distanza di metà sezione dal centro di rotazione (Fig. 14.7).

14.4.3 Forzanti L_h e M_α per impalcati da ponte

Scanlan and Tomko [15] estesero lo studio di Theodorsen [17] alle sezioni da ponte, generalmente aventi spessori non trascurabili. Ciò che ne derivò furono le cosiddette *derivate aeroelastiche* o *derivate di Flutter* (cfr. Scanlan and Tomko [15], Simiu

and Scanlan [16]). La differenza sostanziale con la trattazione originaria di Theodorsen, risiede nel fatto che mentre la funzione di Theodorsen è una funzione nota a priori, le derivate aeroelastiche devono essere necessariamente stimate tramite sperimentazione in galleria del vento, perché rappresentano l'estensione di una teoria esatta fondata su determinate ipotesi che cadono nel caso di sezioni come quelle dei ponti. Basti pensare che la teoria di Theodorsen si basa sull'ipotesi di profili alari sottili assimilabili cioè ad una *lastra piana*, ipotesi che permette di ipotizzare che i disturbi indotti dal moto della sezione, e da cui trae origine la non stazionarietà del flusso superficiale, possano essere intesi come uniformemente distribuiti sull'intera sezione stessa. Tramite un espediente geniale, ossia tramite una trasformazione conforme, che trasforma la lastra piana in una circonferenza, Theodorsen riuscì a rendere la sezione alare una sezione streamline *anche* del flusso non stazionario. Grazie a tale espediente, congiuntamente all'ipotesi di non stazionarietà uniformemente distribuita, Theodorsen poté applicare i fondamentali concetti di base della fluidodinamica e quindi trovare l'espressione delle forzanti aeroelastiche di lift e di momento che abbiamo visto precedentemente.

È ben evidente che gli impalcati da ponte hanno sezioni con spessori tutt'altro che trascurabili, responsabili dei disturbi del flusso che non solo non possono essere intesi come uniformemente distribuiti (basta pensare al distacco del flusso in prossimità di uno spigolo a monte della sezione, seguito da un riattacco a valle della sezione, oppure che si propaghi nella scia senza nemmeno riattaccarsi alla sezione stessa), ma variano anche tra intradosso e extradosso della sezione stessa.

Per questo le derivate aeroelastiche andrebbero usate e, ancor prima, ricavate con molta cautela. Si ricorda, infatti, che le forzanti espresse in funzione delle derivate aeroelastiche sono lineari e poiché soltanto per valori di $k \rightarrow 0$ tali forzanti *lineari* assumono il loro valore *quasi-stazionario* (nel caso delle sezioni alari sottili $C(k) \rightarrow 1$ per $k \rightarrow 0$, come si vede dalla Fig. 14.8), allora qualora, durante la sperimentazione, si lavori con valori di $k \gg 0$ bisognerebbe porre notevole attenzione alle condizioni iniziali impresse al sistema: ampiezze iniziali di oscillazione relativamente grandi, per valori di $k \gg 0$, inducono una non stazionarietà che si traduce in forzanti tutt'altro che lineari. Pertanto, le derivate aeroelastiche rischierebbero di non essere univoche, ma dipendenti dall'ampiezza di oscillazione iniziale, visto che per definizione l'interazione aeroelastica tra fluido e struttura si instaura per effetto della non stazionarietà indotta dal moto della struttura.

Le forzanti aeroelastiche proposte da Scanlan and Tomko [15], e largamente utilizzate oggi, sono le seguenti:

$$\frac{L_h}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} = \left[KH_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^*(K) \alpha + K^2 H_4^*(K) \frac{h}{B} \right] \quad (14.44)$$

$$\frac{M_\alpha}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} = \left[K A_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + K A_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^*(K) \alpha + K^2 A_4^*(K) \frac{h}{B} \right] \quad (14.45)$$

dove $H_j^*(K)$ e $A_j^*(K)$ con $j = 1 \dots 4$ sono le *derivate aeroelastiche*, mentre la frequenza ridotta in questo caso viene indicata con K e assume la seguente espressione:

$$K = \frac{2\pi f B}{U} \quad (14.46)$$

con f frequenza di oscillazione, e B larghezza dell'impalcato.

Nel caso di lastre piane ($a = 0$), la corrispondenza tra le derivate aeroelastiche e la funzione di Theodorsen è la seguente:

$$H_1^*(K) = -\frac{\pi F(k)}{k} \quad (14.47)$$

$$A_1^*(K) = -\frac{\pi F(k)}{4k} \quad (14.48)$$

$$H_2^*(K) = \frac{\pi}{4k} \left[1 + F(k) + \frac{2G(k)}{k} \right] \quad (14.49)$$

$$A_2^*(K) = -\frac{\pi}{16k} \left[1 - F(k) - \frac{2G(k)}{k} \right] \quad (14.50)$$

$$H_3^*(K) = \frac{\pi}{2k^2} \left[F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right] \quad (14.51)$$

$$A_3^*(K) = \frac{\pi}{8k^2} \left[F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right] \quad (14.52)$$

$$H_4^*(K) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2G(k)}{k} \right] \quad (14.53)$$

$$A_4^*(K) = \frac{\pi G(k)}{4k} \quad (14.54)$$

$$k = \frac{K}{2} \quad (14.55)$$

dove:

$$F(k) = \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2} \quad (14.56)$$

$$G(k) = -\frac{J_1 J_0 + Y_1 Y_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2} \quad (14.57)$$

con J_j e Y_j funzioni di Bessel del primo e del secondo tipo, di ordine j .

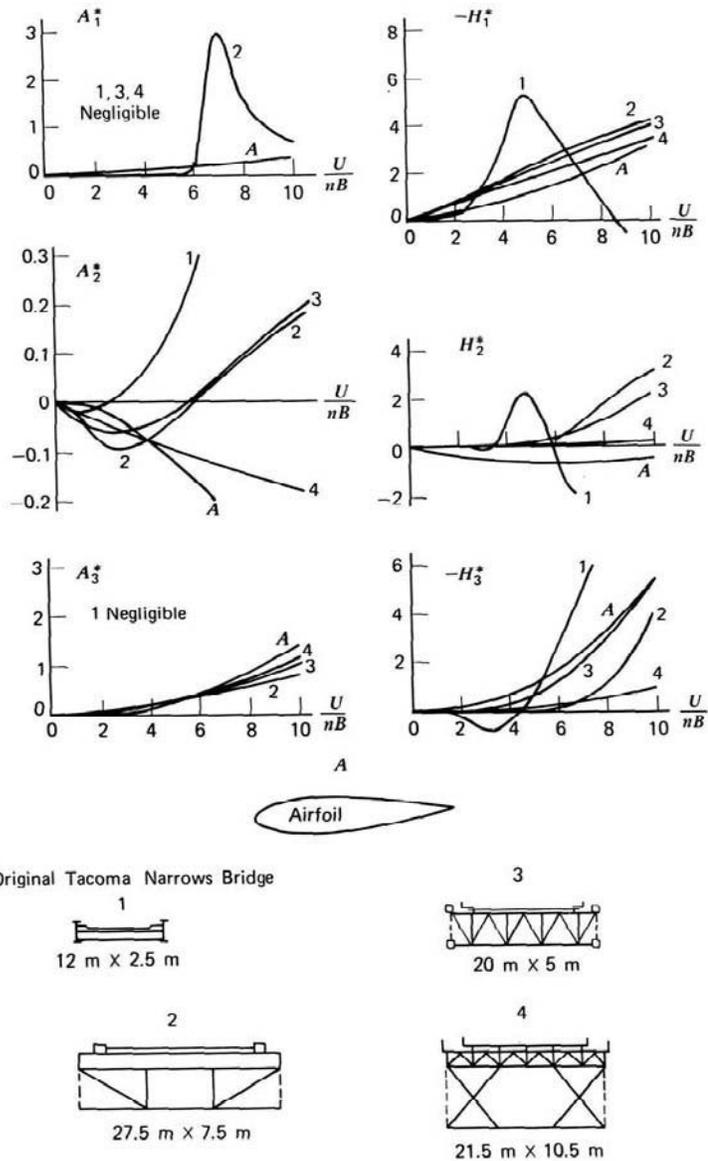


Figura 14.9: Esempi di derivate aeroelastiche per varie sezioni

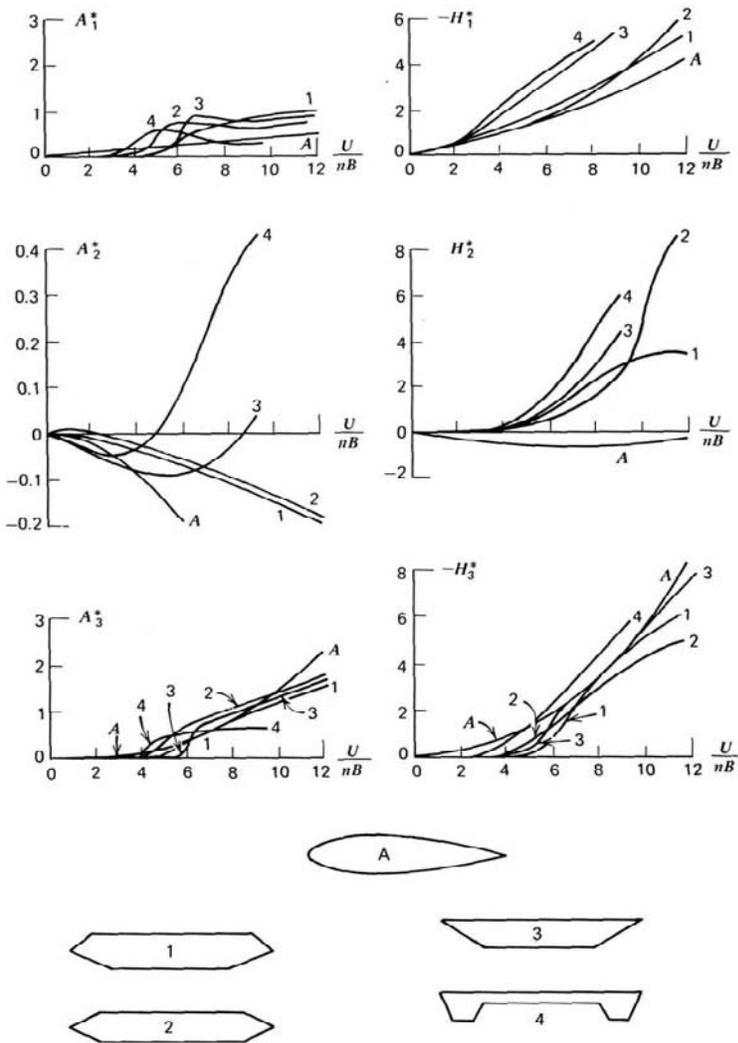


Figura 14.10: Esempi di derivate aeroelastiche per varie sezioni

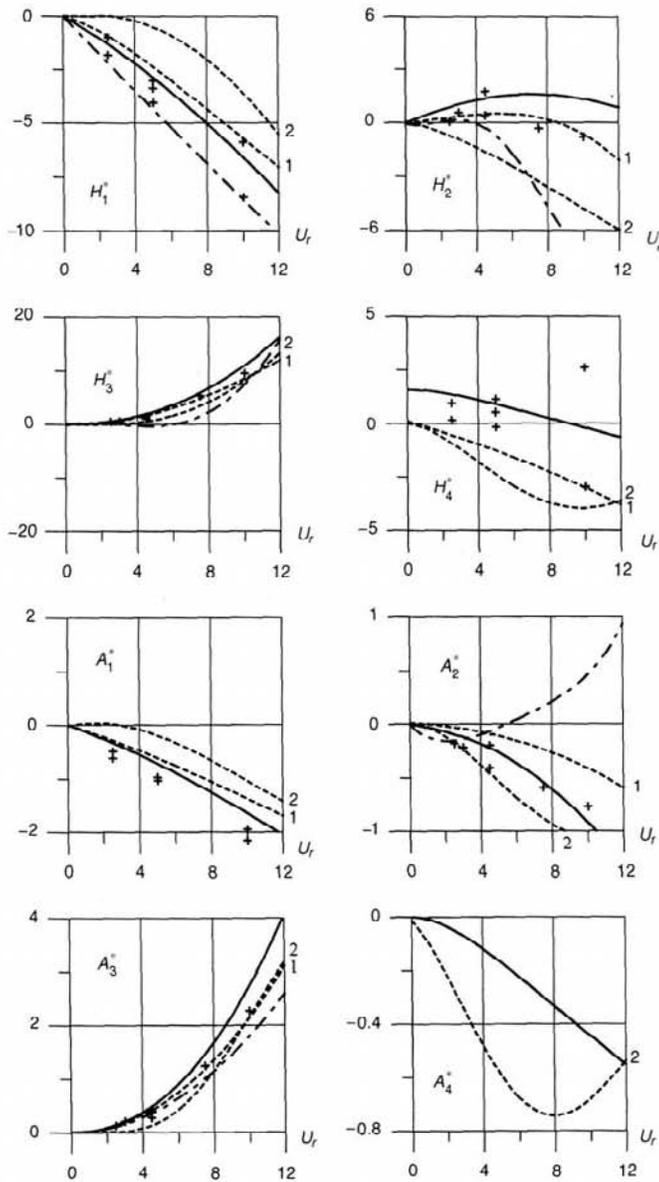


Figura 14.11: Derivate aeroelastiche per il Great Belt Bridge (curve 1,2 e +). -.- Ponte a sezione reticolare. - Lastra piana

14.4.4 Soluzione per il calcolo della velocità critica di Flutter classico

Si considerano le seguenti soluzioni del problema aeroelastico:

$$\frac{h}{B} = \frac{h_o}{B} e^{i\omega t} \quad (14.58)$$

$$\alpha = \alpha_o e^{i\omega t} \quad (14.59)$$

Andando a sostituire tali soluzione nelle equazioni di moto del sistema (Eq. 14.75), si ottengono le seguenti equazioni:

$$\left[-K^2 + 2i\nu_h K_h K + K_h^2 - \frac{\rho B^2}{m} (iK^2 H_1^*(K) + K^2 H_4^*(K)) \right] \frac{h_o}{B} - \left[\frac{\rho B^2}{m} iK^2 H_2^*(K) + \frac{\rho B^2}{m} K^2 H_3^*(K) \right] \alpha_o = 0 \quad (14.60)$$

$$\left[-\frac{\rho B^4}{J_\alpha} (iK^2 A_1^*(K) + K^2 A_4^*(K)) \right] \frac{h_o}{B} + \left[-K^2 + 2i\nu_\omega K K_\alpha + K_\alpha^2 - \frac{\rho B^4}{J_\alpha} iK^2 A_2^*(K) - \frac{\rho B^4}{J_\alpha} K^2 A_3^*(K) \right] \alpha_o = 0 \quad (14.61)$$

dove $K_h = \frac{B\omega_h}{U}$, $K_\alpha = \frac{B\omega_\alpha}{U}$, ν_h e ν_α sono rispettivamente i rapporti di smorzamento associati ai due gradi di libertà, h e α .

Definendo

$$X = \frac{\omega}{\omega_h} \quad (14.62)$$

e imponendo che il determinante dell'equazioni 14.60 e 14.61 sia nullo, si ottiene un'equazione del quarto ordine complessa. Considerando l'equazione reale e quella immaginaria separatamente, e risolvendole per diversi valori di K , è possibile diagrammare le loro radici, X , in funzione di K . Il punto in cui le due curve coincidono indica la frequenza ridotta dalla quale è possibile ricavare la velocità critica di Flutter classico.

14.4.5 Flutter ad un grado di libertà

La frequenza di oscillazione traslazionale e torsionale dipendono dalle derivate aeroelastiche $H_4^*(K)$ e $A_3^*(K)$ rispettivamente. Poiché tali derivate aeroelstiche dipendono a loro volta dalla frequenza ridotta, K , allora l'effettiva frequenza di oscillazione dovrebbe essere calcolata iterativamente. Talvolta è preferibile evitare tale calcolo iterativo, e ciò è possibile come vedremo nei successivi paragrafi.

Flutter traslazionale

In questo caso il moto è puramente traslazionale, pertanto le derivate $H_2^*(K)$ e $H_3^*(K)$ sono nulle. La rigidità totale del sistema sarà dunque data dalla somma della rigidità strutturale e di quella aerodinamica:

$$C_{h,t} = C_h - \frac{1}{2}\rho U^2 K^2 H_4^*(K) \quad (14.63)$$

da cui si evince che valori negativi di $H_4^*(K)$ incrementano apparentemente la rigidità della struttura. In particolare la frequenza propria traslazionale sarà data da:

$$f_{h,t} = f_h \sqrt{1 - \frac{\rho B^2}{2m_h} \frac{f_{h,t}^2}{f_h^2} H_4^*(K_{ae})} \approx f_h \sqrt{1 - \frac{\rho B^2}{2m_h} H_4^*(K)} \quad (14.64)$$

dove

$$K_{ae} = \frac{2\pi f_{h,t} B}{U} \quad (14.65)$$

$$K = \frac{2\pi f_h B}{U} \quad (14.66)$$

Analogamente, lo smorzamento totale è somma di quello strutturale e di quello aerodinamico:

$$\nu_{h,t} = \frac{f_h}{f_{h,t}} \nu_h - \frac{\rho B^2}{4m_h} H_1^*(K_{ae}) \quad (14.67)$$

Quando lo smorzamento totale è nullo allora si può trovare il valore di $H_1^*(K_{ae})$ che innesca il *Flutter traslazionale* corrispondente all'instabilità dinamica dovuta al solo moto traslazionale. Il valore della frequenza ridotta associata al valore critico di $H_1^*(K_{ae})$, permette di trovare la velocità critica. Tuttavia per ponti di grandi luce che si muovono di solo moto traslazionale, lo smorzamento totale risulta sempre positivo perché $H_1^*(K_{ae})$ risulta sempre negativo (Figg. 14.9, 14.10 e 14.11). Pertanto tale instabilità è poco ricorrente.

Flutter rotazionale

Nel caso di moto puramente torsionale si ottiene la seguente rigidità totale:

$$C_{\alpha,t} = C_\alpha - \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 K^2 A_3^*(K) \quad (14.68)$$

Pertanto la frequenza naturale rotazionale della struttura verrà scritta nel seguente modo:

$$f_{\alpha,t} = f_\alpha \sqrt{1 - \frac{\rho B^4}{2J_\alpha} \frac{f_{\alpha,t}^2}{f_\alpha^2} A_3^*(K_{ae})} \approx f_\alpha \sqrt{1 - \frac{\rho B^4}{2J_\alpha} A_3^*(K)} \quad (14.69)$$

Analogamente lo smorzamento totale sarà dato dalla somma dello smorzamento strutturale e di quello aerodinamico:

$$\nu_{h,t} = \frac{f_\alpha}{f_{\alpha,t}} \nu_\alpha - \frac{\rho B^4}{4J_\alpha} A_2^*(K_{ae}) \quad (14.70)$$

Quando lo smorzamento aerodinamico risulta nullo, si ha il *Flutter torsionale* (instabilità torsionale) corrispondente ad un valore di $A_2^*(K_{ae})$ pari a:

$$A_2^*(K_{ae}) = 4 \frac{J_\alpha}{\rho B^4} \nu_\alpha \frac{f_\alpha}{f_{\alpha,t}} \quad (14.71)$$

da cui è possibile trovare il valore critico della velocità del vento che causa l'instabilità nota la frequenza ridotta per la quale $A_2^*(K_{ae})$ è critico. Questo tipo di instabilità non è rara per i ponti al contrario del Flutter traslazionale (instabilità traslazionale) (Figg. 14.9, 14.10 e 14.11).

14.5 Fenomeni aeroelastici in presenza della turbolenza atmosferica

La risposta strutturale dovuta alla componente turbolenta della velocità del vento è stata ampiamente discussa nei capitoli precedenti. In questa sezione, consideriamo i fenomeni aeroelastici associati ai ponti in presenza delle componenti fluttuanti della velocità eolica, $u = u(t)$ e $w = w(t)$, relative rispettivamente alla turbolenza longitudinale (lungo x) e verticale (lungo z).

Le forzanti indotte dalla turbolenza atmosferica sono note come forzanti di *buffeting*, e possono essere scritte, con l'ausilio della teoria quasi-stazionaria linearizzata, nel seguente modo:

$$L_b = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[2C_L(\alpha_o) \chi_{L,u} \frac{u}{U} + (C_{L,\alpha}(\alpha_o) + C_D(\alpha_o)) \chi_{L,w} \frac{w}{U} \right] \quad (14.72)$$

$$M_b = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[2C_M(\alpha_o) \chi_{M,u} \frac{u}{U} + C_{M,\alpha}(\alpha_o) \chi_{M,w} \frac{w}{U} \right] \quad (14.73)$$

ottenute linearizzando le forzanti intorno all'angolo d'attacco medio α_o . Come sempre vengono trascurate i termini non lineari delle componenti fluttuanti della velocità del vento:

$$(U + u)^2 \cong U^2 + 2Uu \quad (14.74)$$

Inoltre, passando alla densità spettrali, i termini χ^2 indicano, come al solito, le ammettenze aerodinamiche delle varie componenti delle forzanti di buffeting.

Le componenti turbolente della velocità del vento inducono un moto della struttura. Nascono, quindi, delle forzanti aeroelastiche esprimibili con le equazioni 15.9

e 15.10. Pertanto, le equazioni di moto, che risolvono la risposta strutturale della struttura, saranno le seguenti:

$$\begin{cases} m_h \ddot{h} + S_x \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + C_h h = L_h + L_b \\ J_\alpha \ddot{\alpha} + S_x \ddot{h} + c_\alpha \dot{\alpha} + C_\alpha \alpha = M_\alpha + M_b \end{cases} \quad (14.75)$$

Un approccio immediato, per il calcolo della risposta strutturale in presenza di turbolenza atmosferica, consiste nel trascurare le derivate aeroelastiche che accoppiano aerodinamicamente i due gradi di libertà della struttura, ossia $H_2^*(K)$, $H_3^*(K)$, $A_1^*(K)$ e $A_4^*(K)$, dal momento che la risposta strutturale è valutata in un intervallo di velocità del vento sufficientemente lontano dalla velocità critica che innesca il Flutter accoppiato. Pertanto, attraverso una decomposizione modale è possibile disaccoppiare i due gradi di libertà anche meccanicamente. Si ottengono dunque due sistemi ad un solo grado di libertà, la cui risposta può essere calcolata con le procedure discusse nei capitoli precedenti per la valutazione della risposta strutturale alle azioni turbolente indotte dal vento.

Tuttavia, per velocità del vento sufficientemente vicine alla velocità di Flutter accoppiato, non è più possibile disaccoppiare aerodinamicamente i due gradi di libertà (Dyrbye and Hansen [4], Simiu and Scanlan [16]). La trattazione non è qui riportata, ma dalla Fig. 14.12 si può infatti notare che la risposta del sistema aerodinamicamente accoppiato e di quello disaccoppiato coincidono solo fintanto che la velocità eolica non eccede un valore circa pari al 60% della velocità critica di Flutter.

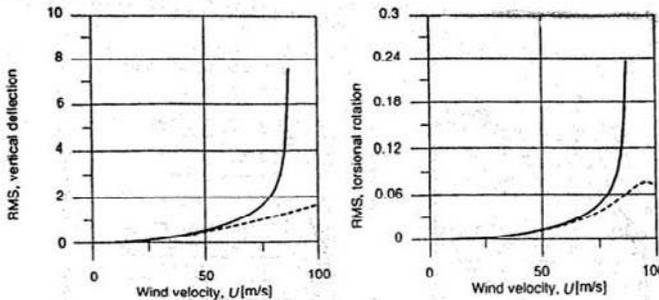


Figura 14.12: — Sistema aerodinamicamente accoppiato; -- Sistema aerodinamicamente disaccoppiato

15

Risposta aeroelastica delle strutture secondo l'Eurocodice 1

L'Eurocodice-1 [5] fornisce delle regole per la progettazione di strutture sensibili alle instabilità aeroelastiche. Come vedremo, tali regole si fondano sulla trattazione generale affrontata nel Cap. 14. Pertanto è possibile riconoscere facilmente le formule trovate precedentemente.

15.1 Galloping

La velocità critica di Galloping, secondo L'EC1, è data dalla formula:

$$U_{g,cr} = \frac{2S_c}{a_g} n_{1,y} b \quad (15.1)$$

dove b è la larghezza della sezione trasversale, $n_{1,y}$ è la frequenza di vibrazione della struttura nella direzione ortogonale a quella del vento, a_g è il fattore di Galloping riportato in Fig. 15.1, pari a 10 se non specificato, e S_c è il numero di Scruton definito come segue:

$$S_c = \frac{4\pi\nu m_e}{\rho b^2} \quad (15.2)$$

dove m_e è la massa equivalente per unità di lunghezza:

$$m_e = \frac{\int_L \psi^2(z) m(z) dz}{\int_L \psi^2(z) dz} \quad (15.3)$$

con il consueto significato dei simboli.

Inoltre deve essere garantito che:

$$U_{g,cr} > 1.25U_m \quad (15.4)$$

dove U_m è la velocità media del vento calcolata in corrispondenza dell'altezza in cui si innesca il Galloping, ritenuta come punto in cui si ha la massima ampiezza di oscillazione.

Quando la velocità critica di sincronizzazione, $U_{s,cr}$, è prossima a quella di Galloping, $U_{g,cr}$, ossia quando

$$0.7 < \frac{U_{g,cr}}{U_{s,cr}} < 1.5 \quad (15.5)$$

è probabile che s'inneschi un'interazione tra il distacco dei vortici e il Galloping. Si raccomandano pertanto prove in galleria del vento o consulenze specialistiche.

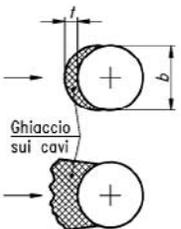
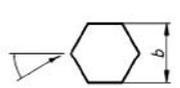
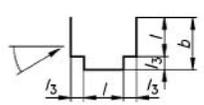
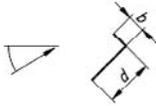
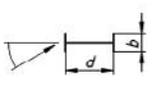
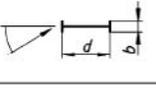
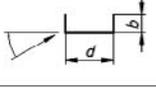
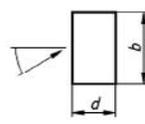
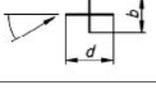
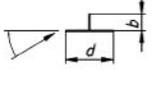
Sezioni trasversali	Fattore di instabilità di "galloping" a_G	Sezioni trasversali	Fattore di instabilità di "galloping" a_G
 <p>Ghiaccio sui cavi</p> <p>$t = 0,06 b$ (ghiaccio sui cavi)</p>	1,0		1,0
			4
	$\frac{d}{b} = 2$		$\frac{d}{b} = 2$
	$\frac{d}{b} = 1,5$		$\frac{d}{b} = 2,7$
	$\frac{d}{b} = 1$		$\frac{d}{b} = 5$
	$\frac{d}{b} = \frac{2}{3}$		$\frac{d}{b} = 3$
	$\frac{d}{b} = \frac{1}{2}$		$\frac{d}{b} = \frac{3}{4}$
	$\frac{d}{b} = \frac{1}{3}$		$\frac{d}{b} = 2$

Figura 15.1: Fattore d'instabilità di Galloping a_g

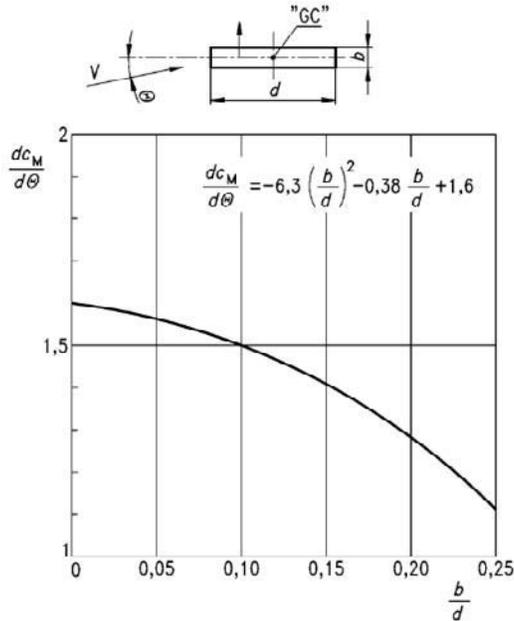


Figura 15.2: $C_{M,\theta}$ per sezioni rettangolari

15.2 Divergenza e Flutter

Una generica sezione strutturale è incline ad instabilità aeroelastiche, di tipo Divergenza o Flutter, se i seguenti criteri sono tutti contemporaneamente soddisfatti:

- La struttura, o una parte sostanziale di essa, deve avere una sezione trasversale allungata con proporzioni tra larghezza, d , ed altezza, b , maggiore o uguale di 4: $d/b \geq 4$.
- L'asse torsionale deve essere parallelo al piano medio della sezione e normale alla direzione del vento, ed il centro di torsione deve essere almeno $d/4$ dal bordo sopravento della sezione.
- La frequenza naturale minore deve corrispondere ad un moto torsionale, oppure la minima frequenza torsionale deve essere minore di due volte la più bassa frequenza traslazionale.

15.2.1 Divergenza

$$U_{d,cr} = \sqrt{\frac{2k_\theta}{\rho d^2 C_{M,\theta}}} \quad (15.6)$$

dove k_θ è la rigidezza torsionale, e $C_{M,\theta}$ è la derivata prima del coefficiente aerodinamico di momento, C_M , rispetto all'angolo d'attacco θ .

Deve essere garantito che:

$$U_{d,cr} > 2U_m(z_{eq}) \quad (15.7)$$

dove $U_m(z_{eq})$ è la velocità eolica media misurata alla quota equivalente, z_{eq} , definita in Fig. 11.7.

Alcuni valori di $C_{M,\theta}$ per sezioni rettangolari sono definiti in Fig. 15.2.

15.2.2 Flutter

Per quanto riguarda il Flutter, L'EC1 rimanda alla soluzione del problema mediante prove in galleria del vento.

Sebbene non direttamente specificato, nella pratica si fa spesso uso del modello di Scanlan and Tomko [15] che viene nuovamente riportato:

$$\begin{cases} m_h \ddot{h} + S_x \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + C_h h = L_h \\ J_\alpha \ddot{\alpha} + S_x \ddot{h} + c_\alpha \dot{\alpha} + C_\alpha \alpha = M_\alpha \end{cases} \quad (15.8)$$

con L_h e M_α definite nel seguente modo:

$$\frac{L_h}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} = \left[KH_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^*(K) \alpha + K^2 H_4^*(K) \frac{h}{B} \right] \quad (15.9)$$

$$\frac{M_\alpha}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} = \left[KA_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^*(K) \alpha + K^2 A_4^*(K) \frac{h}{B} \right] \quad (15.10)$$

dove le derivate aeroelastiche, $H_j^*(K)$ e $A_j^*(K)$ con $j = 1 \dots 4$, sono stimate mediante prove in galleria del vento. La valutazione della velocità critica di Flutter avviene mediante la procedura descritta nel paragrafo 14.4.4.

16

Sperimentazione in galleria del vento

Sebbene l'impiego della fluidodinamica computazionale sia in rapida espansione, oggi rimane la necessità di effettuare esperimenti fisici per comprendere i complessi fenomeni legati ad una corrente fluida che investe un corpo tozzo. Per questo motivo, le gallerie del vento hanno avuto, e continuano ad avere, un notevole sviluppo non solo nel campo dell'aeronautica, dove furono utilizzate per la prima volta, ma anche nel campo dell'ingegneria strutturale. Nelle simulazioni in galleria del vento, la sperimentazione viene effettuata su modelli in scala per ovvie considerazioni di carattere economico e di convenienza. La scalatura del modello apre le porte ad una vasta gamma di teorie che si fondano su parametri adimensionali e/o su criteri di similitudine applicabili alla riproduzione del flusso e alla sperimentazione sui modelli.

16.1 Criteri di similitudine

Per analizzare il problema, conviene ragionare in termini di parametri adimensionali. Tali parametri possono essere trovati impostando le equazioni differenziali che descrivono il sistema fisico in questione. Successivamente, vengono divisi per quantità che hanno la medesima dimensione, così da ottenere delle quantità adimensionali che governano il comportamento del sistema. Mantenendo invariato il valore di alcuni di questi parametri, nel passaggio da prototipo (struttura reale) a modello, viene automaticamente garantita la similitudine.

16.1.1 Analisi dimensionale

La forza F agente su un corpo immerso in un fluido è funzione di sei parametri: la densità del fluido, ρ , la velocità del flusso, U , una dimensione caratteristica del corpo, D , una frequenza n , la viscosità del flusso, μ , e l'accelerazione gravitazionale, g . In particolare si ha:

$$F = \rho^\alpha U^\beta D^\gamma n^\delta \mu^\epsilon g^\xi \quad (16.1)$$

Applicando il teorema π si ottiene la seguente espressione per la forzante:

$$F = \rho U^2 D^2 \left(\frac{nD}{U} \right)^\delta \left(\frac{\mu}{\rho U D} \right)^\epsilon \left(\frac{gD}{U^2} \right)^\xi \quad (16.2)$$

da cui si evince che il coefficiente di forza $\frac{F}{\rho U^2 D^2}$ è funzione delle seguenti quantità adimensionali:

$$\frac{F}{\rho U^2 D^2} = \mathfrak{F} \left[\left(\frac{nD}{U} \right), \left(\frac{\mu}{\rho U D} \right), \left(\frac{gD}{U^2} \right) \right] \quad (16.3)$$

In particolare si definiscono i seguenti numeri:

$$S_t = \frac{n_{vs} D}{U} \quad (16.4)$$

$$R_e = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} \quad (16.5)$$

$$F_r = \frac{U^2}{g D} \quad (16.6)$$

noti rispettivamente come numero di Strouhal, numero di Reynolds, e numero di Froude.

16.1.2 Considerazioni di base per la scalatura

Per una corretta simulazione in galleria del vento è necessario che si conservino i valori dei numeri appena menzionati, ovvero, nel passaggio da prototipo a modello è necessario che si verifichino le seguenti uguaglianze:

$$\left(\frac{nD}{U} \right)_r = \left(\frac{nD}{U} \right)_g \quad \left(\frac{UD}{\nu} \right)_r = \left(\frac{UD}{\nu} \right)_g \quad \left(\frac{U^2}{gD} \right)_r = \left(\frac{U^2}{gD} \right)_g \quad (16.7)$$

dove i pedici r ed g si riferiscono rispettivamente alla struttura reale e al modello sperimentale.

Si introducono i cosiddetti fattori di scala, λ_L , λ_U , e λ_n , noti rispettivamente come *scala delle lunghezze*, *scala delle velocità*, e *scala delle frequenze*:

$$\lambda_L = \frac{D_g}{D_r} \quad \lambda_U = \frac{U_g}{U_r} \quad \lambda_n = \frac{\lambda_U}{\lambda_L} \quad (16.8)$$

cosicché le relazioni 16.7 possono essere riscritte in funzione dei fattori di scala:

$$\lambda_L = \frac{\lambda_U}{\lambda_n} \qquad \lambda_L = \frac{1}{\lambda_U} \qquad \lambda_L = \lambda_U^2 \qquad (16.9)$$

ottenute tenendo presente che le quantità ρ , ν e g rimangono invariate nel passare dalla struttura reale al modello di galleria. Le relazioni riportate nella 16.9 sono note rispettivamente come *condizione di Strouhal*, *condizione di Reynolds*, e *condizione di Froude*.

Particolare attenzione va rivolta alla scalatura del numero di Reynolds: se il prototipo ed il modello sono entrambi investiti da una corrente d'aria, allora per conservare il numero di Reynolds è necessario che $\lambda_U/\lambda_L = 1$, in accordo con la condizione di Reynolds. Tuttavia, questa condizione genera delle discordanze con gli altri requisiti necessari per una corretta scalatura, come si può notare dalle altre due relazioni della 16.9. Segue che la simulazione del numero di Reynolds è incompatibile con i requisiti prioritari di scalatura delle lunghezze e delle velocità, a meno che le prove vengano effettuate con $\lambda_L = 1$, condizione ovviamente irrealizzabile nel caso delle strutture.

In particolare, si può osservare che se si usasse una scala delle lunghezze $\lambda_L = 1 : 100$, in galleria del vento occorrerebbe una velocità del flusso 100 volte maggiore della realtà. Per contro, la condizione di Froude, impone che la velocità reale sia scalata di $\sqrt{\lambda_L} = 1/10$. Pertanto le due condizioni sono discordanti. Inoltre, anche se fosse ipoteticamente rispettata la condizione $\lambda_U = 1$, la condizione di Strouhal vorrebbe che $\lambda_n = 100$ ossia per simulare i fenomeni in un'intervallo di frequenza tra 0 e 4Hz (intervallo rappresentativo della turbolenza atmosferica reale), bisognerebbe riprodurre in galleria del vento uno spettro compreso tra 0 e 400Hz, cui corrisponde, per il teorema di Nyquist, una frequenza di acquisizione almeno pari a 800Hz.

Nelle pratiche strutturali, la condizione di Reynolds risulta essere sicuramente molto importante, ma non risulta quasi mai soddisfatta, sebbene talvolta non è strettamente necessaria. Il numero di Reynolds delinea, come visto nei precedenti capitoli, diversi regimi in corrispondenza dei quali, in generale, la struttura ha un comportamento aerodinamico differente. Basti pensare al distacco dei vortici: ad esempio, nel regime critico non si osserva distacco dei vortici per cilindri circolari, pertanto questa condizione dovrebbe essere rispettata passando dalla struttura reale alla sperimentazione, altrimenti si osserverebbero fenomeni completamente diversi dalla realtà.

Generalmente, si utilizza una rugosità tecnica da applicare al modello, in modo da riprodurre i fenomeni che si avverrebbero per numeri di Reynolds più elevati.

L'aerodinamica dei corpi tozzi aventi spigoli vivi è governata dalla geometria e risulta essere indipendente dal numero di Reynolds, pertanto in tale situazione è possibile trascurare la condizione di Reynolds. Quando si hanno basse accelerazioni, come nel caso di simulazione di fenomeni ambientali, è importante soddisfare la condizione di Froude, che tuttavia è inconciliabile con quella di Reynolds. Infine, per la

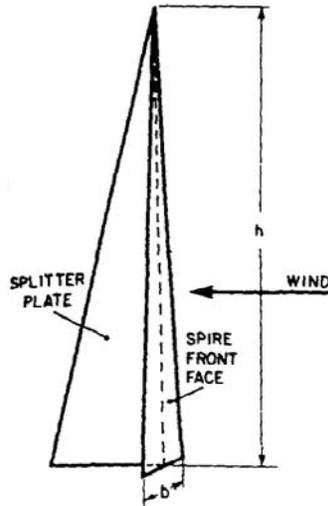


Figura 16.1: Modello di una *spire*

sperimentazione aeroelastica risulta essere molto importante la corretta riproduzione delle frequenze e degli smorzamenti strutturali.

16.1.3 Simulazione della circolazione atmosferica

Il rispetto dei criteri di similitudine appena visti, garantisce una fedele simulazione delle caratteristiche del flusso incidente sui prototipi, ossia del profilo di velocità media, della turbolenza e delle scale integrali, e dunque degli spettri e dei cross-spettri della componente fluttuante della velocità del vento.

Particolare attenzione viene dedicata alla simulazione dello strato limite atmosferico del sito in esame. La generazione dello strato limite avviene disponendo, lungo tutto lo sviluppo longitudinale della galleria del vento, dei pannelli di rugosità (rugosità superficiale) che simulano la rugosità del sito in questione. Tuttavia, affinché il flusso raggiunga le caratteristiche desiderate, occorrerebbero delle gallerie molto lunghe, requisito non sempre rispettato. Sorgono, pertanto, due importanti questioni: la limitata lunghezza della galleria porta ad avere da un lato uno strato limite di modesta altezza (si ritiene che l'altezza debba essere almeno 2-3 volte più grande dell'altezza del modello), dall'altro una turbolenza costituita da piccoli vortici che alterano lo spettro reale della componente fluttuante della velocità del vento. Per questo motivo, oltre alla rugosità superficiale, si pongono, nella sezione d'imbocco della galleria, dei dispositivi che alzano lo strato limite che si svilupperebbe con il solo attrito con la rugosità superficiale, e capaci di generare scale integrali di turbolenza di dimensioni

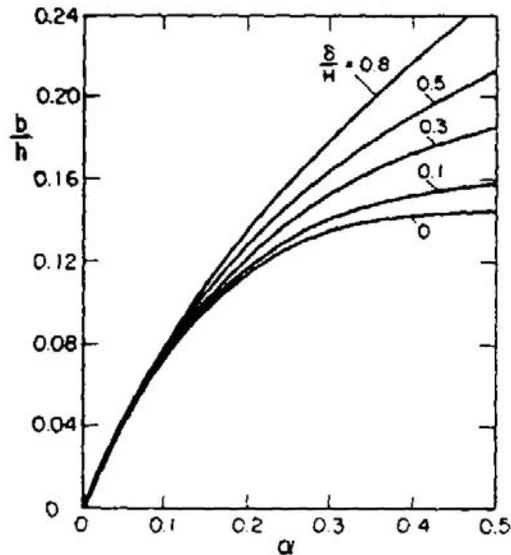


Figura 16.2: Curve per la determinazione della larghezza b delle spires; H è l'altezza della camera di prova della galleria del vento, Irwin [10]

maggiori. Tra questi dispositivi abbiamo le *griglie* e le *spires*, disposte verticalmente, e le barriere orizzontali.

Vediamo in dettaglio le spires (Fig. 16.1). Fissata l'altezza desiderata dello strato limite δ , nonché il profilo di velocità media del vento caratterizzato dall'esponente α , è possibile ottenere l'altezza h delle spires secondo la seguente relazione proposta da Irwin [10]:

$$h = \frac{1.39\delta}{1 + \alpha/2} \quad (16.10)$$

Per ottenere la larghezza b delle spires si può fare riferimento alla Fig. 16.2, in cui con H è indicata l'altezza della camera di prova della galleria del vento.

Il profilo di velocità desiderato viene raggiunto ad una distanza pari a $6h$ dalle spires. Come già accennato, è necessario disporre lungo la dimensione longitudinale della galleria, dei pannelli di rugosità, costituiti da cubi di altezza k tale che sia soddisfatta la seguente relazione valida per $30 < \delta D^2/k^3 < 2000$:

$$\frac{k}{\delta} = \exp \left\{ \left(\frac{2}{3} \right) \ln \left(\frac{D}{\delta} \right) - 0.1161 \left[\left(\frac{2}{C_f} \right) + 2.05 \right]^{1/2} \right\} \quad (16.11)$$

dove D è la distanza tra gli elementi di rugosità, mentre C_f è definito come segue:

$$C_f = 0.136 \left[\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right]^2 \quad (16.12)$$

16.2 Simulazione aerodinamica ed aeroelastica dei corpi tozzi

In questa sezione viene discussa la dipendenza della risposta aerodinamica ed aeroelastica dei modelli testati in galleria del vento, dalle caratteristiche del flusso simulato e dal suo numero di Reynolds. Inoltre, verrà discusso l'effetto del *bloccaggio*.

16.2.1 Effetti della turbolenza del flusso

La struttura dei vortici e la loro dimensione può essere riprodotta fedelmente in galleria del vento. Come menzionato nei capitoli precedenti, la turbolenza atmosferica nasce dall'attrito con il terreno. Pertanto, se il terreno viene riprodotto nella medesima scala del modello, è automaticamente soddisfatta la *legge di Jensen* che si scrive nel seguente modo:

$$\left(\frac{h}{z_0} \right)_r = \left(\frac{h}{z_0} \right)_g \quad (16.13)$$

dove h è l'altezza della struttura e z_0 è la lunghezza di rugosità del terreno circostante. Analogamente al numero di Reynolds, Strouhal e Froude, si definisce il numero di Jensen:

$$J_e = \frac{h}{z_0} \quad (16.14)$$

Quando è soddisfatta la legge di Jensen, la struttura dei vortici e lo spettro della componente fluttuante della velocità del vento, vengono simulati fedelmente in galleria del vento. Se in luogo di z_0 si considera la scala integrale di turbolenza, L_u^x , si ottiene che anche i vortici all'interno dello strato limite devono rispettare la stessa scala utilizzata nella realizzazione del modello. Tuttavia, la conservazione della quantità h/L_u^x , non è sempre possibile, anzi particolarmente difficile, vista l'impossibilità di ottenere scale di turbolenza sufficientemente grandi nelle gallerie del vento comunemente utilizzate. Generalmente, si ritiene che essa sia soddisfatta se si ottiene una buona corrispondenza con i dati reali a disposizione.

16.2.2 Effetti del numero di Reynolds: rugosità tecnica

Gli spigoli vivi di una struttura causano un immediato distacco del flusso, indipendente dal numero di Reynolds. Per questa ragione, si assume che le pressioni indotte su

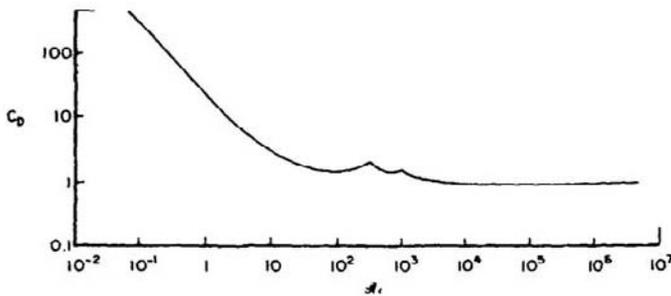


Figura 16.3: Esempio di variazione del coefficiente di trascinamento (drag) con R_e

tali strutture siano correttamente riprodotte in galleria del vento se il flusso è adeguatamente simulato. Tuttavia, nei corpi tozzi con un accentuato sviluppo longitudinale, si può riscontrare il riattacco del flusso, fenomeno che dipende dal numero di Reynolds. In queste condizioni, i valori delle forzanti indotte dal vento possono essere sensibilmente diversi. Inoltre, se la scala delle lunghezze è molto piccola, può accadere che il coefficiente di trascinamento sia notevolmente influenzato dal numero di Reynolds, dal momento che quest'ultimo è notevolmente più piccolo di quello reale, e conseguentemente la forza di trascinamento è notevolmente più grande (Fig. 16.3).

Nel caso di corpi costituiti da superfici curve, gli effetti del numero di Reynolds sono significativi, come si può vedere dalla Fig. 16.4 dove è riportato l'andamento del coefficiente di drag per un cilindro circolare.

Come visto nei paragrafi precedenti, una corretta riproduzione del numero di

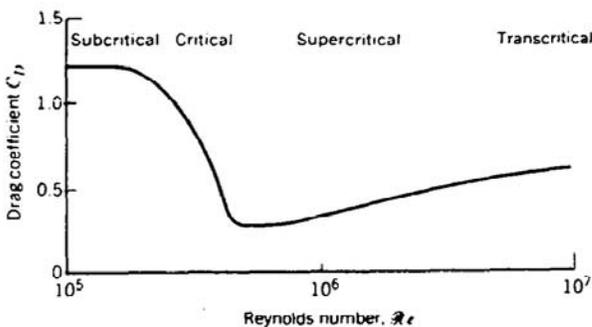


Figura 16.4: Variazione del coefficiente di trascinamento (drag) con R_e per un cilindro circolare

Reynolds in galleria del vento, vorrebbe che $\lambda_L = 1$, requisito ovviamente irrealizzabile. Per riprodurre fedelmente i fenomeni relativi a numeri di Reynolds molto

grandi, è necessario introdurre la rugosità tecnica. In particolare, lasciando invariato il numero di Reynolds di galleria, che per le ragioni viste è necessariamente minore di quello reale, è possibile cambiare regime (ad esempio da quello laminare a quello turbolento) applicando al modello delle costole di altezza k poste ad una distanza d . L'altezza k di tali costole deve rispettare le seguenti relazioni:

$$\frac{Uk}{\nu} > 400 \quad (16.15)$$

$$\frac{k}{D} < 10^{-2} \quad (16.16)$$

dove U è la velocità media del flusso, ν è la viscosità cinematica del flusso, e D è una dimensione caratteristica del modello.

16.2.3 Effetti del bloccaggio

Un corpo, posto nella sezione di prova di una galleria del vento, ostruisce parzialmente il passaggio dell'aria, causando un'accelerazione del flusso, in corrispondenza delle regioni laterali del corpo stesso. Tale effetto è noto come *bloccaggio*. Generalmente, si cerca di scegliere una scala del modello tale per cui gli effetti del bloccaggio siano trascurabili. Qualora ciò non fosse possibile, gli effetti del bloccaggio diverrebbero considerevoli a tal punto che il flusso intorno al modello ed il comportamento aerodinamico del modello stesso non sarebbero più veritieri. Per correggere l'effetto del bloccaggio sul coefficiente di trascinamento, è possibile utilizzare la seguente relazione:

$$C_{D_c} = \frac{C_D}{1 + KS/C} \quad (16.17)$$

dove C_{D_c} è il coefficiente di trascinamento corretto, C_D è il coefficiente di trascinamento misurato in galleria del vento, S è l'area di riferimento per il calcolo di C_{D_c} e C_D , e C è l'area della sezione trasversale della galleria. Il rapporto S/C è definito come bloccaggio. Il coefficiente K può essere determinato soltanto in un limitato numero di situazioni.

Bibliografia

- [1] R. D. Blevins. Flow-induced vibration, 2nd edition. *Van Nostrand Reinhold, New York, USA*, 1990.
- [2] A. G. Davenport. The response of slender line-like structures to a gusty wind. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 33:380–408, 1962.
- [3] W. B. Davenport. Probability and random process. *McGraw-Hill*, 1970.
- [4] C. Dyrbye and S. V. Hansen. Wind loads on structures. *John Willey and Sons*, 1997.
- [5] Eurocodice-1. Basis of design and actions on structures, part 2-4: Actions on structure-wind actions. *European Prestandard, ENV 1991-2-4*, 1997.
- [6] C. C. Feng. The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and d-section cylinders. *Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, The University of British Columbia, Canada*, 1968.
- [7] I. Goswami, R. H. Scanlan, and N. P. Jones. Vortex-induced vibration of circular cylinders. part 1: experimental data. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(11):2270–2287, 1993.
- [8] O. M. Griffin and S.E. Ramberg. Some recent studies of vortex shedding with applications to marine tubulars and risers. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 104:2–13, 1982.
- [9] W. G. Humphreys. Physics of the air. *McGraw-Hill, New-York*, 1964.
- [10] H. P. A. H. Irwin. The design of spires for wind simulation. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn*, 7:361–367, 1981.
- [11] D. E. Newland. Random vibrations and spectral analysis. *Longman*, 1980.
- [12] S. Pastò. Fatigue-induced risk assessment of slender structures with circular cross-section at lock-in. *Tesi di Dottorato, Università di Firenze, TU-Braunschweig*, 2005.

-
- [13] H. Ruscheweyh. Dynamische windwirkung an bauwerken. *Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin*, 1982.
- [14] T. Sarpkaya. Vortex-induced oscillations, a selective review. *Journal of Applied Mechanics*, 46:241–258, 1979.
- [15] R. H. Scanlan and J. J. Tomko. Airfoil and bridge deck flutter derivatives. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 97:1717–1737, 1971.
- [16] E. Simiu and R. H. Scanlan. Wind effects on structures. *Wiley, New York*, 1996.
- [17] T. Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. *NACA report*, 496, 1935.
- [18] B.J. Vickery and R.I. Basu. Across-wind vibrations of structures of circular cross-section. part ii. development of a mathematical model for full scale application. *Journal of Wind Engineering and Structural Aerodynamics*, 12:75–97, 1983.

La nuova area di studio multidisciplinare dell'Ingegneria del Vento nasce come risposta ai bisogni di progettazione e costruzione di infrastrutture sempre più ardite: i materiali più leggeri e le dimensioni hanno reso molte realizzazioni sensibili all'azione del vento e quindi necessario l'approfondimento della fluido-dinamica applicata, dell'aero-dinamica dei corpi e dell'aeroelastica anche per il settore dell'ingegneria civile. Il volume costituisce il primo tentativo di raccolta organica e completa delle nozioni a livello di corso universitario avanzato (inclusi Master e Dottorato), ma intende offrire un aiuto importante anche a quei professionisti la cui attività si svolge nella progettazione, gestione e sviluppo di opere di grandi dimensioni sensibili all'azione del vento.

CLAUDIO BORRI, Professore Ordinario di "Scienza delle Costruzioni" presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Firenze, è anche direttore del CRIACIV (Centro di Ricerca Interuniversitario di Aerodinamica delle Costruzioni e Ingegneria del Vento). Autore di circa 160 pubblicazioni scientifiche è membro delle associazioni nazionali ed internazionali di Ingegneria del Vento ed ha ottenuto numerosi riconoscimenti internazionali per la sua attività di ricerca.

STEFANO PASTÒ, Dottore di ricerca, è collaboratore del CRIACIV dove svolge attività di ricerca sulla valutazione degli effetti del vento sulle strutture mediante sperimentazione in galleria del vento e modellazioni numeriche.